This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

Digitized by Google

Digitized by Google

Q
56
A37

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE

TOME LIV

8891

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, DES LETTRES
ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE
rue de Louvain, 112

JUIN 1896

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME LIV

CLASSE DES SCIENCES

1. — Sclérotes et cordons mycéliens (116 pages et 6 planches); par Ch. Bommer.

2. — Contribution à l'étude de la phagocytose (66 pages et 3 planches); par le Dr C. De Bruyne.

3. — Sur une méthode simple pour chercher la variation de l'angle d'extinction dans les différentes faces d'une même zone. — Application à la zone verticale de l'axinite (26 pages et 13 figures); par G. Cesàro.

4. — Sur les déformations permanentes et l'hysteresis (1er mémoire, 62 pages et 12 figures); par P. Duhem.

5. — Sur les déformations permanentes et l'hysteresis : Les modifications permanentes du soufre (2e mémoire, 86 pages et 40 figures); par le même.

6. — Sur les déformations permanentes et l'hysteresis : Théorie générale des modifications permanentes (3e mémoire, 56 pages); par le même.

7. — Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur (1er mémoire, 46 pages et 2 figures); par J. Beaupain.

8. — Idem (second mémoire, 47 pages et 1 figure); par le même.

9. — Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux (*Mémoire couronné*, 92 pages); par Lucien Lévy.

Digitized by Google

Digitized by Google

SCLÉROTES

ET

CORDONS MYCÉLIENS

PAR

CH. BOMMER

DOCTEUR EN SCIENCES NATURELLES

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 15 décembre 1893.)

Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION.

L'appareil végétatif des Champignons présente des adaptations nombreuses et variées. Parfois, certaines de ses parties se différencient en organes spéciaux, tels que les haustoires des Péronosporés, destinés spécialement à attaquer les tissus des plantes dans lesquelles se développe le mycélium. Le plus souvent, les adaptations intéressent l'appareil végétatif dans son ensemble et le mycélium se groupe en masses offrant une structure condensée, sclérotes ou cordons. Ce groupement a pour effet soit de soustraire le mycélium aux influences défavorables du milieu extérieur, soit de former des organes spéciaux de propagation, soit enfin de créer des réserves de matières nutritives. Cette dernière adaptation est certainement la plus importante, et par le nombre des espèces qui la présentent, et par les modifications profondes qu'elle détermine dans l'appareil végétatif.

Les modifications adaptatives, dites aussi éthologiques, de l'appareil végétatif sont particulièrement développées chez les Basidiomycètes et les Ascomycètes; elles peuvent être rapportées aux quatre catégories suivantes : adaptations pour l'attaque, la protection, la propagation de l'espèce et l'accumulation des réserves (ou offensives, protectrices, propagatrices et accumulatrices).

Digitized by Google

Il ne faut pas attribuer à ces divisions la valeur systématique de catégories de modifications bien délimitées, s'excluant les unes les autres dans un organisme déterminé; elles doivent, au contraire, être envisagées comme représentant dans chaque cas spécial, le caractère dominant des adaptations nombreuses que doit offrir simultanément l'appareil végétatif.

C'est ainsi, par exemple, que les gros cordons mycéliens de *Phallus impudicus,* si évidemment adaptés à la propagation de l'espèce, révèlent aussi dans leur structure des adaptations accumulatrices; celles-ci ont cependant une importance secondaire, et la caractéristique des cordons est de servir à la propagation. Tous les sclérotes accumulateurs connus, à l'exception d'un seul (*Peziza mycetophila*), possèdent à leur surface un tissu cortical spécial, souvent très développé, dont le rôle protecteur est des plus manifestes (1).

Dans d'autres cas, la différenciation de l'appareil végétatif a lieu en même temps dans deux sens différents avec une intensité à peu près égale. Il est alors parfois difficile de décider quelle est celle des adaptations qui l'emporte sur l'autre, et il faut tenir compte de la double tendance de l'appareil végétatif. C'est le cas du sclérote accumulateur de *Polyporus umbellatus,* qui est adapté jusqu'à un certain point à la propagation par sa disposition en longs rameaux; il est donc à la fois accumulateur et propagateur.

Enfin, l'appareil végétatif d'autres champignons tels qu'*Armillaria mellea,* offre successivement, aux divers stades de son existence, des adaptations dominantes d'ordre différent : accumulatrices en premier lieu, propagatrices ensuite, offensives en dernier lieu.

On voit donc que loin de s'exclure, les différentes adaptations sont souvent simultanées, et on peut même dire que le concours de plusieurs d'entre elles

Digitized by Google

est toujours nécessaire à la constitution d'une forme spécialisée quelconque de l'appareil végétatif. Mais dans chacun des cas aussi, l'une des adaptations est prédominante et imprime à la formation son caractère saillant. Il me semble donc utile d'insister dans chaque cas particulier sur cette adaptation dominante, en caractérisant la forme étudiée par un des termes indiqués plus haut.

Il est remarquable de constater que ces diverses adaptations ne sont guère développées que dans les groupes supérieurs des Champignons, les Basidiomycètes et les Ascomycètes. Les adaptations accumulatrices assez caractérisées pour entrainer une modification dans la structure histologique, existent même exclusivement dans ces groupes; on rencontre aussi des formations de cette catégorie chez les Hyphomycètes, mais ce groupe artificiel ne comprenant que les formes conidiennes de Champignons appartenant aux deux ordres précédents, il n'y a pas lieu d'en faire spécialement mention.

Par contre, les adaptations protectrices sont assez générales et se retrouvent chez plusieurs types inférieurs de Champignons.

Les sclérotes protecteurs des Myxomycètes (2, p. 460) résultent de différenciations tout à fait analogues à celles qui donnent naissance aux spores dormantes des Algues. Ces adaptations se montrent aux différents stades de la vie de ces végétaux; ainsi, les microcystes sont la forme de repos des zoospores, les kystes à paroi dure (derbwandige Cysten, de Bary) sont la forme de repos du plasmode jeune, les sclérotes, celle du plasmode adulte. Le contenu cellulaire se modifie parfois, il y a production de glycogène; mais comme, d'une part, ces productions ne se développent que dans des circonstances défavorables à la nutrition et que, d'autre part, les phénomènes biologiques reprennent leurs cours normal lors du retour des conditions nécessaires au

Digitized by Google

développement, il convient de considérer ces diverses formes comme des stades de repos. La division du protoplasme dans les sclérotes est un phénomène secondaire représentant un complément d'enkystement, puisque les cellules ainsi isolées se réunissent de nouveau en plasmode au retour de l'humidité.

Les kystes des Chytridiacés, les chlamydospores des Mucorinés montrent que les modifications protectrices, qui ont toujours lieu dans des conditions biologiques défavorables, sont assez répandues chez les Champignons inférieurs. Des formations semblables, nombreuses et bien caractérisées, existent également chez les Ascomycètes et les Basidiomycètes ; toutefois, dans ces groupes, les modifications sont d'un ordre un peu différent. Tout en prenant une disposition qui lui permette de lutter efficacement contre les influences nuisibles, le mycélium conserve, en général, toute son activité vitale ; il ne se forme plus de corps végétatifs spéciaux, des kystes passant à l'état de vie latente. Ces agglomérations mycéliennes affectent, soit la forme de masses plus ou moins compactes (*Scleroderma, Polysaccum*), soit celle de cordons ; on peut citer comme exemples de Champignons présentant cette dernière disposition, beaucoup de Tubéracés, certains Cordyceps, les Hyménogastrés, quelques Lycoperdacés et de nombreux Agaricinés.

La formation de cordons propagateurs n'est pas non plus réalisée uniquement dans les deux ordres supérieurs. *Rhizopus nigricans*, par exemple, se propage avec une rapidité remarquable, grâce aux véritables stolons émis par son appareil végétatif. Mais ce n'est que chez les Ascomycètes (*Xylaria*) et les Basidiomycètes (*Phallus, Collybia platyphylla*) que ces adaptations arrivent à un haut degré de spécialisation.

L'accumulation des réserves nutritives est caractéristique du mycélium des Ascomycètes et des Basidiomycètes. S'il n'existe pas d'adaptations

Digitized by Google

accumulatrices proprement dites dans les groupes inférieurs, on peut en chercher la raison, soit dans la simplicité de la structure (Myxomycètes), qui ne permet guère d'adaptations spéciales, soit dans la vie absolument parasitaire propre aux Champignons inférieurs, qui leur assure une nourriture toujours abondante.

Il en est autrement pour les deux groupes qui vont nous occuper, les Basidiomycètes et les Ascomycètes. Chez un grand nombre de ces Champignons, il y a plutôt saprophytisme que parasitisme et, en général, les moyens de nutrition très directs que possèdent les espèces purement parasites des autres groupes leur font défaut. Aussi observe-t-on, dans leur cas, une différenciation bien plus grande de l'appareil végétatif; l'une des plus remarquables est la présence d'adaptations spéciales destinées à l'accumulation des matières nutritives.

La formation des sclérotes n'est pas ici un moyen de protection contre des circonstances vitales défavorables, car ils ne se produisent que dans des conditions particulièrement favorables à la nutrition. Il faut, au contraire, les considérer comme résultant de l'emmagasinement de matières nutritives par un végétal se développant dans un milieu riche en ces matières. Cette adaptation est la même que celle qui produit des tubercules ou des bulbes chez les plantes phanérogames. Chez les végétaux vraiment parasites, cette prévoyance n'existe jamais, à cause de la constante richesse du milieu nutritif; l'absence de sclérotes accumulateurs dans les formes franchement parasites des Champignons supérieurs, Ustilaginés et Urédinés, en fournit une excellente preuve. L'enkystement chez ces formes se produit toujours dans les cas de disette; il a un rôle purement protecteur.

Les sclérotes accumulateurs des Ascomycètes et des Basidiomycètes sont des amas de filaments mycéliens enchevêtrés, provenant de la différenciation

Digitized by Google

d'un mycélium primaire filamenteux. Ces formations sont douées d'une individualité bien définie; elles possèdent presque toujours une écorce et une masse interne (moelle) bien caractérisées. De plus, les hyphes qui les composent altèrent plus ou moins leurs caractères primitifs, en modifiant soit l'épaisseur de leur membrane et sa nature chimique, soit la composition de leur contenu protoplasmique. Ces deux ordres de modifications peuvent exister simultanément.

J'ai pu étudier différents types assez intéressants de modifications du mycélium chez les Basidiomycètes et les Ascomycètes. Ces types nouveaux permettent d'apprécier plus exactement les caractères généraux des adaptations que présente l'appareil végétatif de ces Champignons. Je vais donc passer en revue les divers stades de la différenciation du mycélium dans ces deux groupes, en tenant compte des données nouvelles que j'ai recueillies.

Je suis heureux de pouvoir témoigner à M. le professeur Léo Errera l'expression de ma profonde gratitude pour l'intérêt qu'il a bien voulu prendre à mes recherches, ainsi que pour les conseils et les indications qu'il m'a donnés.

J'ai également à adresser de vifs remerciements à MM. W. Carruthers, G. Murray, G. Massee, B.-D. Jackson, N. Patouillard, A. Giard, P. Hariot, V. Fayod, E. Holmes, E. Fischer et E. Marchal, pour les documents qu'ils ont bien voulu me communiquer.

Institut botanique
de l'Université de Bruxelles, décembre 1893,

CH. BOMMER.

Digitized by Google

SCLÉROTES

ET

CORDONS MYCÉLIENS

CHAPITRE PREMIER.

LES AGGLOMÉRATIONS MYCÉLIENNES DES BASIDIOMYCÈTES.

A. — CORDONS MYCÉLIENS.

Les filaments du mycélium primaire forment, chez beaucoup de Basidiomycètes, des groupements variés, soit en plaques, soit en cordons. Ces groupements sont souvent sous la dépendance immédiate des conditions de milieu. *Agaricus campestris*, par exemple, présentera, dans une même localité, des formes à mycélium filamenteux ordinaire et des formes à mycélium en cordons, si l'on rencontre à la fois dans cette localité des terrains compacts argileux et des terrains meubles sableux. Les cordons sont formés d'hyphes agglomérées en un feutrage assez serré, mais ne présentent pas la constitution d'un organe défini. On n'y trouve pas d'écorce ni de moelle, comme dans les cordons typiques. Il existe cependant une différenciation entre les éléments occupant le centre du cordon et ceux qui se trouvent à sa périphérie. Les premiers sont des hyphes minces à cellules très allongées, tandis que les derniers sont composés de cellules plus courtes et d'un diamètre beaucoup plus grand. Un grand nombre de Basidiomycètes forment ainsi des cordons ou des agglomérations de mycélium sans structure bien

Digitized by Google

définie (Lycoperdacés, Hyménogastrés, Clavariés, Agaricinés). Toutes ces adaptations sont protectrices.

Un degré plus avancé de différenciation se trouve réalisé dans les variétés spartoïdes des mycéliums primaires persistants (3, p. 200) qui représentent généralement des adaptations propagatrices. Le mycélium primaire peut être simplement persistant et assurer ainsi la conservation de l'espèce pendant les périodes de repos végétatif. Chez certains types, le mycélium persistant réalise un haut degré de différenciation; il prend la forme de cordons mycéliens ayant une structure définie et dont la présence est constante chez les espèces qui en sont pourvues. Il existe toujours une zone de tissu périphérique différencié ou écorce et une masse interne ou moelle. A vrai dire, cette différenciation a une tendance à se produire chaque fois que des hyphes mycéliennes se groupent en assez grand nombre; la zone externe assume alors plus spécialement un rôle protecteur, tandis que les éléments internes ont un volume plus grand et un contenu protoplasmique plus abondant.

Scleroderma Pers.

De même que beaucoup de Gastromycètes, les *Scleroderma* possèdent un mycélium en cordons (4, p. 32) très abondant, qui doit être rangé dans la catégorie des adaptations protectrices. Lorsqu'on dégage avec soin la base d'un de ces Champignons, on voit qu'elle est formée d'un véritable feutrage de cordons blancs généralement assez minces (150-500 μ), qui s'étend à plusieurs centimètres du carpophore (pl. III, fig. 1, 2, 3). Ce mycélium en cordons est plus ou moins abondant suivant les espèces, mais il ne fait jamais défaut.

Il n'existe pas de différenciation nette en écorce et en moelle. Le cordon est constitué en majeure partie par des hyphes à cellules assez larges et assez courtes, alignées régulièrement et parallèles au grand axe du cordon; elles mesurent 3-6 μ de diamètre et 35-60 μ de longueur. Ces hyphes sont étroitement soudées entre elles et confondent leurs parois un peu épaissies, en constituant un véritable pseudo-parenchyme; on y distingue un protoplasme granuleux pariétal peu abondant. On observe dans ces cellules une division très

Digitized by Google

active par des lames cellulosiques qui s'accroissent perpendiculairement à la membrane, ainsi que cela se produit chez certaines Algues, les *Cladophora* par exemple. Ces lames se développent progressivement, soit sur les petits côtés, soit sur les côtés longs de la membrane et finissent par diviser la cellule en deux parties. La nouvelle membrane peut aussi se développer sous forme d'anneau continu sur la surface interne de la membrane de la cellule mère. En général, on observe dans les cellules qui se divisent ainsi, des tractus de protoplasme en rapport avec la membrane naissante. Cette formation active de membranes finit par constituer un tissu dont les cellules sont disposées d'une manière très irrégulière, bien que conservant toujours leur grand axe parallèle à celui du cordon.

Au centre de la masse constituée par ces éléments, existent toujours des hyphes beaucoup plus larges (15-20 μ de diam.) et très longues, au nombre d'une dizaine, présentant des cloisons tantôt assez nombreuses (50 μ de long.), tantôt, au contraire, assez rares. Ces hyphes ont un protoplasme pariétal granuleux assez abondant, contenant toujours des cristaux d'oxalate de chaux de forme octaédrique.

Ainsi que je l'ai dit plus haut, il n'y a pas de différenciation en moelle et en écorce; toutefois, à la périphérie du cordon, les hyphes qui le constituent prennent un aspect particulier. Elles ne forment plus une sorte de tissu parenchymateux, mais deviennent indépendantes les unes des autres; leurs cellules terminales, plus larges et plus courtes, sont pourvues d'un protoplasme granuleux plus abondant. Enfin, les extrémités de ces hyphes se séparent souvent du cordon et semblent, par leur situation, remplir le rôle des poils absorbants des racines.

Les hyphes de la zone périphérique donnent naissance à des éléments très particuliers. Ce sont des filaments très minces, mesurant au plus 3 μ de largeur, se développant soit apicalement, soit latéralement sur les hyphes de la périphérie du cordon. Ces filaments ont des cloisons en boucles très caractéristiques (4, pl. V, fig. 2, 3) et leurs cellules sont fort longues. Ils sont mélangés en grand nombre aux hyphes de la couche périphérique et sont toujours libres; leur cellule terminale a un contenu granuleux et, en général, une forme assez irrégulière, l'extrémité en est renflée, effilée et flexueuse;

Digitized by Google

la membrane est amincie au sommet. Enfin, on remarque souvent que cette cellule est en contact intime avec des particules terreuses sur lesquelles elle semble se mouler. Cette série de caractères appartient vraisemblablement à un organe d'absorption.

Les cordons de *Scleroderma* se divisent en rameaux très nombreux et le développement de ces ramifications présente un certain intérêt. Quelques-unes des hyphes de la zone corticale se dirigent perpendiculairement à la surface du cordon; ces filaments minces se groupent en un cordon très ténu au début (10 μ), à cause du petit nombre d'hyphes dont il est formé. A mesure que s'allonge le jeune cordon, les hyphes superficielles du cordon dont il provient continuent à proliférer à la base et le font grossir peu à peu. La différenciation des éléments larges se fait ultérieurement.

Comme on le voit, les cordons protecteurs de *Scleroderma* ne possèdent pas une structure aussi définie que celle des cordons mycéliens propagateurs, car ceux-ci ont toujours une écorce et une moelle de structure différente. Ils sont cependant déjà fort différenciés et leurs caractères sont remarquablement fixes. La zone superficielle des cordons est caractérisée par l'indépendance réciproque des hyphes qui la composent et aussi par la présence d'éléments minces. La masse interne des tissus a une structure pseudo-parenchymateuse et possède des éléments profondément différenciés : les hyphes à grand diamètre. Celles-ci doivent remplir un rôle important dans l'économie générale du système, si l'on en juge par la constance de leur présence et par les caractères qu'elles présentent. Le contenu protoplasmique abondant de ces éléments et la présence de cristaux d'oxalate de chaux, c'est-à-dire de produits de désassimilation, indique qu'il existe déjà une division du travail physiologique nettement établie dans les tissus des cordons de *Scleroderma*.

Cyathus striatus Hoffm.

Ce Champignon possède un mycélium en cordons extrêmement abondant. Il se développe en colonies nombreuses dont tous les individus sont unis entre eux par un lacis de cordons s'étendant en tous sens dans le sol. Ces

Digitized by Google

cordons, de couleur brune, ont une apparence plus ou moins fibrillaire; ils sont assez minces (200-500 μ) et très ramifiés

La différenciation en écorce et en moelle est ici très nette (pl. I, fig. 3). Le cordon possède une zone périphérique mesurant de 50-100 μ d'épaisseur, constituée par des hyphes brunes, larges de 2-3 μ, à membrane épaisse, ne présentant pas de division en cellules; elles sont disposées longitudinalement et enchevêtrées; leur extrémité antérieure est un peu renflée. Ces hyphes ne se ramifient pas, mais se soudent parfois entre elles; leur contour est plus ou moins flexueux. Elles présentent souvent des dilatations et des parties coudées, où le filament s'élargit un peu en prenant une forme anguleuse. On trouve également dans l'écorce, des hyphes hyalines à contenu granuleux et à unions en boucles, abondamment ramifiées, mesurant 1,5-2 μ de diamètre; leur membrane est extrêmement ténue. Les hyphes hyalines minces sont intimement mélangées aux hyphes brunes à membrane épaisse. Une observation attentive permet de suivre tous les stades de la transformation des hyphes hyalines en hyphes brunes, par l'épaississement graduel de la membrane, la disparition du protoplasme et des cloisons; en même temps les hyphes hyalines s'accroissent énormément en longueur.

La moelle est formée par deux espèces d'hyphes disposées parallèlement au grand axe du cordon, les unes larges, mesurant en moyenne 15 μ de diamètre, les autres, 3-7 μ seulement. Elles sont indépendantes les unes des autres, car les parois contiguës de deux cellules voisines sont parfaitement distinctes; très serrées les unes contre les autres, leurs parois ne laissent presque pas de vides entre elles; les membranes sont peu épaissies.

Les éléments les plus minces n'affectent pas une disposition aussi régulière que les éléments larges. Les hyphes larges sont divisées en cellules longues par des cloisons transversales, généralement fort épaisses; elles ont un protoplasme granuleux et contiennent toujours des cristaux octaédriques d'oxalate de chaux. La difficulté d'obtenir des coupes longitudinales suffisamment minces ne m'a pas permis jusqu'ici de définir la structure exacte des éléments les plus minces de la moelle, mais on peut déduire de l'analogie de structure des différents cordons mycéliens que ces éléments sont semblables aux hyphes minces de l'écorce.

Digitized by Google

La moelle renferme encore de nombreuses hyphes très larges (15-20 μ), à contour flexueux de longueur assez inégale, à cloisons rares, à extrémité renflée en massue, à contenu brun très réfringent, soluble dans l'éther et le chloroforme. Ces hyphes présentent les caractères que Van Bambeke attribue aux hyphes vasculaires (5). Elles sont constantes dans les cordons de *Cyathus* et leur nombre prouve qu'il faut leur attribuer un rôle important. Le glycogène ne se rencontre ni dans les hyphes vasculaires, ni dans le reste des tissus.

Les cordons mycéliens de *Cyathus striatus* atteignent un haut degré de différenciation. Les hyphes corticales présentent une division du travail physiologique très nette, les unes assumant uniquement le rôle d'organes de protection et perdant complètement le caractère de tissu vivant, les autres conservant, au contraire, ce caractère dans son intégrité et fonctionnant comme organes d'absorption.

Il y a donc, dans la moelle, trois sortes d'éléments ayant des fonctions distinctes : les éléments minces, formant la partie active des tissus, les hyphes vasculaires localisant des réserves, de nature grasse probablement, et les éléments larges servant vraisemblablement à localiser les produits d'excrétion, comme le prouvent les cristaux d'oxalate de chaux qui s'y rencontrent d'une manière constante.

Collybia platyphylla Fr.

Cette espèce possède des cordons propagateurs qui ont été décrits par Fayod de la manière suivante (2, p. 201) : « L'écorce de ces cordons est constituée par de fines hyphes densément entrelacées et parallèles à l'axe de ceux-ci. Quelques-unes d'entre elles émergent sous forme de poils à la surface et y forment un chevelu court et rare.

» Dans la moelle, à l'exception de quelques éléments qui ressemblent à ceux de l'écorce, les hyphes sont en général beaucoup plus grosses, ondulées et à membrane épaissie. Leurs cloisons présentent souvent des ponctuations remarquables. Quant aux méats intercellulaires, ils sont remplis par un mucilage incolore. »

Digitized by Google

En ce qui concerne les éléments de la moelle, l'opinion exprimée par Fayod me semble discutable. En effet, l'examen d'une coupe transversale (pl. I, fig. 1), nous montre de larges cavités arrondies, mesurant 10-15 μ, qui sont les lumières des hyphes larges. Les membranes de ces hyphes sont confluentes, très fortement épaissies et se fusionnent entre elles. Dans l'épaisseur de ces membranes mitoyennes, on distingue nettement les lumières plus petites (1, 5-2 μ) des éléments minces. On peut se convaincre que ce sont des éléments de cette nature, en observant sur les coupes transversales des tractus de ces hyphes minces perpendiculaires à la surface du cordon; les hyphes, par conséquent, se présentent latéralement. Or, le diamètre de ces hyphes minces correspond exactement à celui des lumières comprises dans l'épaisseur des parois des grosses hyphes caractéristiques de la moelle.

Il ne me paraît pas juste de dire que les méats intercellulaires sont remplis par un mucilage. Les grosses hyphes, par l'épaississement de leur membrane, semblent constituer un mode d'emmagasinement de réserves. Cet épaississement est considérable et finit par englober les petites hyphes corticales qui se trouvent ainsi prises dans l'épaisseur des parois des grosses hyphes. Aucun caractère défini ne permet d'observer la paroi externe des membranes des grosses hyphes limitant la cavité des méats, comme cela devrait être dans l'hypothèse de Fayod. On est donc autorisé à dire qu'il y a coalescence et union intime entre les membranes épaissies des hyphes contiguës.

Je n'ai pu, malheureusement, me procurer des exemplaires me permettant de m'assurer si les grosses hyphes renferment du glycogène; Fayod n'en parle pas dans sa description. Dans tous les cas, les parois épaissies doivent contenir déjà des réserves importantes. L'écorce est formée, d'après Fayod, par les hyphes minces; toutefois, il faut remarquer qu'elles ne sont pas toutes disposées parallèlement au grand axe du cordon; une grande partie d'entre elles sont disposées perpendiculairement aux autres et constituent ainsi un tissu cortical de grande résistance; les tractus que l'écorce envoie à l'intérieur de la moelle, perpendiculairement à la surface du cordon, montrent une allure semblable. Comme les cordons mycéliens proviennent du

Digitized by Google

groupement d'éléments primitivement parallèles entre eux, cet enchevêtrement des hyphes montre une différenciation avancée car, dans la plupart des cordons, les éléments de la moelle conservent la disposition primitive, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles au grand axe de l'organe.

On trouve, dans la moelle des cordons, un troisième élément beaucoup plus rare que les autres, constitué par de grosses hyphes flexueuses (7-15 μ de largeur), à contour assez irrégulier, présentant des renflements et des étranglements; leur contenu est dense, granuleux, très réfringent, de couleur brunâtre et soluble dans l'alcool et l'éther. Fayod (3, p. 201) signale encore la présence de ces éléments dans les cordons mycéliens d'autres Agaricinés : *Mycena rhaeborhiza* Lasch., *Agaricus arvensis* Schaeff., *Pholiota praecox* Pers. Ils possèdent tous les caractères des hyphes vasculaires décrites par Van Bambeke (5, 6) chez un grand nombre de Champignons du même groupe.

Quelques-unes des hyphes de la couche superficielle de l'écorce se dirigent perpendiculairement à sa surface et se développent dans la terre environnant le cordon. Elles emprisonnent ainsi toutes espèces de fragments, minéraux ou organiques, qui constituent un véritable épiderme à l'écorce. Cette couche superficielle est assez épaisse et les hyphes y sont assez abondantes pour lui donner une grande cohérence; il est probable qu'elles remplissent le rôle d'organes d'absorption.

Les cordons de *Collybia platyphylla* mesurent environ 2 millimètres de diamètre; ils sont fort longs et constituent un organe végétatif aussi important par son développement en volume que par la spécialisation de ses tissus. Ils sont assez abondants et se rassemblent au nombre de trois à quatre pour donner naissance aux carpophores. Patouillard a constaté, à Fontenay-sous-Bois, où cette espèce est abondante, une relation constante entre les cordons mycéliens, les racines des ronces ou les brindilles, et cela à une distance très considérable du carpophore. Cette observation semble indiquer que l'appareil végétatif de *Collybia platyphylla* est constitué primitivement par un mycélium filamenteux qui se différencie ultérieurement en cordons.

Digitized by Google

Phallus impudicus Linn.

Nous devons à de Bary (2, p. 24) une bonne description des cordons propagateurs de *Phallus impudicus*. Ces cordons sont nettement différenciés en écorce et en moelle; l'écorce est constituée par une couche externe de tissu pseudo-parenchymateux formé de cellules allongées à parois minces, mesurant généralement 10μ de large, qui sont disposées perpendiculairement au grand axe du cordon (pl. I, fig. 2). Sous cette couche se trouve une zone où des éléments minces forment un tissu compact; ils sont disposés parallèlement au grand axe du cordon, mesurent à peu près 3μ de large et s'enchevêtrent de manière à former un tissu feutré. Grâce à cette disposition particulière des hyphes, le revêtement cortical des cordons de *Phallus* offre une très grande résistance; l'assemblage des éléments internes disposés longitudinalement et de la zone superficielle à éléments transversaux, rappelle assez exactement l'ensemble rigide que formerait un faisceau de baguettes entouré d'une corde serrée et à tours contigus. Les deux couches corticales et surtout la plus interne poussent des prolongements vers l'intérieur de la moelle; dans ce cas, la disposition des hyphes minces est toujours perpendiculaire au grand axe du cordon.

Enfin, dans la zone de filaments minces, on distingue les grosses hyphes vasculaires à contenu réfringent, signalées déjà dans les cordons de *Collybia platyphylla;* elles paraissent seulement un peu plus rares ici. La séparation entre la moelle et la couche interne de l'écorce est peu définie; ces deux couches se pénètrent mutuellement. La moelle est constituée presque uniquement par de grosses hyphes qui se croisent en tous sens; elles mesurent 10-15μ de large et ne sont mélangées qu'à de très rares hyphes minces. Leurs parois confluentes sont très épaissies, et le tissu forme ainsi un véritable pseudo-parenchyme dans lequel il n'est plus possible de distinguer la paroi propre de chaque hyphe. Ces parois épaissies ont été interprétées par de Bary comme une substance intercellulaire mucilagineuse dans laquelle les hyphes seraient plongées, mais l'absence de limitation externe des parois des hyphes rend cette définition moins vraisemblable que l'épaississement des hyphes. De plus, ici comme chez *Collybia platyphylla,* cette substance

Digitized by Google

montre une résistance bien supérieure à celle qu'offrirait un simple mucilage.

Lorsqu'on traite une coupe par le réactif du glycogène (7, § VI), on voit que cette substance existe en abondance dans la zone corticale, à la partie la plus interne de cette zone; les assises externes de l'écorce en sont totalement dépourvues (8, p. 33). On constate également sa présence dans la zone sous-jacente des hyphes minces, mais en moins grande abondance; les grosses hyphes de la moelle n'en contiennent pas du tout. Les cordons de *Phallus* possèdent donc des réserves de deux sortes : glycogéniques dans les cellules de l'écorce et cellulosiques dans celles de la moelle.

La structure des cordons chez *Phallus*, présente une analogie frappante avec celle des cordons de *Collybia platyphylla*. Ils ont chacun une écorce caractérisée par les hyphes minces filamenteuses; chez *Phallus*, on trouve de plus une couche superficielle formée d'éléments larges à parois minces. La moelle présente une constitution également semblable; elle est formée d'éléments larges, seulement, les éléments minces qui sont encore mélangés en grande proportion chez *Collybia platyphylla*, ont presque disparu chez *Phallus*. Dans les deux cas, les parois des grosses hyphes de la moelle s'épaississent au point de se confondre. Pourtant, cette confusion est moins complète chez *Collybia platyphylla* et l'on peut parfois apercevoir, plus ou moins, la limite des membranes des hyphes contiguës. Enfin, on rencontre dans les deux espèces des hyphes vasculaires. Il est donc évident que ces deux productions sont dues à des différenciations qui ont lieu dans le même sens; mais, chez *Phallus*, la différenciation est poussée beaucoup plus loin. On peut en trouver une autre preuve encore, dans la disposition des éléments de l'écorce et de la moelle du cordon, qui sont enchevêtrés en tous sens.

Les cordons de *Phallus* ont, comme on le sait, une grande longueur (2, p. 24); il est facile d'en obtenir des fragments mesurant plus de 1 mètre et, comme ces cordons se ramifient beaucoup et sont, somme toute, assez fragiles, on ne peut guère s'assurer de leur longueur réelle qui est certainement bien plus considérable. En examinant ces cordons *in situ*, dans les forêts où on les observe le plus facilement, on voit qu'ils se présentent sous deux aspects bien différents. Les gros cordons ne recherchent pas un milieu nutritif; ils cheminent dans le sol même, où ils sont à l'abri des variations

Digitized by Google

des conditions de milieu qui pourraient leur être défavorables et émettent des ramifications qui se rendent dans la couche superficielle d'humus et de feuilles mortes. De ces cordons latéraux, les uns se divisent peu et ne tardent pas à donner naissance à de jeunes carpophores; les autres se ramifient abondamment, s'amincissent peu à peu et se résolvent bientôt en pinceaux de fins filaments qui se dépouillent insensiblement de la structure caractéristique des cordons. Il y a donc ici une division du travail physiologique. Les ramifications abondantes à extrémités filamenteuses prouvent, par cette modification et par leur répartition dans les couches les plus nutritives du sol, le rôle assimilateur qui leur est propre. Les autres, se mettant à l'abri des intempéries par leur situation profonde, parcourant dans le sol de très longs trajets et possédant une structure très complexe, ont tous les caractères d'organes persistants et concourent probablement d'une manière efficace à la propagation de l'espèce. Leur assimilation étant très faible, on conçoit la nécessité de la présence dans leurs tissus de réserves nutritives destinées à leur nutrition lorsque des circonstances défavorables, accidentelles ou périodiques, les privent des ressources alimentaires fournies d'ordinaire par les rameaux assimilateurs. L'observation démontre que ces cordons situés profondément, à assimilation presque nulle, remplissent, chez *Phallus*, un rôle analogue à celui des stolons chez les plantes supérieures. On remarque, en effet, que dans les endroits où les *Phallus* peuvent se développer sans entraves, c'est-à-dire là où ils trouvent une nourriture abondante et des espaces non envahis par la végétation herbacée, ils affectent la disposition en colonies. Ces colonies sont extrêmement caractéristiques dans les bois de haute futaie, dépourvus de végétation basse. On peut y observer des groupements qui, sur un espace de quelques mètres carrés, contiennent à la fois jusqu'à trente carpophores parvenus simultanément à maturité. Le croquis, planche III, figure 4, est le levé exact d'une de ces colonies que j'ai pu observer cette année dans la forêt de Soignes, où *Phallus* présente souvent cette disposition. Ces colonies s'accroissent tous les ans, preuve évidente du rôle propagateur des gros cordons; elles persistent au même endroit jusqu'à ce qu'une cause accidentelle vienne détruire le lacis de cordons que contient le sol. On peut, en tous points, comparer l'appareil des

Digitized by Google

Phallus aux rhizomes traçants de beaucoup de plantes tant phanérogames que cryptogames : *Equisetum, Pteris, Lolium,* etc. Ces rhizomes sont aussi des axes végétants emmagasinant des réserves et produisant tous les ans des tiges fertiles et des appareils d'absorption ; ils demeurent dans le sol d'une manière permanente et s'accroissent pour ainsi dire indéfiniment. Ils sont, comme les cordons de *Phallus,* situés profondément, afin de pouvoir résister autant que possible aux modifications du milieu extérieur. L'analogie de structure existant entre les cordons de *Phallus* et ceux de *Collybia platyphylla,* permet d'assigner à ces derniers un rôle analogue dans le cycle vital de cette espèce.

B. — AGGLOMÉRATIONS MYCÉLIENNES COMPACTES.

Polysaccum De Cand.

Ce type de Gastromycète se rattache aux *Scleroderma* (10) et présente certaines particularités de structure qui peuvent s'expliquer par l'étude des formations mycéliennes dans ce dernier genre. Les *Polysaccum* sont caractérisés par la division du péridium en péridioles, au moyen de cloisons qui isolent les unes des autres de petites parties de la glèbe. Les *Scleroderma* présentent déjà cette division de la glèbe en petites masses isolées par la trame du péridium, mais celles-ci disparaissent lors de la maturité de la glèbe, tandis qu'elles persistent chez *Polysaccum.*

Les *Polysaccum* (9) croissent généralement dans les endroits sableux; certaines espèces ont une base stipitiforme qui s'enfonce profondément dans le sol. Chez *P. crassipes* D. C., cette production atteint 10-15 centimètres de longueur et 3-5 centimètres d'épaisseur (pl. III, fig. 5, 6); chez *P. turgidum* Fr., elle a les mêmes dimensions et se divise en branches assez grosses, semblables à des racines.

J'ai pu examiner les exemplaires de *P. crassipes* de l'herbier de Persoon et j'ai constaté que la partie stipitiforme du carpophore de cette espèce présente la plus grande analogie avec les productions mycéliennes protectrices des *Scleroderma.* La partie inférieure de la base stipitiforme est composée, jusqu'à un tiers de sa hauteur totale, d'un feutrage extrêmement dense, formé

Digitized by Google

de filaments mycéliens qui ont emprisonné de nombreuses particules du sol dans lequel le champignon s'est développé ; des racines y sont également englobées. Il y a là une analogie complète avec le feutrage qui s'étend tout autour des carpophores de *Scleroderma*. Pourtant, ici, cette formation prend un caractère plus marqué d'individualité.

Les deux tiers supérieurs de la base stipitiforme sont constitués par un tissu compact, creusé intérieurement de grandes lacunes. Cette partie a un aspect très variable; sa forme est tantôt assez exactement cylindrique; d'autres fois elle est extrêmement irrégulière. Les éléments de ce tissu ressemblent, autant que j'ai pu en juger, à ceux de la partie inférieure, constituée par le mycélium. On sait que chez *Scleroderma* les cordons mycéliens forment, par leur soudure, une masse de tissu très compact, à lacunes irrégulières, constituant chez certains types, tels que *S. verrucosum* Bull., une base stipitiforme immergée dans le sol. La même origine paraît devoir être attribuée aux formations analogues des *Polysaccum*, qui semblent être dues à une différenciation du mycélium. Le rapprochement est d'ailleurs pleinement autorisé, si l'on se rappelle les ressemblances profondes existant entre ces deux formes [1].

Le développement si grand que présentent les adaptations protectrices chez *Polysaccum*, et le groupement plus dense du mycélium proprement dit, sont en rapport avec la nature de l'habitat des espèces de ce genre. Ce mycélium groupé est situé profondément pour échapper à l'influence pernicieuse de la sécheresse, qui est extrême dans les terrains sableux qu'habitent exclusivement les *Polysaccum*.

[1] L. et C. Tulasne ont donné la même interprétation de la nature morphologique de la base stipitiforme de *P. crassipes* (9).

[Au cours de l'impression, M. Patouillard a eu l'obligeance de m'envoyer un bel échantillon frais de *P. crassipes*. Dans cet exemplaire, la substance formant la base stipitiforme est compacte, dépourvue de lacunes; son tissu, homogène, est formé d'un feutrage très dense de longues hyphes larges et étroites mélangées, semblables à celles qui constituent les cordons de *Scleroderma*. La superficie du pseudo-stipe est recouverte dans sa partie inférieure d'un feutrage assez lâche d'hyphes très minces à unions en boucles, rappelant exactement les éléments superficiels des cordons de *Scleroderma* ; dans la moitié supérieure du pseudo-stipe, ces éléments, désséchés et agglomérés, forment une sorte de revêtement cortical se détachant par plaques. Il existe donc une espèce d'écorce, mais elle ne peut être considérée comme un tissu spécial, à cause de sa faible différenciation et de son étendue restreinte.] (Note ajoutée pendant l'impression.)

Digitized by Google

Polyporus tumulosus Cooke.

Polyporus tumulosus d'Australie forme, par l'enchevêtrement de ses hyphes mycéliennes, des amas compacts pesant jusqu'à 50 kilogrammes (11). Ces concrétions mycéliennes (pl. III, fig. 7, 8) renferment des particules terreuses en plus ou moins grande proportion; elles sont dépourvues d'écorce; les hyphes qui les constituent ont une membrane épaissie, souvent tuberculeuse, et la lumière de la cavité cellulaire peut disparaître.

Ces formations s'étendent parfois sur des acres entiers, et peuvent opposer un obstacle à la culture.

Polyporus lucidus Fr.

On observe parfois, chez *Polyporus lucidus,* la production de formations mycéliennes protectrices très particulières. Le stipe se continue avec une masse assez considérable, située profondément dans le sol, recouverte d'une écorce de couleur brune (pl. III, fig. 9, 10) semblable à celle du carpophore. La surface de ce corps est tout incrustée de fragments de pierres et de racines, qui ont été englobés lors de sa formation. Si l'on pratique une coupe à travers une de ces masses, on trouve un tissu formé d'hyphes filamenteuses fortement mélangées de particules terreuses. Souvent ces hyphes sont groupées plus exclusivement à la périphérie et forment alors une sorte de tissu presque totalement dépourvu de particules terreuses. Ces masses sont donc constituées par des agrégations de mycélium à peine différencié qui se sont recouvertes d'une écorce, et affectent des formes très irrégulières. Elles sont tantôt verticalement enfoncées dans le sol, tantôt, au contraire, horizontalement; leur surface est mamelonnée, irrégulière, et elles se divisent parfois en gros rameaux. Ces formations paraissent être pérennantes et donner naissance à des carpophores pendant plusieurs années. Un des exemplaires (fig. 10) que j'ai récoltés dans le bois de Vincennes, au mois de février, était enfoui à 20 centimètres de profondeur dans le sol sableux et très léger; il portait la cicatrice de l'attache d'un carpophore qui s'était développé l'année précédente et gisait sur le sol, séparé de sa base. Cette concrétion

Digitized by Google

mycélienne était parfaitement saine et un tissu cicatriciel s'était développé au point d'attache du stipe.

Dans le voisinage de ces corps, j'ai trouvé, en fouillant le sol, de petits amas compacts, mesurant 5-6 centimètres de diamètre, constitués par un mycélium de même nature et retenant des particules de terre. Il est possible que ce soit là le début de la formation. Je ne puis affirmer que la présence de ces concrétions soit constante chez *P. lucidus;* dans tous les cas, elles présentent une certaine analogie avec les formations analogues des *Polysaccum*, dues également au groupement du mycélium. Il y aurait ici une différenciation plus avancée, la constitution d'une écorce. Il serait intéressant de vérifier si ces formations sont fréquentes chez *P. lucidus* et si, comme je le pense, elles sont en rapport avec la nature du sol dans lequel se développe le champignon. J'avais fait part de l'existence de ces productions à M. le professeur Bertrand, de la Faculté des sciences de Lille; il a bien voulu examiner les exemplaires d'une station de ces Polypores, aux environs d'Amiens. Dans cette localité, *P. lucidus* ne produisait pas de base développée; il faut probablement en rechercher la cause dans la nature du terrain, qui était très compact.

Chez *P. lucidus,* comme chez *Polysaccum*, la raison du groupement du mycélium semble être surtout une précaution prise contre le dessèchement; la profondeur relativement considérable où se fait ce groupement est manifestement due à la même cause. L'écorce qui revêt les concrétions mycéliennes de *P. lucidus* rend plus efficace encore cette adaptation; on sait, en effet, que les Champignons croissant dans les régions où l'humidité du sol est réduite à une proportion extrêmement faible, les steppes et les déserts, possèdent un mycélium en cordons très épais, très compact et s'enfonçant profondément dans le sable. C'est ce que l'on observe chez *Montagnites* (3, p. 390) qui croît dans les déserts du nord de l'Afrique, et dans les parties très sèches de l'Europe méridionale et du Texas.

On pourrait être tenté de rapporter ces formations protectrices aux pseudorhizes, qui sont assez fréquentes chez les Hyménomycètes et dont *Pholiota radicosa* Bull. nous fournit un bon exemple. Ce sont de gros cordons radiciformes partant de la base du carpophore et atteignant souvent une longueur assez grande (10-12 centimètres chez *Pholiota radicosa*). Fayod (3, p. 214)

Digitized by Google

a décrit le mode de développement de ces corps chez *Collybia radicata :* « Ils prennent naissance à la base des jeunes carpophores qui se sont développés à une certaine profondeur dans le sol et les élèvent passivement à la surface, en maintenant, par la continuité de leurs tissus, ces carpophores en relation avec leur mycélium qui doit continuer à assurer leur croissance. » Ce sont donc des éléments mycéliens de nature secondaire, c'est-à-dire produits par le carpophore.

Les concrétions mycéliennes de *P. lucidus* ont une origine entièrement différente. En premier lieu, la disposition mamelonnée et la division en rameaux de ces corps semblent indiquer qu'ils sont doués d'une croissance propre; ensuite, ils sont pérennants, puisqu'on les retrouve avec tous les caractères de tissus bien vivants, après la longue période de repos hivernal et après qu'ils ont porté des carpophores l'année précédente. Enfin, leur caractère de formations isolées et individualisées est également contraire à l'hypothèse de leur nature pseudorhizoïde. L'absence complète de conidies empêche d'autre part de rapprocher ces productions des formes ptychogastériennes du même Polypore qui ont été décrites par Patouillard (12).

C. — SCLÉROTES.

Collybia tuberosa Bull.

Le sclérote accumulateur de ce Champignon a été décrit par Fayod (3, p. 206) qui le regarde avec raison comme une formation établissant une transition morphologique entre les cordons mycéliens et les vrais sclérotes. Il est piriforme, d'un faible volume (3-8 millimètres de longueur) et présente un point végétatif situé toujours à l'extrémité la plus étroite. Les éléments dont il est formé sont également groupés en un certain ordre que Fayod compare à celui des poils d'un pinceau dont la pointe représenterait le point végétatif du sclérote.

Une coupe transversale montre la structure suivante. A la périphérie sont groupés des éléments filamenteux fort minces, mesurant 2-3 μ de diamètre; ces hyphes sont étroitement unies entre elles et forment une sorte de

Digitized by Google

pseudoparenchyme, leurs membranes sont sclérotisées et constituent ainsi un épiderme résistant, mesurant environ 20 μ d'épaisseur. On trouve ensuite une seconde couche, composée d'hyphes semblables, mais à membranes non modifiées, de 100 μ de largeur à peu près, dont les éléments se transforment insensiblement en hyphes longues. Ces dernières, qui mesurent en général 20 μ de diamètre, constituent la moelle du sclérote et sont mélangées à un petit nombre d'éléments moins larges. Ces grandes hyphes ont une membrane mince et forment un tissu très serré, sans cependant confondre leurs membranes, qui restent parfaitement indépendantes les unes des autres; il existe même chez les sclérotes adultes des méats intercellulaires, extrêmement petits, il est vrai. Je n'ai pu y retrouver la substance gélatineuse intercellulaire signalée par Fayod. Sur des coupes faites dans des sclérotes en germination, j'ai constaté la présence d'hyphes ramifiées, à contenu très réfringent et à contour très irrégulier, contrastant nettement par leur forme et par leur contenu cellulaire avec les hyphes de la moelle où elles étaient plongées. On ne peut se défendre de les comparer aux hyphes vasculaires des cordons mycéliens. Si cette analogie se confirme, il y aura là certainement un rapport de plus entre les formations sclérotiques de *Collybia tuberosa* et les cordons mycéliens, car aucun sclérote ne contient des éléments semblables. Les grandes hyphes de la moelle renferment un protoplasme granuleux assez abondant et de nombreuses gouttelettes d'huile; on y trouve aussi, et souvent en grande quantité, des cristaux d'oxalate de chaux.

Collybia cirrhata Pers.

C'est à cette espèce qu'il faut attribuer *Sclerotium fungorum* (accumulateur), dont la dimension est d'environ 5 millimètres de diamètre (pl. I, fig. 4, 5, 6). Fayod décrit (3, p. 210) comme suit, sa structure histologique : « Il possède une écorce fort épaisse, composée des grosses cellules mentionnées plus haut, et une moelle hétéromorphe, formée de grosses cellules isodiamétriques mélangées à des hyphes typiques (fig. 5), une structure, en somme, fort semblable à celle du bulbe des Amanites connues actuellement. » Cette structure rappelle encore le type général des cordons mycéliens, et ce

rapprochement semble d'autant plus justifié que, d'après le même auteur, le sclérote peut produire des cordons mycéliens différenciés (fig. 6). « J'ai trouvé, dit-il, le *Collybia cirrhata* Pers. lié au *Sclerotium fungorum* au moyen d'un cordon mycélique de 0,5 à 2 centimètres de long, qui devait peut-être sa formation à ce que les sclérotes étaient ensevelis dans la terre. Ce cordon était composé de fins hyphés très densement entrelacés au centre, où ils formaient comme un axe distinct, et très lâches à la périphérie. »

Il faut cependant observer que les gros éléments de la moelle sont ici non plus des hyphes, mais des cellules isodiamétriques; c'est là un progrès évident dans la différenciation histologique.

Coprinus stercorarius Fr.

Les travaux de Brefeld (13, pl. II, fig. 7) ont bien fait connaître le sclérote accumulateur de ce Champignon. Il présente un haut degré de différenciation et comprend une moelle et une écorce. Celle-ci est formée de deux couches : l'externe est composée de grandes cellules isodiamétriques à membranes sclérotisées formant un pseudo-parenchyme; l'interne est constituée par des éléments analogues, mais beaucoup plus petits. La moelle est formée par un tissu absolument homogène, pseudo-parenchymateux, composé aussi d'hyphes très larges à membrane mince et enchevêtrées en tous sens. On retrouve dans ce sclérote, bien que très profondément modifié, le type de différenciation des cordons mycéliens : une écorce formée de deux couches, la plus interne composée d'éléments très petits, enfin une moelle à éléments allongés formant un tissu compact.

Typhula Pers.

Le sclérote acumulateur de *Typhula* (13, pl. VIII, fig. 3) possède une structure plus simple que celle des sclérotes accumulateurs précédents. Il y a encore une écorce, mais elle est formée par la différenciation, très grande, il est vrai, d'éléments de la moelle; elle n'est pas constituée par une zone de tissu spécial et ne comporte qu'une assise de cellules. La moelle est un tissu homogène d'hyphes flexueuses.

Digitized by Google

Collybia racemosa Pers.

Enfin, *Collybia racemosa* nous montre un sclérote accumulateur (3, p. 208) à structure histologique à la fois plus simple et plus spécialisée (pl. I, fig. 7, 8, 9). Ici, plus d'écorce formant, comme dans les cordons, une couche importante de tissu. Le sclérote est constitué tout entier par un tissu homogène formé d'hyphes flexueuses assez réfringentes, souvent ramifiées, ne présentant pas de division en cellules et mesurant 3-5 μ de diamètre. Ces hyphes sont tout à fait indépendantes les unes des autres et sont lâchement enchevêtrées en formant un feutrage dans les interstices duquel se trouvent de très nombreux cristaux octaédriques d'oxalate de chaux, mesurant 3-20 μ de longueur. Ces sclérotes sont revêtus d'une écorce très mince (20 μ) formée par la sclérotisation des hyphes les plus superficielles et non par une zone différenciée comme chez les sclérotes que nous avons examinés jusqu'ici.

Armillaria mellea Vahl.

Les différenciations si remarquables du mycélium de ce Champignon sont rangées généralement dans la catégorie des cordons mycéliens. Brefeld (13, p. 136) a démontré la fausseté de cette attribution par ses belles recherches sur le développement de l'appareil végétatif d'*Armillaria mellea*.

Il a établi, en effet, que le mycélium qui se développe par la germination de la spore produit de petits sclérotes accumulateurs (13, pl. X, fig. 1-3) par un processus analogue à celui qui donne naissance aux sclérotes bien caractérisés de *Coprinus stercorarius*. Ces sclérotes ont une structure pseudo-parenchymateuse présentant la plus grande analogie avec celle du sclérote de *Coprinus stercorarius*. Ils peuvent demeurer à ce stade de sclérote ordinaire, s'accroître par toute leur surface et constituer des sclérotes massifs d'un développement assez considérable; mais, le plus souvent, on voit bientôt se former un point de croissance active, un véritable point végétatif. Le sclérote s'accroit donc en formant une sorte de tige flexueuse constituant le premier état des rhizomorphes; son accroissement est assuré par les proliférations filamenteuses de ses hyphes superficielles qui remplissent le rôle de poils absorbants et que l'on rencontre toujours sur les jeunes rameaux

Digitized by Google

rhizomorphes. Il se constitue ainsi une véritable écorce formée d'éléments filamenteux, les uns enchevêtrés et appliqués sur le rhizomorphe, les autres se dirigeant perpendiculairement à sa surface. Ces poils absorbants disparaissent par suite du développement du rhizomorphe et le tissu superficiel, sclérotisant ses éléments, se transforme en une écorce semblable à celle des sclérotes. En même temps, l'accroissement du cordon se faisant surtout à la périphérie, il se produit une cavité centrale. Une prolifération très active des hyphes de la moelle bordant cette cavité, qui va s'agrandissant, produit des hyphes filamenteuses qui ne tardent pas à la remplir complètement d'une moelle secondaire.

Ce développement démontre quel haut degré de différenciation peuvent atteindre les sclérotes (13, p. 167), et fournit un bel exemple de la puissance des facultés adaptatives de l'appareil végétatif des Champignons.

Les adaptations de seconde formation du mycélium d'*Armillaria mellea* sont encore d'une plasticité remarquable et peuvent, à leur tour, donner naissance à des adaptations de troisième ordre. Dans son travail sur les rhizomorphes (20, pl. I, fig. 4, 5), Hartig a montré comment des cordons mycéliens de la variété *subcorticalis* sont susceptibles de se transformer en lames minces et larges qui forment souvent de véritables plaques; les rhizomorphes peuvent aussi se transformer en sclérotes compacts qui sont donc des sclérotes dus à trois séries consécutives d'adaptations.

Massee a observé sous l'écorce d'un vieux *Robinia pseudo-acacia,* à peu près au niveau du sol, un sclérote massif mesurant 4 à 5 centimètres d'épaisseur et 10 centimètres de largeur (pl. III, fig. 11). On distinguait parfaitement, à la partie inférieure, les rhizomorphes épaissis qui avaient formé le sclérote. La substance compacte et blanche avait la même consistance que le sclérote de *Polyporus umbellatus;* elle était recouverte, comme ce dernier, par une écorce noire. Sur le sclérote s'étaient développés un certain nombre de carpophores normaux.

Les rhizomorphes de la variété *subterranea* remplissent le rôle de propagateurs; Brefeld les assimile à des stolons (13, p. 153). On connait, en effet, la rapidité de leur formation dans le sol et le développement considérable dont ils sont susceptibles. Les rhizomorphes de la variété *subcorticalis* sont des adaptations offensives.

Digitized by Google

La moelle secondaire est constituée, comme on vient de le voir, par des proliférations des cellules de la moelle primaire; elle a l'aspect d'un feutrage composé de filaments minces mesurant en moyenne 2 μ d'épaisseur. L'examen attentif de quelques exemplaires de *Rhizomorpha subterranea* m'a démontré que ce tissu renferme encore d'autres éléments. Ce sont, d'une part, de nombreuses hyphes vasculaires admirablement caractérisées et de très grandes dimensions (20-30 μ de diamètre) parcourant la moelle parallèlement au grand axe du rhizomorphe; d'autre part, la moelle renferme un grand nombre d'hyphes larges (10-15 μ de diamètre), disposées longitudinalement dans le rhizomorphe. Elles ont des cloisons plus ou moins espacées; dans les plus âgées, c'est-à-dire dans les plus longues, les cloisons sont distantes de 300 μ; dans les plus jeunes, elles sont plus nombreuses par suite de l'élongation moindre des hyphes. Ces cloisons ont une forme caractéristique en verre de montre et, dans une même hyphe, l'orientation de leur convexité est variable. Elles sont fortement bombées dans les éléments jeunes et se forment probablement après le développement des hyphes. Quelques-unes de celles-ci, en effet, présentent à la fois des cloisons très épaisses et des cloisons minces, jeunes; enfin, elles n'ont pas entre elles un espacement régulier, ainsi que cela se produirait si elles délimitaient des cellules proliférant les unes à la suite des autres. Les hyphes en sont souvent dépourvues sur de longs espaces, tandis qu'à d'autres points de leur parcours elles en présentent plusieurs à une distance très rapprochée. Il est donc probable que l'on doive considérer ces cloisons comme analogues aux cloisons des *Cladophora*, par exemple, qui jouent un rôle tout mécanique dans la division du protoplasme des filaments de ces Algues. Ces hyphes contiennent toujours des cristaux octaédriques d'oxalate de chaux; ces derniers sont même parfois assez nombreux pour obstruer la lumière de l'hyphe en certains points. Il est extrêmement remarquable de voir ainsi se constituer dans les tissus proliférés d'un sclérote à texture pseudo-parenchymateuse et à éléments larges, les éléments caractéristiques des cordons mycéliens propagateurs, c'est-à-dire les éléments filamenteux minces, les larges hyphes, longitudinalement disposées et les hyphes vasculaires que l'on retrouve toujours dans ces dernières productions.

Digitized by Google

Lentinus Woermanni Cohn et Schroeter.

Le sclérote accumulateur de cette espèce a été décrit par Cohn et Schroeter (14); il est très abondant sur plusieurs points de la côte occidentale de l'Afrique. C'est l'un des plus volumineux que l'on connaisse, car il peut atteindre jusqu'à 36 centimètres de diamètre. Il est recouvert d'une écorce mince, brune, assez fugace, composée de filaments bruns, longs de 3-4 μ, à lumière très étroite et fortement enchevêtrés; sa substance interne (pl. I, fig. 10 à 25) est compacte, blanchâtre et constituée par deux espèces d'éléments. Les premiers (fig. 11), larges de 2-3 μ, sont onduleux, noueux en certains endroits, géniculés, peu ramifiés et à lumière très étroite; les autres, très réfringents, de forme très variée, soit globuleux, elliptiques ou allongés, parfois ramifiés et arrondis aux extrémités, sont larges de 10-15 μ ou même davantage. Les hyphes globuleuses paraissent souvent pleines tandis que les plus longues sont creusées d'un canal; les premières sont dissoutes par la potasse, ce qui n'a pas lieu pour les secondes qui sont les plus minces. L'iode colore tous ces éléments en jaune, sans donner la réaction glycogénique. Les hyphes filamenteuses de forme régulière dominent; il est intéressant de constater que les hyphes plus profondément transformées offrent dans leurs modifications une sorte de résumé des métamorphoses de plus en plus profondes que l'on constate dans les autres sclérotes du même groupe; on trouve, en effet mélangées, des hyphes transformées, ramuleuses, tuberculeuses et même sphéroïdales.

Cohn a été assez heureux pour voir se produire, sur des exemplaires de ce sclérote qu'il avait mis en culture, le développement du carpophore auquel il donne naissance. C'est un Agariciné du genre *Lentinus*, auquel il a donné le nom de *L. Woermanni*.

M. Fernand De Meuse, qui a exploré pendant plusieurs années le bassin du Congo, m'a communiqué un exemplaire de sclérote très volumineux (20 centimètres de diamètre), qu'il avait récolté dans les forêts des bords du Lubefu. On l'y trouve assez abondamment dans les bois dont la futaie est assez basse et assez clair-semée; il est enfoui dans le sol de telle manière que sa partie supérieure affleure à la surface. Ce sclérote, dans tous les détails

Digitized by Google

de sa structure, s'accorde parfaitement avec la description que Cohn donne de *L. Woermanni* et doit, selon toute apparence, être rapporté à cette espèce, bien que je n'aie pu me procurer des exemplaires fructifiés. Il y a peut-être dans l'écorce une différenciation plus marquée que dans l'espèce de Cohn. On y distingue, en effet, une première zone externe d'un brun foncé (50 μ d'épaisseur), composée d'hyphes brunes, minces, à membrane sclérotisée, qui se divise en deux couches d'épaisseur à peu près semblable; la plus interne, plus pâle, est caractérisée par une sclérotisation moins marquée de ses éléments. Sous cette première assise de cellules, très nettement limitée, s'étend une couche de tissu plus lâche d'environ 75 μ d'épaisseur, constituée également par des hyphes minces dont la sclérotisation est extrêmement faible, car leur membrane est jaunâtre. Enfin, au delà de cette couche interne de l'écorce, qui semble en être la zone génératrice, on trouve la substance même du sclérote, constituée par les deux éléments caractéristiques décrits par Cohn et contrastant avec les tissus de l'écorce par l'absence totale de coloration. Il est très remarquable de voir sur les exemplaires secs, tels que ceux que j'ai examinés, la surface de l'écorce revêtue d'une sorte de duvet formé d'hyphes étroites, mesurant en moyenne 2 μ de largeur, à contenu assez réfringent et à membrane mince non sclérotisée. Ce duvet est bien mieux caractérisé sur les exemplaires frais; on trouve une production analogue à la surface de l'écorce de *Pachyma cocos*.

Le type de sclérote de *Lentinus Woermanni* offre un intérêt très grand. On y voit, en effet, les tissus se spécialiser nettement en réservoirs de matériaux de réserve. Les éléments de la moelle accumulent dans leur membrane des réserves cellulosiques, et cette accumulation ne tarde pas à déterminer chez certains d'entre eux, où elle est bien caractérisée, des changements de forme bien distincts; les membranes s'épaississent, les éléments s'élargissent dans une grande proportion : l'épaississement de la membrane est tel qu'il finit même par obstruer tout à fait la lumière de l'hyphe, qui est alors transformée partiellement ou en entier en une masse compacte. Cette accumulation énorme de matière cellulosique est accompagnée de certaines modifications dans la constitution chimique de ce corps, comme le prouve sa solubilité dans la potasse. J'ai dit que l'accumulation de réserves cellulo-

Digitized by Google

siques amenait la modification de forme si caractéristique des grosses hyphes. On peut en effet suivre tous les stades de la transformation des hyphes minces en grosses hyphes courtes et larges, par des formes de transition entre ces deux types extrêmes.

Lentinus sclerotícola G. Murr.

Murray (9), le premier, a décrit le sclérote accumulateur de *Lentinus sclerotícola*. Il est assez volumineux (6-10 centimètres de diamètre), à tissu extrêmement compact; sa substance interne, très dure et d'un blanc jaunâtre, est constituée par deux espèces d'éléments plus nettement différenciés que dans les sclérotes de *Lentinus Woermanni*. Les éléments filamenteux n'épaississent que très peu leur membrane et conservent probablement leur activité physiologique d'hyphes mycéliennes; les éléments qui se sont transformés en éléments de réserve par l'épaississement de leur membrane, ont, au contraire, perdu entièrement leur caractère cellulaire primitif. Ils ont la forme de gros rameaux noueux, pleins, très réfringents, plus ou moins ramifiés; la moelle est composée de ces éléments mélangés, mais, chose curieuse, les éléments minces ont une tendance bien marquée à former des tractus, des espèces de cordons de mycélium qui parcourent la moelle en tous sens. Ce sont eux seuls qui donnent naissance au carpophore.

Polyporus umbellatus Fr.

Ce Polypore possède un sclérote accumulateur très remarquable (16) que j'ai pu étudier dans ses stations naturelles, aux environs de Bruxelles, où il avait été découvert par mon père il y a une trentaine d'années. Il affecte la forme de gros rameaux noirâtres, noueux, très irréguliers, cylindriques ou aplatis, mesurant 2-3 centimètres de diamètre et présentant çà et là des renflements et des étranglements (pl. III, fig. 12). Leur substance interne est blanche, compacte et la consistance rappelle celle du liège dur.

Ces rameaux, en s'étendant dans le sol, forment des amas enchevêtrés relativement énormes. Un exemplaire complet (pl. III, fig. 13), extrait du sol avec le plus grand soin, occupait une surface d'un mètre carré et s'étendait

Digitized by Google

au moins à 40 centimètres de profondeur. Les rameaux les plus superficiels viennent affleurer à la surface du sol, et c'est grâce à cet indice que l'on parvient à découvrir le sclérote. On rencontre ces formations dans les bois de haute futaie, où la végétation herbacée est peu dense ou même nulle, et toujours dans le voisinage des racines des Hêtres ou des Chênes.

Ainsi que j'ai pu m'en assurer, les rameaux du sclérote se développent à la fois dans l'humus et dans le sol même des forêts, lequel, dans le cas de l'exemplaire que j'ai extrait, était composé de sable ferrugineux, très pauvre en matières assimilables.

Les exemplaires du sclérote sont peu nombreux dans chaque station; on les rencontre assez fréquemment en Belgique, étant donnée la rareté des carpophores de *Polyporus umbellatus* dans ce pays. Une exploration attentive des environs de Bruxelles m'a, en effet, fait connaître six stations différentes dans la forêt de Soignes, et cela dans un rayon de 6 à 7 kilomètres. On en a découvert également une station dans le Luxembourg, à Poix, près de Saint-Hubert. Dans toutes ces localités, le sclérote croissait au pied des Hêtres. Si l'on tient compte de la grande difficulté qu'il y a à s'apercevoir de l'existence de ces formations souterraines lorsqu'elles ne portent pas de carpophore, on peut en conclure qu'elles sont loin d'être exceptionnelles.

Hariot a observé fréquemment *Polyporus umbellatus* et son sclérote dans la forêt d'Arc-en-Barrois, dans le département de la Haute-Marne, où il est assez abondant. Dans cette localité, il croît toujours au pied des Chênes, particularité qui lui a valu le nom vulgaire de « Tripe de Chêne » dans le département de l'Aube. Rostrup (17) a désigné, il y a quelques années, sous le nom de *Sclerotium giganteum,* un exemplaire de la production qui nous occupe; il avait été récolté en Danemark et trouvé en relation avec un carpophore de *P. umbellatus.*

Comme ce sclérote avait été découvert en Belgique longtemps avant que l'on sût à quel carpophore il donnait naissance, on avait essayé de l'identifier avec des productions analogues, et Cooke, à qui des exemplaires avaient été soumis, l'avait rapporté au *Choo-ling*, sclérote de la Chine, employé dans ce pays comme matière médicamenteuse. Une comparaison attentive de sa

Digitized by Google

structure histologique a confirmé cette attribution. On voit donc combien est étendue l'aire de dispersion de cette production.

Le sclérote de *P. umbellatus* possède une écorce et une moelle bien distinctes (pl. I, fig. 26 à 41). L'écorce (40 μ environ d'épaisseur) est formée par la sclérotisation de la membrane des hyphes superficielles. Cette sclérotisation apparaît d'abord dans la zone externe de la membrane qui jaunit peu à peu; elle intéresse bientôt toute la substance des hyphes et celles-ci, épaississant progressivement leur membrane, se transforment en une masse homogène de substance brune réfringente. Les hyphes, altérant insensiblement leur contour extérieur, prennent l'aspect de fragments amorphes qui ne tardent pas à se fusionner plus ou moins complètement, de manière à constituer une sorte de revêtement imperméable. On conçoit que, grâce à cette structure, l'écorce puisse protéger très efficacement la masse des tissus internes contre la dessiccation et les influences extérieures en général. Des formations analogues peuvent se produire dans l'épaisseur de la moelle du sclérote de *P. umbellatus*, comme on le verra plus loin.

La structure qui vient d'être décrite se trouve réalisée à un degré plus ou moins avancé chez tous les sclérotes accumulateurs dont la couche externe brune et réfringente est constituée par des hyphes minces filamenteuses modifiées.

Au-dessous de l'écorce s'étend une couche de 300-400 μ d'épaisseur, composée exclusivement d'hyphes filamenteuses, larges de 1-1,5 μ en moyenne; certaines d'entre elles présentent de légères dilatations atteignant 3 μ de diamètre. On trouve ensuite une zone de même épaisseur dont les hyphes sont un peu plus larges (fig. 26) et qui contient souvent de nombreux cristaux tabulaires d'oxalate de chaux, appartenant au système clinorhombique et mesurant en moyenne 15-20 μ. Au delà s'étend la substance propre de la moelle, caractérisée par la présence d'hyphes réfringentes très larges, dont la membrane s'est épaissie au point d'avoir complètement fait disparaître la cavité centrale. Ces hyphes épaisses (4-5 μ) sont ramifiées, ont un contour irrégulier (fig. 27) et présentent l'aspect que Prilleux a, d'une manière très heureuse, désigné par le terme de coralloïde dans la description des éléments histologiques de *Pachyma cocos* (18). Parvenues à un stade plus

Digitized by Google

avancé de différenciation, ces hyphes s'épaississent encore davantage (20 μ) et prennent l'apparence de tubercules hyalins (fig. 28, 29).

La moelle est donc caractérisée par le mélange intime de ces différentes catégories d'hyphes (fig. 30). Il existe cependant un certain ordre dans ce groupement; on voit, en effet, comme dans le sclérote de *Lentinus sclerotícola*, bien que d'une manière moins évidente, les hyphes minces se grouper à certains endroits et constituer des tractus parcourant la moelle en tous sens. Nous retrouvons donc ici une structure du même type que celle de *L. sclerotícola*, mais dans laquelle, cependant, la différenciation des gros éléments est plus avancée.

Les réserves de *Polyporus umbellatus* sont, avant tout, cellulosiques; cependant, la réaction du glycogène montre que certaines hyphes de la moelle, peu nombreuses et de même calibre que les hyphes réfringentes ordinaires, contiennent une faible quantité de cet hydrate de carbone, comme Errera l'a signalé il y a déjà longtemps (19).

Lorsqu'on extrait soigneusement du sol un exemplaire complet de sclérote, on constate que certains de ses rameaux sont en relation avec les racines des arbres voisins; ils semblent sortir de l'intérieur de racines assez grosses (5-10 millimètres de diamètre). En sectionnant une de ces racines, on voit tout l'intérieur rempli par la substance du sclérote qui prend la forme de l'organe dans lequel il s'est développé; il ne reste, en effet, de ce dernier, que le périderme recouvrant la substance du sclérote. Celle-ci se répand au dehors en masses arrondies à écorce noire, ayant tous les caractères du sclérote adulte. On trouve des racines portant des tubercules de sclérote mesurant à peine 1 ou 2 centimètres de hauteur (pl. II, fig. 1); d'autres, au contraire, qui ont donné naissance à des rameaux déjà fort longs (pl. II, fig. 2). Il paraît donc probable que ces corps proviennent d'un mycélium qui attaque les racines des arbres et s'y transforme en sclérote. Je n'ai pu malheureusement étudier ce premier état, mais l'étude d'un sclérote qui présente de grandes analogies avec celui qui nous occupe, *Pachyma cocos*, vient éclaircir les points qui pourraient rester obscurs.

Le mycélium de *Polyporus umbellatus* est donc probablement parasite des racines des arbres, Chênes ou Hêtres. C'est dans ces organes que son

Digitized by Google

sclérote se développe d'abord ; il s'accroit ensuite au dehors en formant des rameaux de plus en plus nombreux. La nécessité qu'il y a pour le sclérote de se développer sur des racines, pouvant par leur volume lui offrir une alimentation suffisante, justifie probablement sa situation dans les parties profondes du sol, pauvres, il est vrai, en matières organiques, mais dans lesquelles se trouvent seulement des racines d'un volume un peu considérable. Les rameaux émis par le sclérote au sortir de la racine, demeurent grêles (0,5-1 centimètre d'épaisseur) tant qu'ils se trouvent dans un sol peu nutritif. Ils ne tardent pas à atteindre les parties superficielles, riches en humus, et là le développement devient beaucoup plus actif. Aussi peut-on comparer la forme générale d'un sclérote complet à celle d'un cône très surbaissé, qui serait enfoui en terre, la pointe en bas.

Le sclérote de *Polyporus umbellatus* possède donc une croissance plus définie que celle des sclérotes de *Lentinus*, dont il se rapproche par sa structure, et qui s'accroissent d'une manière égale par toute leur surface. Dans le sclérote de *P. umbellatus*, la croissance est, en effet, localisée en certains points des rameaux. J'ai été assez heureux pour pouvoir saisir cette croissance sur le vif. Des exemplaires (pl. II, fig. 3), déterrés au milieu de l'été, présentaient, à la surface des rameaux adultes, de grosses proliférations sphériques, de couleur brun clair, à aspect duveteux, de consistance assez molle, semblable à celle des jeunes exemplaires de *Pachyma*, contrastant étrangement avec la densité et la couleur noire des parties adultes sur lesquelles elles se développaient. Ces parties jeunes étaient constituées par un tissu d'hyphes moins serrées que dans le tissu adulte et ne présentaient pas une différenciation aussi avancée ; l'écorce consistait uniquement en hyphes filamenteuses et sa couche externe n'était pas sclérotisée ; enfin, l'aspect duveteux de la surface était dû à la présence d'hyphes filamenteuses très nombreuses, non sclérotisées et remplissant probablement le rôle d'organes assimilateurs, comme celles de *Lentinus Woermanni*. C'est par leur intermédiaire que les jeunes rameaux créent des réserves qu'ils conservent jusqu'au moment de leur utilisation pour la production des carpophores. L'accroissement des rameaux doit être fort lent, car les points où se produisait le bourgeonnement étaient très rares sur les sclérotes que j'ai observés,

Digitized by Google

et il me semble résulter de l'examen attentif de quelques exemplaires *in situ*, durant plusieurs années, que ce phénomène de croissance n'est pas régulièrement périodique. L'aspect et l'étendue des sclérotes dans une des stations n'a guère varié dans un intervalle de quatre années. On doit donc en conclure que la formation d'une masse de sclérote aussi considérable que celle que j'ai pu récolter, exige un temps fort long, qui n'est probablement pas inférieur à une vingtaine d'années.

Exposées au contact direct de l'atmosphère, les parties en voie de bourgeonnement sclérotisent leur surface avec une grande rapidité. Un jour ou deux suffisent pour produire cette modication. Il semble qu'on puisse voir là une démonstration expérimentale du rôle protecteur que joue principalement l'écorce chez les sclérotes. Celui de *P. umbellatus* fournit d'ailleurs d'autres preuves bien remarquables de ce rôle. Si l'on vient à briser un rameau de formation récente, c'est-à-dire à un stade un peu ultérieur à celui du bourgeonnement que j'ai décrit plus haut, ce que l'on reconnaît à l'élasticité de la substance qui cède sous la pression du doigt, on voit qu'au bout de deux jours il s'est formé une nouvelle écorce par la sclérotisation des éléments de la moelle mise à nu. Le même fait a été signalé par de Bary (1, p. 42) pour le sclérote de *Coprinus stercorarius*.

Les rameaux du sclérote offrent parfois des traces de blessures qui leur ont été faites par divers animaux. Ces cicatrices sont toujours recouvertes par une écorce de nouvelle formation, de même nature que l'écorce normale. Ce qui montre bien l'importance du rôle protecteur de ce tissu, c'est que s'il vient à s'y produire des crevasses ou des accidents quelconques, il se forme au-dessus du point lésé, à une certaine distance à l'intérieur de la moelle, une nouvelle couche sclérotisée (pl. I, fig. 31) qui se continue avec l'écorce cicatricielle tout autour de l'endroit atteint.

Enfin, des zones sclérotisées peuvent aussi se former au milieu même de la moelle, comme j'ai pu le constater dans deux circonstances différentes.

Un exemplaire de sclérote présentait, dans certains de ses rameaux, une désorganisation déjà avancée de ses tissus. En pratiquant une coupe au niveau de la jonction des parties saines avec les parties endommagées, je me suis aperçu que le rameau avait développé, à l'intérieur de la moelle, un véritable

Digitized by Google

diaphragme de tissu sclérotisé, d'une épaisseur comparable à celle de l'écorce normale (pl. I, fig. 32). Ceci n'est pas un exemple isolé, car la formation de ces diaphragmes de tissu protecteur s'observe souvent chez les végétaux supérieurs.

C'est par des moyens analogues que le sclérote se défend contre les attaques des rhizomorphes d'*Armillaria mellea* (pl. I, fig. 33 à 41). La variété souterraine du rhizomorphe de ce Champignon est très abondante dans le sol d'une des stations de *P. umbellatus*, aux environs de Bruxelles. Ces rhizomorphes tâchent naturellement de pénétrer dans un milieu aussi nutritif que la substance du sclérote; on les voit ramper à la surface des rameaux et s'y introduire. On sait (20, pl. I, fig. 16) que les rhizomorphes s'appliquent à la surface des racines et émettent des hyphes filamenteuses qui prolifèrent dans les tissus, en les désorganisant rapidement. Lorsqu'un rhizomorphe s'est ainsi appliqué à la surface du sclérote, on voit souvent, à l'intérieur des tissus de ce dernier, un diaphragme sclérotisé se former à une certaine distance de la surface et parallèlement à celle-ci, immédiatement au-dessous du point où se trouve le rhizomorphe (fig. 33), isolant ainsi les tissus infestés par les hyphes du parasite. Ce diaphragme se forme par le même processus que l'écorce. Il arrive cependant que les rhizomorphes parviennent à pénétrer assez avant dans l'intérieur de la moelle; ils sont alors isolés sur tout leur parcours, des tissus environnants, par une vraie gaine isolatrice de tissu sclérotisé (fig. 34). Cette gaine offre deux aspects bien distincts; elle est parfois formée de cellules larges (5-7 μ) et assez courtes, à membrane légèrement épaissie et sclérotisée, formant un tissu pseudoparenchymateux dont les éléments sont très régulièrement alignés parallèlement au grand axe du rhizomorphe (fig. 35, 36); plus généralement, elle est constituée par une masse compacte de tissu sclérotisé, dans lequel on ne distingue plus les éléments dont il est composé et qui a tout à fait l'aspect de l'écorce du sclérote (fig. 37, 38, 39). Bien que les caractères que présentent ces deux espèces de gaines soient très différents, on trouve des formes de passage montrant que les gaines pseudoparenchymateuses peuvent se transformer en gaines sclérotisées à tissu amorphe (fig. 40). Elles ont toutes deux une origine différente; la gaine sclérotisée compacte se forme par la modification des

Digitized by Google

hyphes normales du sclérote, de la même façon que l'écorce de ce dernier. La gaine pseudoparenchymateuse, au contraire, est une véritable néoformation; c'est un tissu spécial qui se différencie à l'intérieur de la moelle du sclérote. Par l'union intime des éléments qui le composent, ce tissu oppose une barrière très efficace aux hyphes filamenteuses du rhizomorphe, et cela dès le début de sa formation, tandis que la gaine, formée des éléments normaux de la moelle sclérotisée, permet aux hyphes parasites de s'insinuer par les interstices que ceux-ci laissent entre eux. On observe, en effet, fréquemment des gaines à structure pseudoparenchymateuse accolées à des gaines sclérotisées amorphes (fig. 41). Leur formation est due vraisemblablement à ce que des hyphes du rhizomorphe ont traversé la gaine protectrice du sclérote et ont envahi une nouvelle partie de celui-ci. La gaine pseudoparenchymateuse a pour but de limiter cette nouvelle invasion. Au bout d'un certain temps, cette gaine adventive sclérotise profondément les éléments dont elle est formée et se transforme à son tour en gaine sclérotisée compacte.

D'une manière générale, on peut dire que la gaine pseudoparenchymateuse est une formation particulière destinée spécialement à défendre le sclérote de *Polyporus umbellatus* contre les attaques des rhizomorphes d'*Armillaria mellea,* plus efficacement que ne peut le faire le tissu cicatriciel ordinaire; ce tissu spécial est caractérisé par l'imperméabilité très grande de la paroi protectrice qu'il constitue. Dans le cas de la gaine sclérotisée compacte, la protection est réalisée, avant tout, par l'épaisseur de la paroi interposée, tandis que dans la gaine pseudoparenchymateuse la protection est effectuée par la structure elle-même; des gaines ainsi constituées peuvent protéger des étendues considérables, tout en présentant un développement très faible en épaisseur. C'est en raison de l'efficacité plus grande de la protection qu'il exerce, que le tissu pseudoparenchymateux constitue généralement seul au début, la défense du sclérote contre les rhizomorphes.

Le carpophore auquel le sclérote donne naissance est bien connu (pl. II, fig. 4); c'est un Polypore très ramifié, formant une touffe constituée par plusieurs grosses branches principales, plus ou moins concrescentes à leur base, et insérée sur le sclérote par une partie très limitée. La partie inférieure de ces rameaux est d'un brun-marron foncé; les rameaux, aussi bien que

Digitized by Google

leurs subdivisions, sont entièrement couverts de pores assez petits; ils portent, à leur extrémité, des chapeaux de petite dimension, irréguliers, plans ou convexes, recouverts de fines squamules. Ce dernier caractère a été négligé dans toutes les descriptions que l'on a données de ce Champignon, bien qu'il soit constant, au moins dans les exemplaires qui m'ont été communiqués et qui provenaient de stations différentes. La couleur du chapeau varie du gris jaunâtre au bistre foncé. Il n'existe pas de bonne figure de ce Polypore (21, p. 95); celle de Krombholz est la seule qui soit acceptable; cet auteur ne signale pas cependant la présence d'un sclérote. La rareté des carpophores de *P. umbellatus*, en Belgique, ne m'a pas permis de suivre son développement aux dépens du sclérote, et les essais de culture, tentés il y a déjà longtemps par M. le professeur Errera, n'ont donné aucun résultat.

Pachyma cocos Fr. [1].

Parmi les sclérotes accumulateurs d'un grand volume, *Pachyma cocos* est celui dont on connaît le mieux, actuellement, le cycle de développement, grâce surtout à l'étude que Fischer (22) en a faite. Sa structure reproduit, avec des caractères généralement plus accentués, celle du *P. umbellatus* (pl. IV, fig. 1 à 11). Il possède en effet une écorce (500 μ environ d'épaisseur) composée d'un feutrage d'hyphes filamenteuses (3-4 μ de diamètre), à parois épaisses, sclérotisées. On y distingue toujours deux couches : la première, superficielle (200 μ d'épaisseur), est caractérisée par la sclérotisation plus avancée de ses éléments de couleur brun foncé et par la densité plus grande du tissu (fig. 1); la seconde, plus interne, est un peu plus large (300 μ d'épaisseur); elle a, au contraire, un tissu plus lâche et ses éléments sont colorés en brun pâle, ce qui indique une modification beaucoup moins profonde de la nature chimique de la membrane des hyphes (fig. 2). On trouve à la surface de la couche externe, fortement sclérotisée, des hyphes

[1] Bien que le travail de Fischer ait traité d'une manière complète les différents points de l'histoire de *P. cocos*, je résume ici mes observations, qui ont d'ailleurs été faites indépendamment de ce travail, afin de donner plus de cohésion à l'exposé général des adaptations du mycélium des Champignons.

Digitized by Google

très réfringentes, filamenteuses, qui ont conservé leur aspect normal. La moelle est constituée par de rares hyphes minces, semblables à celles de la partie corticale (fig. 3), et par une très grande proportion d'éléments fortement modifiés, de même nature que les hyphes tuberculeuses de *P. umbellatus* (fig. 8), mais de dimensions beaucoup plus grandes. Ils affectent généralement la forme de très gros rameaux réfringents ramifiés, d'aspect très noueux, coralloïde, et mesurent ordinairement 20-30 μ d'épaisseur (fig. 6). On trouve de plus dans la moelle de *Pachyma* de très gros éléments à structure homogène, mesurant en moyenne 75 μ de diamètre (fig. 7), constituant parfois seuls la masse du sclérote qui présente alors un aspect compact particulier; ce ne sont, semble-t-il, que des formes particulières des hyphes coralloïdes. Le passage des hyphes minces aux hyphes coralloïdes, s'observe facilement (fig. 4, 5). Ici, comme dans les autres sclérotes à deux éléments dont il a été question, il existe quelquefois, mais rarement, une localisation des éléments minces. Certains échantillons de l'herbier du British Museum présentent à leur centre des crevasses plus ou moins profondes et assez longues, garnies d'un véritable duvet formé d'hyphes minces qui, en ces endroits, constituent à elles seules le tissu du sclérote. Il est probable que les crevasses sont dues précisément à la différence de résistance de ce tissu. Pourquoi cette disposition n'est-elle réalisée que dans certains exemplaires? Serait-elle une différenciation secondaire en rapport avec la production d'un carpophore?

Pachyma cocos se développe toujours sur les racines des arbres, le plus souvent sur celles des Pins, mais on le trouve aussi sur les essences feuillues. Les racines attaquées (fig. 9) offrent toujours à la limite du bois et du liber, une couche (*a*) d'épaisseur variable (200 μ environ), composée exclusivement d'hyphes filamenteuses; les hyphes coralloïdes s'y rencontrent parfois, mais sont alors en petit nombre. Dans cette couche, comme dans un véritable cambium, se forment des hyphes filamenteuses qui vont remplir de corps coralloïdes le bois (*c*) et l'écorce (*b*) de la racine. Ceux qui se répandent dans le bois remplissent complètement la cavité des trachéides ou des vaisseaux et il est facile de voir qu'ils y pénètrent d'abord sous forme d'hyphes filamenteuses (fig. 11). On peut, en effet, observer dans les racines

Digitized by Google

infectées, des trachéides encore intactes dans lesquelles les hyphes minces, venant des trachéides voisines remplies de corps coralloïdes, pénètrent par la lumière des ponctuations aréolées. Les hyphes et les corps coralloïdes exercent une action extrêmement destructive sur les parois lignifiées des éléments du bois. On les voit détruire couche par couche les cloisons des trachéides, les canaux résinifères et les vaisseaux dans lesquels ils ont pénétré (fig. 10); c'est par ce processus que la racine dans laquelle ils ont pénétré finit par disparaître complètement.

Les tissus de l'écorce sont détruits de la même façon, et bien plus rapidement, par les corps coralloïdes et les filaments qui s'y sont formés. On remarque que *Pachyma cocos* se développe de préférence sur les racines des Conifères; la raison en est probablement très simple. Les éléments du sclérote doivent, en effet, exercer beaucoup plus facilement leur action dissolvante sur les éléments cellulaires très larges de ces organes, à l'intérieur desquels ils peuvent former des masses de grand volume et par conséquent douées d'une activité considérable. Les canaux résinifères sont, à cet égard, des voies toutes préparées et les trachéides leur fournissent également des cavités relativement larges; de plus, les lumières des ponctuations aréolées facilitent beaucoup l'infection par les hyphes minces. Les racines des arbres angiospermes ont, il est vrai, des vaisseaux très larges, mais ces éléments sont relativement peu nombreux et la masse des tissus est formée de fibres à lumière parfois fort étroite; l'action destructive des hyphes s'y exerce donc plus difficilement. J'ai pu d'ailleurs m'en convaincre en examinant une racine de *Pinus* et une racine appartenant probablement à un *Juglans,* infestées toutes deux par *Pachyma.* Dans la première, tous les éléments du bois, indistinctement, étaient littéralement gorgés de corps coralloïdes et les parois cellulaires détruites sur bien des points. Dans la seconde, les gros vaisseaux, seuls, étaient remplis de ces corps, tandis que beaucoup de fibres en étaient exemptes. Chez ces racines, la désorganisation du bois s'opère surtout dans les couches externes en contact avec la zone d'hyphes filamenteuses située tout autour du bois; la destruction du parenchyme cortical semble aussi moins active que chez les Conifères. La preuve de cette assertion est fournie par un exemplaire du British Museum,

Digitized by Google

mesurant 12 centimètres de diamètre, donc déjà assez âgé, dans l'intérieur duquel une racine d'arbre angiosperme (*Juglans?*) a conservé son cylindre ligneux presque intact, alors que les racines des Conifères sont détruites déjà complètement dans les sclérotes bien moins développés.

Le carpophore auquel, selon toute vraisemblance, *Pachyma cocos* donne naissance, est encore inconnu. Il est donc intéressant de noter le passage suivant de Rumphius (23, p. 441), qui, tout en établissant nettement la synonymie des noms indigènes de *Pachyma*, mentionne aussi la production sur ce sclérote, de corps particuliers qui ne peuvent être que des carpophores; malheureusement, il est impossible de s'en faire une idée exacte; le terme *furculas* par lequel ils sont désignés s'appliquerait assez bien à des Clavaires. « Fo-lin n'est autre chose que la substance appelée par les Chinois « Hoelen » et apportée aussi du Su-Chuen; cette racine est bulbeuse, molle et d'un blanc sale à l'intérieur; elle croît sur les racines des vieux Pins et n'a aucune ressemblance avec un *Smilax*. C'est plutôt une espèce de Truffe de terre, d'où, au rapport de beaucoup de Chinois, il ne sort ni racines, ni feuilles. Ce tubercule produit des « furculas » qui indiquent l'endroit où il se trouve. Nous avons décrit une plante semblable sous le nom de *Tuber regium*. »

Les « furculas » signalées par Rumphius peuvent se rapporter à deux types de Basidiomycètes bien différents, *Clavaria* et *Lentinus*.

Plusieurs types de Clavariés présentent des différenciations assez marquées de leur appareil mycélien. *Clavaria stricta* Pers., par exemple, a une tendance bien caractérisée à grouper ses hyphes mycéliennes en plaques étendues et en cordons. Une espèce du genre *Lachnocladium*, qui fait partie du même groupe, *L.* (*Dendrocladium*) *insigne* Pat., possède un tubercule subglobuleux à la base du stipe (24, pl. III, fig. 14), formé par un feutrage très dense d'hyphes hyalines retenant entre elles des particules terreuses. Ces éléments très minces ont un contour assez irrégulier, parfois dilaté, et leur membrane est épaissie dans les parties élargies. Cette formation a quelque analogie avec la *Pietra fungaja*, bien que ses dimensions soient incomparablement plus faibles par rapport au carpophore et que la différenciation des hyphes qui la composent soit beaucoup moins marquée. Les

Digitized by Google

carpophores de *Lachnocladium* (*Dendrocladium*) sont de consistance coriace ou ligneuse et ont des dimensions assez grandes (*L. giganteum* Pat., 15-25 centimètres de hauteur; *L. insigne* Pat., 10-15); ils sont divisés en rameaux dichotomes, plus ou moins comprimés, à aisselles aplaties semi-circulaires, et donnent d'une manière frappante l'impression d'une réunion de petites fourches; il est possible qu'il faille rapporter à ce genre les fructifications des *Pachyma* croissant en Chine et indiquées par Rumphius. Patouillard a récemment signalé la présence dans cette région d'une espèce de ce genre, *L.* (*Coniocladium*) *vitellinum* Pat. Les dimensions relativement grandes du carpophore des *Lachnocladium* et leur consistance semi-ligneuse, s'accordent également bien avec cette hypothèse, car on remarque que les Hyménomycètes à gros sclérotes massifs, du type de *Pachyma*, tels que *Polyporus sacer*, *Lentinus scleroticola*, produisent des fructifications d'un caractère persistant et de taille assez grande.

Il peut se produire, d'autre part, chez certaines espèces du genre *Lentinus* une modification très curieuse du carpophore : le stipe et le chapeau sont remplacés par un amas enchevêtré de rameaux bifurqués irrégulièrement, dont l'aspect rappelle souvent d'une manière frappante certains Clavariés, particulièrement les grandes espèces du genre *Lachnocladium* (pl. III, fig. 15, 16).

Il est fort possible que ces carpophores déformés de *Lentinus* soient la seule fructification de *Pachyma cocos;* ce sclérote, qui est relativement très répandu (États-Unis, France, Suisse, Chine), ne doit produire que très rarement des carpophores, puisqu'on n'en a pas encore observé malgré les recherches actives qui ont été faites dans ce but. Or, il existe un exemple d'un sclérote qui, bien que se développant normalement, ne donne jamais naissance à un carpophore : c'est *Sclerotium hydrophilum,* qui a été étudié en détail par Rothert (25).

Il est donc établi qu'un sclérote peut perdre la faculté de produire des carpophores. Je crois que c'est de cette manière qu'il faut interpréter la rareté de la fructification chez *Pachyma cocos;* seulement, la stérilité ne serait pas encore complète, et dans certaines conditions il pourrait encore se former un carpophore. Comme le système reproducteur est en voie de régression, le

Digitized by Google

carpophore avorte en partie et ne parvient plus à former un hyménium normal. Il serait intéressant de savoir si la stérilisation du carpophore s'étend à la formation des spores et si, dans le cas où elles se formeraient, elles sont capables de germer. L'aposporie et l'apocarpie n'auraient d'ailleurs pas une très grande influence sur la multiplication de *Pachyma cocos*, car on sait, par l'exemple de *Sclerotium hydrophilum*, que les sclérotes peuvent très bien se propager uniquement par voie végétative.

Les malformations de *Lentinus* ne sont pas rares et Berkeley (26) leur a rapporté avec beaucoup de vraisemblance un Champignon des États-Unis que Schweinitz avait décrit sous le nom de *A. Curtis* (non *Acurtis* in Sacc.) *gigantea;* Saccardo, dans son *Sylloge* (21), en donne la description suivante :

« *A. Curtis* Fr. — Fungi fibroso-carnosi, in ramos turgidos clavatos longitudinaliter fibroso-scissiles divisi, sporis persistenter farinosi. Inter sparassim et Clavariam medium genus, cujus unica species, post Schweinitzium, non videtur inventa. — *A. gigantea* (Schw.). *Hab.* Ad radices arborum et in terra in Carolina et Pensilvania Amer. fœder., ubi interdum plagas 30-90 cm. latas occupat. — Caespites magnitudine capitis humani, 15 cm. usque lati, basi radiculosa. Clavae regulares aut sæpius irregulares, 2,5-8 cm. altæ, 2,5 cm. usque crassae, deorsum attenuatæ magis liberæ, quam in *Clavaria anomala* Fr., a qua praecipue substantia fibroso-scissili dignoscitur. »

Les relations existant entre ce Champignon et les racines des arbres, sa forme, sa rareté exceptionnelle, sa disposition en colonies (propre également aux *Pachyma*), enfin, la coïncidence de sa distribution géographique avec celle de *Pachyma* en Amérique, sont autant de raisons qui doivent déterminer les mycologues américains à chercher à vérifier le bien fondé de l'hypothèse d'après laquelle ce *Lentinus* serait le carpophore de *Pachyma cocos*. Le terme *furculas* s'applique peut-être moins bien à sa fructification qu'à celle de *Lachnocladium;* cela ne suffit cependant pas à faire rejeter l'identification des *Lentinus* déformés d'Amérique avec le carpophore de *Pachyma cocos*, car les caractères des malformations sont toujours très sujets à varier.

Si la première hypothèse que j'ai émise au sujet de la fructification de *Pachyma* se vérifiait, cette formation sclérotique ne serait pas un fait isolé

Digitized by Google

dans le groupe des Clavariés, car, indépendamment du pseudo-sclérote de *Lachnocladium insigne*, les genres *Pistillaria* et *Typhula* possèdent des sclérotes absolument caractéristiques.

Diverses hypothèses ont été émises déjà au sujet de la fructification de *Pachyma cocos*. Voici ce que dit Patouillard (27) à ce propos : « Il nous paraît certain que quelques Polypores, *P. annosus* particulièrement, peuvent donner des hypertrophies comparables au *Pachyma* lorsqu'ils se développent dans le sol, attachés aux parties souterraines des arbres. » M. Patouillard m'a communiqué des exemplaires de ces formations qui sont, en effet, bien curieuses. Certains échantillons assez épais (1 cm.) sont formés d'un tissu compact d'hyphes filamenteuses, assez semblables d'aspect aux éléments minces de l'écorce de *Pachyma*; ils ont des pores stériles peu développés. L'épaisseur du carpophore est très remarquable, car, en général, *P. annosus* ne présente pas ce caractère. Enfin, d'autres spécimens de la même espèce, plus métamorphosés encore, ne possèdent plus trace d'hyménium. Ils sont globuleux, du volume d'un petit œuf et entourés de toutes parts par une écorce brune, ridée, qui leur donne la plus grande ressemblance avec *Pachyma*. Cependant, l'absence constante de différenciation en hyphes coralloïdes semble devoir faire rejeter toute tentative d'identification. Fischer (21), dans son travail sur *Pachyma*, rapporte également ce sclérote à un Champignon Hyménomycète, comme je l'ai fait moi-même dans une note antérieure (28).

Avant de terminer ce qui est relatif à la description de *P. cocos*, je tiens à faire une remarque au sujet de la synonymie des noms indigènes de ce sclérote qui ont été souvent confondus. Les noms chinois de *Pachyma* sont : Fuh-lîm, Pe-fô-lîm et Hoelen. Ce dernier nom a été donné par Saccardo à une espèce particulière de sclérote. Comme on vient de le voir, Rumphius, d'après qui l'espèce est indiquée, dit explicitement que c'est le nom donné à *Pachyma* dans certaines parties de la Chine. Quant au terme Choo-ling, attribué à tort par quelques auteurs à *P. cocos*, il se rapporte, comme on l'a vu, à *Polyporus umbellatus*.

Digitized by Google

Polyporus tuberaster Fr.

La constitution histologique de la *Pietra fungaja*, sur laquelle se développe ce Champignon, ne paraît pas avoir été étudiée bien exactement. On est généralement convenu de la regarder comme une concrétion mycélique (3, p. 198) mélangée de parties terreuses, alors que ses caractères sont bien plutôt ceux d'un vrai sclérote accumulateur.

La *Pietra fungaja* est une masse noirâtre, irrégulièrement sphérique, très dure, s'écrasant sous le marteau et opposant à la percussion la résistance d'un tissu relativement élastique (pl. III, fig. 17). Elle se laisse entamer par les instruments tranchants, et sa consistance présente de grandes analogies avec celle des gros sclérotes, tels que *Pachyma*. Lorsqu'elle a été imprégnée d'eau, son caractère de tissu compact est bien plus accusé encore, car elle se ramollit notablement. L'examen microscopique vient confirmer le rapprochement que l'on est tenté de faire entre cette production et les gros sclérotes, par suite de la similitude des caractères extérieurs.

Le tissu interne de la *Pietra* est très homogène; il est constitué par deux espèces d'hyphes. Les unes offrent tout à fait l'aspect et les caractères des hyphes coralloïdes typiques; elles forment presque exclusivement la masse organique de la *Pietra*, mélangées à de très rares hyphes filamenteuses; on peut cependant, ici comme dans les types étudiés précédemment, trouver des formes de passage établissant la transition entre les deux expèces d'éléments. La couche superficielle est uniquement formée d'hyphes filamenteuses extrêmement minces, mélangées de quelques éléments de même forme, mais de diamètre plus grand. Il n'est pas possible de mesurer exactement l'épaisseur de cette couche par suite de la difficulté qu'il y a d'obtenir des coupes régulières de la *Pietra fungaja;* elle paraît avoir une épaisseur comparable à celle de la couche corticale filamenteuse de *Pachyma*. Cette zone superficielle est absolument dépourvue des matières minérales qui sont répandues dans toute la masse des tissus internes. Les éléments externes sont parfaitement transformés; ce sont des hyphes globuleuses, à contenu granuleux et plus réfringent que celui des hyphes filamenteuses (pl. IV, fig. 14). Les plus petites (4-5 μ) sont hyalines (*a*), tandis que les autres, plus grandes (10 μ),

Digitized by Google

sont généralement colorées en brun foncé par la sclérotisation (*b*). On observe tous les passages entre les petites hyphes hyalines et les grandes hyphes sclérotisées. Ces dernières forment, par leur accumulation, une véritable écorce dans laquelle les hyphes sclérotisées, situées à la périphérie, ont une tendance marquée à se fusionner (pl. IV, fig. 15). Cette écorce forme, à la surface de la *Pietra*, un mince revêtement crustacé, noirâtre, que l'on peut détacher en plaques d'une certaine étendue, à cause de la cohésion des éléments dont il est formé.

Cette différenciation des tissus de la *Pietra* en moelle et en écorce est un argument décisif en faveur de l'interprétation que j'ai proposée de la nature de cette formation. On peut même dire que les caractères histologiques si particuliers de l'écorce indiquent une adaptation plus étroite que celle que l'on a rencontrée chez les autres gros sclérotes à hyphes massives étudiés jusqu'ici ; chez ces derniers, en effet, les éléments sclérotisés de la couche superficielle de l'écorce ne différaient de la couche sous-jacente que par la sclérotisation de leur membrane ; les uns et les autres étaient des hyphes filamenteuses. Dans le cas qui nous occupe, ils s'en distinguent encore par leur forme nettement sphéroïdale. Enfin, la masse des tissus contient une certaine proportion de matières minérales englobées par le mycélium lors de sa transformation. Ce sont ces matières, assez variables de composition, qui donnent à toute la masse son aspect noirâtre ; les points où elles sont le moins abondantes, apparaissent comme des veines blanchâtres sur les coupes du sclérote. La proportion de ces matières a été de beaucoup exagérée.

Le Dr Clautriau, assistant à l'Institut botanique de l'Université de Bruxelles, a bien voulu se charger de déterminer la proportion de matières minérales entrant dans la composition d'un sclérote caractéristique, *Pachyma cocos*, et dans celle de la *Pietra fungaja*. Les échantillons analysés étaient tous deux conservés depuis longtemps à l'état sec. Voici le résultat de la recherche :

Pachyma cocos.		Pietra fungaja.	
Eau	13.69	Eau	9.24
Cendres	1.08	Cendres	32.86
Matières organiques	85.22	Matières organiques	57.63

Digitized by Google

Pour connaître exactement la proportion des éléments minéraux étrangers entrant dans la constitution de la *Pietra fungaja*, il convient de remarquer que le chiffre 32,86 est en réalité trop fort; il faut en soustraire un peu plus de 1 %, représentant la matière minérale qui entre dans la composition chimique des tissus du sclérote; la proportion de ces matières est de 1.08 chez *Pachyma*, qui ne contient pas de matières minérales à l'état libre.

Au point de vue de la constitution histologique, on voit que la *Pietra fungaja* se rattache étroitement à un type de sclérote très différencié; son tissu interne présente même, par suite de la rareté des hyphes filamenteuses, primitives dans les sclérotes, un caractère très accentué de tissu sclérotique. Enfin, cette production est absolument constante et possède toute l'apparence d'une formation bien définie.

Les substances minérales que l'on rencontre dans la *Pietra fungaja* sont en général remarquables par l'extrême ténuité de leurs éléments. Les fragments un peu volumineux, tels que des grains de sable, sont en minorité. Il est probable que ce soit dans ce caractère qu'il convienne de rechercher le motif de la présence même de ces éléments dans la production qui nous occupe. Si, en effet, le mycélium filamenteux qui doit former la *Pietra fungaja* se développe dans un terrain léger, composé d'éléments très ténus et très peu cohérents, on comprend qu'il englobera fatalement une certaine proportion de ces particules, au fur et à mesure de sa concentration en un tissu compact. Les concrétions mycéliennes de *Polyporus lucidus* que j'ai décrites, se trouvaient dans des conditions de formation analogues, et l'on a vu que leur tissu interne contenait une très forte proportion de matières minérales, ce qui n'empêche pas que ces corps, recouverts d'une écorce bien différenciée, présentent tous les caractères de formations définies.

Polyporus sacer Fr.

Fischer (22, p. 79) a décrit très complètement le sclérote accumulateur de *Polyporus sacer*. C'est, d'après cet auteur, une formation assez semblable d'aspect à *Pachyma cocos*, mais de dimensions moindres : sa structure interne

Digitized by Google

présente également de grandes analogies avec celle de ce dernier (pl. IV, fig. 16 à 27). On rencontre d'abord une écorce formée de deux couches très distinctes : une couche externe épaisse (75 μ), d'un jaune pâle, dont les hyphes minces se sont fusionnées en masses amorphes de substance sclérotisée; ensuite, une couche interne de moindre épaisseur (20 μ) et de couleur brune, formée des mêmes éléments, mais plus distincts les uns des autres. Sous l'écorce existe une zone (500 μ) uniquement formée d'hyphes minces et longues, à laquelle succède une moelle formée de plusieurs éléments. Des hyphes filamenteuses minces et relativement abondantes (fig. 16), à membrane épaissie, constituent une sorte de trame dans laquelle sont plongées des hyphes transformées, semblables aux corps coralloïdes de *Pachyma cocos,* dont elles se distinguent cependant par une différenciation plus avancée (fig. 27). Ces hyphes modifiées ont généralement une forme subsphérique ou un peu allongée (30 μ de diamètre en moyenne), et l'on en trouve quelquefois qui présentent la forme en rameaux, caractéristique des éléments correspondants de *Pachyma*.

Fischer décrit un troisième élément. Ce sont des hyphes sphériques de moitié plus petites que les hyphes réfringentes, présentant une forte membrane entourant une large cavité centrale remplie d'un contenu réfringent assez dense (fig. 18 à 20). Ces corps sont répartis dans toute la substance de la moelle et constituent, d'après Fischer, une formation différente des hyphes réfringentes; car, indépendamment de leur aspect particulier, leur membrane résiste à l'action dissolvante de la potasse, tandis que les hyphes réfringentes sont dissoutes par ce réactif, à l'exception de la mince couche externe de la membrane. L'interprétation que donne Fischer de ce troisième élément ne me semble pas répondre à ce que j'ai observé sur un sclérote de *Polyporus sacer*, portant un carpophore bien caractéristique, rapporté du Gabon par Thollon et faisant partie de l'herbier du Muséum de Paris. Dans cet exemplaire, les éléments dont il est question sont disséminés assez abondamment dans toute la masse et se font immédiatement remarquer par la coloration jaune de leur contenu granuleux et par leur réfringence. Leur forme, assez irrégulière, est généralement ovoïde; ils se prolongent à l'une de leurs extrémités en un long filament comparable aux hyphes filamen-

Digitized by Google

teuses formant la trame de la moelle, ce qui leur a valu le nom de « Endzellen » que Fischer leur a donné. J'ai pu saisir le début de la formation de ces corps. Un rameau d'une hyphe filamenteuse s'épaissit, se renfle à son extrémité, son contenu devient plus réfringent et la partie élargie se sépare du reste de l'hyphe par une cloison transversale (fig. 17); le protoplasme de cette cellule terminale devenu très réfringent est finement granuleux, la membrane est mince. Ces éléments sont recouverts d'une membrane qui doit s'épaissir considérablement, car elle est développée à des degrés très variables; parfois à peine visible (fig. 18), elle mesure ailleurs plusieurs μ (fig. 20). Lorsque cette épaisseur ne dépasse pas 2-3 μ, on a affaire aux « Endzellen » de Fischer, mais on ne tarde pas à se convaincre que la membrane peut s'accroître bien davantage, au point même d'acquérir le volume et l'apparence des hyphes réfringentes. En même temps, le volume du contenu de la « Endzelle », qui s'est d'abord accru pendant quelque temps, commence à diminuer et sa réfringence tend à disparaître. On peut observer des « Endzellen » offrant tous les degrés de cette réduction, jusqu'à la disparition presque totale (fig. 22 à 25). Dans ce dernier cas, la « Endzelle » est identique aux hyphes réfringentes, et il semble que l'on soit fondé à admettre que le troisième élément décrit par Fischer n'est autre chose que l'état jeune des hyphes réfringentes caractéristiques du sclérote de *Polyporus sacer*. Si les « Endzellen » ne sont pas aussi abondantes que ces dernières, on peut en trouver la raison dans le fait que les sclérotes examinés par Fischer et par moi-même étaient des formations adultes arrivées probablement près du terme de leur développement, puisqu'elles portaient des carpophores.

Il arrive très souvent que l'épaississement de la membrane des « Endzellen » ne se fait pas également sur toute la surface de ces hyphes et, lorsque la membrane est très épaissie, la cavité cellulaire occupe une position fort excentrique, quelquefois même tout à fait superficielle (fig. 19). Dans l'exemplaire que j'ai examiné, ces cavités cellulaires sont reconnaissables à leur coloration jaunâtre et à la réfringence de leur contenu, ces caractères étant naturellement fort affaiblis dans les hyphes déjà très transformées. Les cavités excentriques ont souvent une forme plus allongée et plus irrégulière que les

Digitized by Google

autres, comme si le développement de la membrane avait été moins régulier, ce qui doit en réalité avoir eu lieu.

Une grande analogie existe entre ce processus et la formation excentrique des grains d'amidon. Il doit, en effet, arriver fréquemment que le dépôt des couches successives de cellulose ne se forme que peu ou point à l'endroit où la « Endzelle » est attachée à l'hyphe qui lui a donné naissance, si cette dernière persiste plus ou moins longtemps, et il est vraisemblable que bien souvent après sa disparition l'hyphe laisse une sorte de cicatrice à l'endroit de laquelle la formation de la membrane est moins active (fig. 22). Je pense que les parties corrodées signalées dans les hyphes réfringentes par Fischer sont les cavités cellulaires excentriques, car je n'ai rien vu qui pût leur être assimilé et je ne crois pas que la légère différence spécifique qui sépare l'exemplaire de *Polyporus sacer* que j'ai examiné de l'espèce type (cet exemplaire appartient, d'après Fischer, à la var. *megaloporus*), soit la cause de mon insuccès. En fait d'hyphes réfringentes altérées localement, je n'ai trouvé que quelques éléments paraissant éclatés ou déchirés et je crois qu'il ne faut considérer comme dissoutes et utilisées pour matières de réserve que les hyphes réfringentes réduites à leur couche limitante, décrites également par Fischer. Il me paraît d'ailleurs assez difficile, au point de vue physiologique, d'expliquer l'allure qu'affecteraient les phénomènes de corrosion localisés dans les hyphes réfringentes; on ne voit pas bien pourquoi la corrosion ne s'exercerait jamais que sur un seul point de la surface de l'hyphe qui est tout entière un réservoir de matières nutritives. Il faudrait admettre que les zymases ne pussent trouver qu'un seul endroit de plus faible résistance pour pénétrer à l'intérieur de l'hyphe, ce qui se conçoit assez mal, étant donnée la grande homogénéité de cette dernière, qui, comparable à un grain d'amidon, devrait s'attaquer comme celui-ci, irrégulièrement peut-être, mais certainement par toute sa surface à la fois.

En dernier lieu, il est étrange que la corrosion des hyphes réfringentes ne soit jamais poussée au delà d'un certain degré. On ne rencontre que des hyphes réduites à leur couche limitante et des hyphes à cavité de faible capacité; les stades intermédiaires entre ces deux extrêmes manquent complètement.

Digitized by Google

Les hyphes réfringentes de *Polyporus sacer* se formeraient donc par l'épaississement de la membrane d'hyphes filamenteuses, dont l'extrémité très dilatée contient un protoplasme abondant et réfringent ; l'abondance et la nature spéciale de ce contenu seraient en relation avec le développement ultérieur si considérable de la membrane qui l'entoure et qui doit trouver dans ces réserves les matières nécessaires à son accroissement.

La structure des hyphes réfringentes fournit d'ailleurs elle-même des arguments à l'appui de cette manière de voir. Comme Fischer l'a signalé, on observe fréquemment dans l'épaisseur de leur membrane une structure en couches concentriques; très souvent aussi, au centre de toutes ces couches concentriques existe une sorte de hile; enfin, chez certaines hyphes réfringentes, le hile a une forme étoilée ou en croix de saint André (fig. 25). Or, il arrive que dans les hyphes qui ont conservé à leur centre une partie encore considérable de contenu cellulaire, celui-ci, pressé un peu inégalement sur différents points de sa surface par l'accroissement de la membrane environnante, prend un contour plus ou moins polygonal avec des prolongements amincis en rayons (fig. 23). Il est clair que lorsque l'épaississement de la membrane de ces hyphes sera presque terminé, les vestiges du contenu affecteront la forme étoilée.

Fischer établit aussi une distinction entre la composition chimique des hyphes réfringentes et celle des « Endzellen ». La membrane des premières est soluble dans la potasse à l'exception d'une mince couche externe, tandis que la membrane des « Endzellen » résiste à ce réactif. Si l'interprétation que j'ai donnée des « Endzellen » est acceptée, on voit qu'il faut considérer celles-ci comme les états jeunes des hyphes réfringentes, c'est-à-dire des hyphes réfringentes dont la membrane est relativement peu épaissie.

Les hyphes coralloïdes de *Pachyma cocos* ont une bien grande analogie avec les hyphes réfringentes de *Polyporus sacer* et Fischer (21) a montré comment elles proviennent de la modification de la membrane des hyphes filamenteuses, qui s'épaissit en transformant la cellulose de celles-ci, insoluble dans la potasse, en une substance qui s'y dissout entièrement. La membrane est donc primitivement insoluble et devient soluble au fur et à mesure de son épaississement. Si donc les « Endzellen » sont bien l'état

Digitized by Google

jeune des hyphes réfringentes, il faut aussi que leur membrane, insoluble tant qu'elle est peu épaissie, le devienne plus tard, et ainsi le caractère invoqué pour distinguer les deux espèces d'éléments devient au contraire une preuve de leur identité.

On pourrait cependant soulever cette objection que la membrane des « Endzellen » qui résiste à la dissolution est déjà épaissie. Il faut rechercher probablement le motif de cette résistance plus grande, de même que des différences que présentent l'action d'autres réactifs, dans la nature de la membrane qui, formée par un contenu protoplasmique beaucoup plus abondant que dans le cas de *Pachyma cocos* et peut-être d'une autre composition, a vraisemblablement une structure chimique plus condensée.

Il résulte de ce qui précède, que les hyphes réfringentes du sclérote de *Polyporus sacer* ne sont pas les équivalents morphologiques des hyphes coralloïdes de *Pachyma cocos*. Elles proviennent de la transformation de la portion terminale d'hyphes filamenteuses à protoplasme abondant et localisé, tandis que les éléments réfringents de *P. cocos* proviennent de l'épaississement latéral d'hyphes filamenteuses non différenciées primitivement.

Les hyphes réfringentes du sclérote de *Polyporus sacer* réalisent donc un degré de différenciation beaucoup plus élevé.

Polyporus rhinoceros Cooke.

Dans l'herbier mycologique de Kew se trouve, sous le n° 5280, un exemplaire d'un Polypore provenant de Penang, où il est connu sous le nom de « Champignon rhinoceros » et présentant les plus grandes analogies avec *Polyporus sacer*. Il a été décrit par Cooke sous le nom de *P. rhinocerotis* et se distingue nettement de *P. sacer* par les dimensions plus grandes (20 cent.) du chapeau et par les pores extrêmement petits, de couleur brun sépia foncé. Le stipe manque à l'exemplaire de Kew, mais un croquis qui l'accompagne montre que ce stipe avait la grosseur du doigt et une longueur de 15 centimètres environ. Le croquis porte, inscrite sur le stipe, l'indication « laccate ». Un fragment de sclérote accumulateur à écorce brun noirâtre, à moelle compacte et d'un blanc jaunâtre est joint

Digitized by Google

au carpophore. On voit, par le croquis, que le stipe s'attachait au sclérote par toute la largeur de sa base.

La structure du sclérote de *Polyporus rhinoceros* est très voisine de celle de *P. sacer* (pl. IV, fig. 28 à 33). L'écorce est de même nature; il existe, au-dessous de celle-ci, une zone occupée surtout par des hyphes filamenteuses, bien qu'on y remarque un certain nombre d'hyphes réfringentes. La moelle est également constituée par deux espèces d'éléments : une trame d'hyphes filamenteuses réunies parfois en minces tractus et des hyphes réfringentes. Ces dernières prennent naissance aux dépens des hyphes minces de la manière décrite pour *P. sacer,* seulement, dans l'exemplaire étudié, peut-être d'ailleurs parce qu'il avait terminé son développement, les états jeunes des hyphes réfringentes correspondant aux « Endzellen » de *P. sacer* étaient très rares, quoique bien caractérisés (fig. 28, 29). L'extrémité d'une hyphe filamenteuse se renfle; son contenu devient très réfringent et la membrane s'épaissit en s'accroissant par couches concentriques; il n'y a pas ici de cloison séparant la portion de l'hyphe mère qui donnera naissance à l'hyphe transformée. Le renflement peut aussi se produire au milieu du trajet de l'hyphe filamenteuse, spécialement à l'endroit d'une bifurcation de celle-ci (fig. 32); c'est à cette particularité qu'est due la forme triangulaire de beaucoup d'hyphes transformées (fig. 33).

Les hyphes réfringentes adultes sont remarquables par leur forme beaucoup plus irrégulière que chez *P. sacer ;* tandis que les unes sont ovoïdes, les autres présentent des prolongements arrondis les faisant vaguement ressembler à une Amibe. Il en est enfin qui, très allongées et assez minces, offrent l'aspect de courts rameaux. La structure concentrique de ces hyphes est des plus manifestes, au point qu'elles font l'impression de certains grains d'amidon (fig. 31). Les couches sont disposées concentriquement au centre de l'hyphe, où persiste, très fréquemment, un vestige de la cavité primitive (fig. 30). Si cette partie affecte une forme spéciale, on voit des couches concentriques épouser ce contour. Ce fait est particulièrement intéressant lorsque la cavité cellulaire est excentrique et située en un de ses points à la surface même de l'hyphe. On peut alors se rendre parfaitement compte que les couches se moulent sur la cavité, au lieu

Digitized by Google

que celle-ci les traverserait sans qu'il existât de rapport entre sa forme et leur disposition, si la cavité, produite par une corrosion, était creusée dans des couches préexistantes et continues. En résumé, cette structure tout en se rapprochant beaucoup de celle du sclérote de *P. sacer*, doit être considérée comme plus primitive et moins différenciée, et l'on voit que les caractères du sclérote, aussi bien que ceux du carpophore, justifient pleinement la distinction des deux espèces. Ce sclérote a été décrit par Cohn et Schroeter (14, p. 7) sous le nom de *Pachyma malaccense* d'après des exemplaires non fructifiés.

Fischer (29) a cité une observation de M. N. Ridley concernant un sclérote de la presqu'île de Malacca, appelé par les indigènes « Susu Rimau » (lait de Tigre) et dont les caractères offrent une grande ressemblance avec ceux des sclérotes de *Polyporus sacer* et de *Polyporus rhinoceros;* de plus, ce dernier a la même distribution géographique que le sclérote dont il est question. Cependant, la présence dans les tissus du « Susu Rimau » d'un réseau formé de files de cellules à contenu granuleux, visible à l'œil nu, écarte toute tentative d'identification.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

LES AGGLOMÉRATIONS MYCÉLIENNES DES ASCOMYCÈTES.

A. — CORDONS MYCÉLIENS.

Cordyceps ophioglossoides (Ehrh.) Link.

Les espèces du genre *Cordyceps* possèdent généralement un mycélium aggloméré assez développé, soit en cordons, soit en masses, d'une structure très peu différenciée, formant un simple feutrage assez dense.

Cordyceps ophioglossoides est parasite des *Elaphomyces variegatus* et *muricatus*. Le mycélium (30, p. 20, t. II, fig. 1-9) s'échappe de plusieurs points de la surface du Champignon attaqué et se groupe en cordons minces (200-500 μ), qui se réunissent pour former le carpophore. Leur structure est très peu différenciée; ils sont constitués par un feutrage dense d'hyphes filamenteuses extrêmement minces 1,5μ), très longues, à protoplasme granuleux, disposées longitudinalement. Leur groupement un peu plus dense à la périphérie des cordons, forme une sorte de couche corticale dont les hyphes n'offrent cependant aucune différenciation. Elles ne renferment pas de matières de réserve.

Les cordons de *Cordyceps* représentent, chez les Ascomycètes, une adaptation protectrice tout à fait analogue à celles que l'on observe chez les Basidiomycètes. Comme ces dernières, ils se développent dans des milieux exposés à la dessiccation, car les *Elaphomyces* croissent toujours dans l'humus des bois peu humides.

Poronia Doumetii Pat.

Ce Pyrénomycète offre un exemple bien intéressant d'adaptation protectrice. Il a été récolté dans les dunes de la Tunisie par Patouillard (31), qui en donne la description suivante : « Il est constitué par un strome orbicu-

Digitized by Google

laire, convexe, quelquefois conoïdal, plus ordinairement plan, épigé, porté sur une petite tige terminée inférieurement par une très longue racine pénétrant verticalement dans le sable jusqu'à une profondeur de 10-15 centimètres » (pl. III, fig. 18). Le réceptacle fructifère n'ayant que 1-1,5 centimètre de diamètre, on voit que, toutes proportions gardées, ce corps radiciforme a un développement considérable.

Les cordons mycéliens de *Poronia Doumetii* présentent une moelle et une écorce très nettement différenciées. La moelle est formée par un feutrage assez lâche d'hyphes filamenteuses sans cloisons transversales, disposées parallèlement au grand axe du cordon. Ces éléments affectent deux aspects différents : les uns sont larges (4-5 μ), réfringents, à membrane épaissie; les autres, plus minces (1,5-2,5 μ), sont beaucoup moins réfringents, ont un protoplasme granuleux et leur membrane est peu distincte. Les deux espèces d'hyphes ont la même allure flexueuse et ne présentent guère de ramifications; elles sont mélangées sans ordre déterminé et l'on observe de nombreuses formes établissant la transition d'un type à l'autre. Il faut donc considérer les hyphes larges comme provenant de la transformation des éléments minces.

Le tissu de la moelle est littéralement farci de cristaux d'oxalate de chaux, de forme tabulaire ou octaédrique, appartenant au système clinorhombique. Ces cristaux sont d'une taille relativement assez grande (15-20 μ en moyenne). La proportion d'oxalate de chaux contenue dans la moelle du cordon peut être évaluée à 90 % du poids de la matière sèche.

La zone externe des tissus du cordon est profondément différenciée. Elle est constituée par une seule assise d'hyphes très larges et très aplaties (8-10 μ de large), à cordons sinueux, s'engrenant les unes dans les autres, de manière à former un revêtement analogue à l'épiderme de beaucoup de plantes supérieures (pl. IV, fig. 34). Ces hyphes ont une membrane épaisse et fortement sclérotisée; un certain nombre d'entre elles émettent vers l'extérieur de longues hyphes filamenteuses minces (2 μ) dont la membrane épaissie est également sclérotisée. Elle sont divisées par des cloisons transversales assez régulièrement espacées (30-40 μ) et constituent une gaine feutrée épaisse tout autour du cordon. Ce système externe de protection est

Digitized by Google

très parfait, car il réunit les deux moyens employés d'ordinaire isolément par les plantes supérieures pour protéger leurs tissus contre la dessiccation. La couche de cellules aplaties à membrane épaisse et entièrement sclérotisée est, en effet, l'homologue d'un revêtement épidermique avec cuticule développée, tandis que les prolongements filamenteux de ces mêmes cellules remplissent le rôle de l'épais revêtement pileux, du tomentum, caractéristique de beaucoup de plantes des lieux secs.

Les cordons protecteurs de *Poronia Doumetii* réalisent le type le plus complètement adapté que nous ayons rencontré jusqu'ici, et il est probable qu'il n'existe guère de formations protectrices pouvant lui être comparées (*Montagnites?*). Cette haute différenciation est en rapport avec le milieu dans lequel se développe cette espèce, car peu de Champignons croissent dans des stations aussi arides et aussi défavorables au point de vue de la dessiccation. Il est très remarquable de constater que la présence de grandes quantités d'oxalate de chaux dans l'appareil végétatif soit une particularité que l'on retrouve chez beaucoup de plantes adaptées à un milieu très sec. *Cereus senilis* (32, p. 211) renferme dans ses tissus une proportion de ce corps s'élevant jusqu'à 85 % du poids de la matière sèche. Les tissus (32) de *Welwitschia*, de *Sedum*, de *Mesembryanthemum* en renferment également une très grande quantité. L'exemple des cordons mycéliens de *Poronia Doumetii* montre combien ce fait est général, et il semble qu'il faille considérer cette accumulation de produits de sécrétion comme une conséquence directe des conditions biologiques dans lesquelles sont placés les végétaux qui les présentent. La réduction que subit l'activité du fonctionnement général chez les plantes qui viennent d'être citées, modifie vraisemblement la marche normale des phénomènes d'excrétion et amène le dépôt de quantités exagérées de produits de rebut, pouvant constituer pour l'organisme une cause d'encrassement rapide. La fréquence des cristaux d'oxalate de chaux dans l'écorce des Conifères (32) est probablement due également au peu d'activité des échanges chez ces végétaux.

Digitized by Google

B. — SCLÉROTES.

Xylaria Tulasnei Nits.

Ce Champignon a été décrit par Tulasne (30) sous le nom de *Xylaria pedunculata* var. *pusilla*. D'après cet auteur, le strome périthécigère de cette espèce se développe presque toujours à l'extrémité d'un cordon mince, parfois fort long (1-8 centimètres), naissant d'un sclérote allongé (500μ); l'un et l'autre sont enfouis dans le sol, l'extrémité périthécigère émergeant seule. Le sclérote possède une moelle et une écorce différenciées. La moelle est formée d'hyphes filamenteuses (6 μ de large) dépourvues de cloisons transversales, à membrane généralement fort épaisse. Ces hyphes sont groupées en tractus dont les uns sont parallèles au grand axe du cordon tandis que les autres sont perpendiculaires à cette direction; elles sont étroitement juxtaposées; la moelle offre une structure pseudoparenchymateuse d'un aspect semblable à celui de la moelle de *Collybia racemosa*. Les hyphes de la partie centrale du sclérote ont pour la plupart une membrane beaucoup plus mince que celles de la périphérie. Toutes les hyphes, même celles dont la lumière est réduite à 1 ou 2 μ par l'épaississement de la membrane, contiennent du glycogène; il ne fait défaut que dans quelques éléments situés à la périphérie et qui ont perdu leur cavité cellulaire. Les hyphes à membrane mince situées au centre de la moelle en contiennent une très grande proportion, en raison de leur capacité.

Le sclérote de *Xylaria Tulasnei* est le meilleur exemple que je connaisse d'une formation accumulatrice renfermant à la fois des réserves glycogéniques et cellulosiques; ces deux types de réserves sont, ici, mélangés d'une manière remarquablement égale.

La moelle est protégée par une écorce offrant une analogie frappante avec celle du cordon de *Poronia Doumetii*. La couche corticale est formée d'une ou deux assises de cellules larges (10-15 μ), à membrane sclérotisée peu épaissie, à contour sinueux, constituant une sorte de revêtement épidermique continu.

Digitized by Google

La structure du cordon qui unit le carpophore au sclérote est, à peu de chose près, la même que celle du sclérote. La moelle est comme dans celui-ci composée d'un tissu très serré d'hyphes longues à parois très épaisses contenant du glycogène. On remarque seulement que les éléments à large cavité renfermant une grande quantité de glycogène font défaut; toutes les hyphes ont une lumière très étroite. La constitution de l'écorce est la même que dans le sclérote.

Un certain nombre de cellules corticales, tant du sclérote que du cordon, émettent des hyphes filamenteuses larges (2-3 millimètres) et cloisonnées, identiques aux éléments correspondants décrits chez *Poronia Doumetii*. Ces hyphes forment un duvet assez épais, localisé dans les parties renflées en réservoirs de matières nutritives, ainsi que dans la partie périthécigère du strome; il ne s'en trouve jamais dans les parties minces du cordon. Ce duvet est évidemment, comme chez *Poronia Doumetii*, un complément d'adaption protectrice des tissus superficiels.

La formation qui nous occupe doit être regardée comme l'équivalent morphologique de l'ensemble des différenciations que présente l'appareil végétatif d'*Armillaria mellea*.

Le sclérote qui a pris naissance aux dépens du mycélium filamenteux primitif, après avoir acquis un certain développement, continue à croître et s'allonge en un cordon plus ou moins long. Ce cordon, comme les rhizomorphes d'*Armillaria mellea*, est formé par l'expansion des tissus du sclérote, doués de croissance localisée. Dans tous les exemplaires que j'ai examinés, le sclérote se confond avec le cordon sans séparation nette, en diminuant souvent tout à fait insensiblement de diamètre; dans bien des cas même, on ne peut dire si l'on a affaire à un sclérote ou à un cordon un peu épais. En outre, on observe souvent qu'un cordon se terminant à une des extrémités par un sclérote bien caractérisé se renfle sur son trajet et produit sur ce point une nouvelle formation ayant tous les caractères du sclérote primitif. Enfin, si l'on compare la structure du cordon à celle du sclérote, on ne peut saisir qu'une seule différence de détail, l'épaississement plus général des hyphes de la moelle, qui a probablement pour but spécial d'augmenter la résistance du cordon.

Digitized by Google

Quelle est la nature de l'adaptation déterminant cette profonde différenciation des sclérotes chez *Xylaria Tulasnei?* Le développement énorme que peuvent acquérir les cordons (jusqu'à 30 centimètres, d'après M. E. Marchal) et la nature des tissus dont ils sont formés doivent les faire ranger dans les adaptations propagatrices.

Xylaria vaporaria Berk.

Cette espèce possède un sclérote très développé (pl. III, fig. 19 et pl. V, fig. I) formé de rameaux extrêmement irréguliers, enchevêtrés, constituant un réseau d'aspect scoriacé qui peut couvrir un espace assez considérable (25 centimètres de long et 15 de large). La structure de cette formation rappelle celle du sclérote de *Xylaria Tulasnei;* la moelle est formée d'hyphes filamenteuses constituant un tissu très serré (pl. IV, fig. 36). La plupart de ces éléments sont assez larges (7-10μ) et leur membrane très épaisse, à lumière très étroite ; les autres (5-7μ) ont une membrane relativement mince. Ces deux espèces d'hyphes possèdent un protoplasme granuleux remplissant toute leur cavité cellulaire; elles se colorent en jaune par l'iode Il existe une série complète de formes de passage, du type étroit à parois minces au type large à parois épaisses, et il est vraisemblable que le premier est le stade jeune du second. Dans la zone périphérique de la moelle (100μ d'épaisseur environ), mais là seulement, on trouve d'abondantes hyphes larges (7-10μ) à parois très minces entièrement remplies de glycogène.

Un quatrième élément, beaucoup plus rare que les précédents, est réparti dans toute l'étendue de la moelle. Ce sont des hyphes larges à parois épaisses présentant, soit sur leur trajet, soit à leur extrémité, une partie fortement dilatée, à parois très épaisses également (pl. IV, fig. 37). Ces ampoules renferment, comme les hyphes ordinaires, un protoplasme granuleux se colorant en jaune par l'iode. Elles mesurent 35-40 μ de diamètre transversal quand elles ont atteint tout leur développement. On trouve des hyphes offrant toutes les transitions du filament normal à ces formes plus différenciées.

L'écorce qui recouvre la moelle est formée d'une couche de cellules isodia-

Digitized by Google

métriques à membranes assez minces, comprenant plusieurs assises, dont la plus superficielle seule a des éléments sclérotisés (pl. IV, fig. 35).

Le sclérote de *Xylaria vaporia* se rapproche beaucoup de celui de *Xylaria Tulasnei;* sa structure est un peu plus différenciée et l'adaptation plus exclusivement accumulatrice. L'accroissement du sclérote est cependant encore nettement localisé. Pourtant, la croissance au lieu d'être limitée à un seul point de sa surface, est répartie sur plusieurs points à la fois, et c'est ainsi que peut se former cet amas de rameaux enchevêtrés et soudés les uns aux autres. Cette formation est tout à fait comparable à un cordon de *Xylaria Tulasnei* qui serait tout entier épaissi en sclérote et se ramifierait abondamment.

Si l'appareil végétatif de *Xylaria Tulasnei* peut être comparé à celui d'*Armillaria mellea,* il y a aussi un parallèle à établir entre le sclérote de *Xylaria vaporaria* et celui de *Polyporus umbellatus.*

Isaria densa (Link.) Fr.

L'étude approfondie que Giard a faite (33) de ce Champignon fournit un bel exemple d'adaptation à la fois accumulatrice et propagatrice chez une forme imparfaite d'Ascomycète.

Voici, d'après le travail de cet auteur, le résumé des particularités les plus remarquables qu'offre *Isaria densa,* au point de vue des différenciations que peut offrir l'appareil végétatif.

Isaria densa se développe particulièrement sur les larves du Hanneton. En peu de temps les tissus des larves attaquées sont tout à fait détruits par le mycélium du Champignon, dont les hyphes larges sont abondamment pourvues de matières de réserve, glycogéniques d'abord, grasses ensuite. Ce tissu accumulateur remplit complètement l'intérieur du corps de la larve d'une masse blanche compacte, que Giard regarde très justement comme un sclérote. Ce sclérote n'a pas d'écorce propre, ce rôle étant rempli par le revêtement chitineux de la larve, que le mycélium n'attaque pas à cause de son caractère particulièrement résistant.

On observe de semblables formations dans les larves et les chrysalides

Digitized by Google

attaquées par les Champignons du genre *Cordyceps;* un des plus beaux exemples est fourni par une espèce d'Australie réellement géante, *C. Taylori* (34, pl. V, fig. 2); la structure histologique de son sclérote est identique à celle des formations analogues d'*Isaria densa.*

Le sclérote de cette dernière espèce peut produire directement les hyphes sporifères, qui se font jour à travers les pores de la cuticule. C'est ce qui a lieu lorsqu'il s'est développé dans un terrain sec, tandis que dans une terre humide et grasse il produit un grand nombre de cordons (hyphasmates) qui atteignent souvent plusieurs centimètres de longueur, composés d'un feutrage d'hyphes minces filamenteuses, à végétation très active. Ces cordons se développent d'abord aux dépens des réserves du sclérote, mais, de même que les cordons propagateurs des Basidiomycètes, ils possèdent des filaments superficiels chargés d'assurer leur nutrition autonome; aussi peuvent-ils continuer à s'accroître après leur séparation du sclérote. Sur ces cordons se développent les appareils sporifères, chaque fois qu'ils rencontrent dans la terre un espace libre. Ces cordons, doués d'une si grande activité végétative, sont évidemment des organes de propagation très parfaits.

Les sclérotes des Champignons appartenant aux genres *Peziza* et *Claviceps* représentent, chez les Ascomycètes, des types de structure analogue à celle des sclérotes de *Coprinus stercorarius* et *Collybia racemosa.* Comme ils ont été déjà décrits dans de nombreux travaux, il n'y a pas lieu d'en parler spécialement ici.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

TYPES CRITIQUES.

Sclerotium stipitatum Berk.

On désigne sous le nom de *Sclerotium stipitatum* (35) une production de nature fongique qui a donné lieu à bien des interprétations. Ce sont de petits corps ovoïdes, de forme assez variable, mesurant transversalement 1-2 centimètres de diamètre et 2-3 $^1/_2$ centimètres de longueur (pl. III, fig. 20). Ces formations présentent toujours deux pôles bien définis; d'une part, l'extrémité amincie se continue en un prolongement étroit formant une sorte de tige, mesurant 1-2 millimètres de diamètre, tandis que d'autre part, à l'extrémité la plus large, on trouve d'une manière constante une cicatrice circulaire située au fond d'une légère dépression; cette cicatrice est entourée d'un rebord circulaire et peut être ou convexe, ou concave. Cette production est formée d'un tissu homogène blanc jaunâtre très léger, dont la consistance rappelle celle de la moelle de sureau et recouvert d'une écorce noire très mince et très résistante. Ce tissu est constitué par des hyphes assez courtes, non divisées en cellules, à contour irrégulier, présentant des dilatations, des étranglements et des ramifications nombreuses; leurs parois sont épaisses et l'on distingue à l'extrémité des ramifications, un protoplasme granuleux. Il contient encore d'autres éléments; ce sont des hyphes plus étroites et plus courtes, à parois moins épaisses, à contour plus régulier, non ramifiées, entièrement remplies d'un protoplasme granuleux dense. Le contenu granuleux des hyphes donne très nettement la réaction du glycogène.

Certains auteurs regardent cette production comme un vrai sclérote (35, 36), d'autres en font un carpophore stérile (22 p. 101). Il me semble que l'on ne tient pas suffisamment compte, dans ces interprétations, des conditions

Digitized by Google

dans lesquelles on trouve *Sclerotium stipitatum*. Voici ce que Berkeley rapporte à cet égard.

« Le *Sclerotium stipitatum* se nomme en langue Tamil, « *Puttu Manga* », ce qui veut dire « Mangue de fourmi blanche (White ant Mango) » ou plus simplement « Fruit de fourmi blanche ». Les exemplaires décrits ont été découverts, en enlevant le plancher d'une maison à Travancore, dans des cavités situées à trois pieds de la surface du sol et où l'on pouvait introduire la main; les parois en étaient circulaires et parfaitement lisses. Ces productions étaient suspendues aux parois de ces cavités par petits groupes de quatre, cinq, six ou dix individus de forme et de taille variées. Les indigènes qui les virent assurèrent qu'on les trouvait quelquefois, mais rarement, dans les fondations des vieux bâtiments et qu'elles étaient produites par les fourmis blanches. Les cavités dans lesquelles elles étaient suspendues étaient certainement l'œuvre de ces fourmis. » Il se peut donc qu'il y ait un rapport étroit entre la présence des fourmis et la production de ces corps. On possède d'ailleurs l'exemple d'un genre de fourmis qui font des Champignons leur principal aliment. Möller a établi que les fourmis du genre *Atta,* bien connues par leur habitude de couper les feuilles des arbres, les emportent dans leurs nids pour en former une pâte qui sert de terrain de culture à des Champignons dont elles se nourrissent (37).

Il est intéressant de noter certains faits qui recevront peut-être plus tard une explication analogue. D'après Massee (38), les carpophores de *Podaxis indica* sont très abondants dans l'Afrique australe sur les nids de Termites, tandis qu'ils sont très rares dans d'autres stations; Fries (39) dit aussi à propos de l'habitat de *Psalliota augusta :* « in silvis raro, saepe in acervos formicarum »; cette dernière indication est d'autant plus intéressante que le Champignon décrit par Möller (*Rozites gongylophora*) est très voisin de *Psalliota.*

Il est donc possible que certaines espèces de fourmis puissent provoquer la production des *Sclerotium stipitatum* qui garnissent leurs galeries. Ce seraient non des sclérotes proprement dits, mais des tissus hypertrophiés par une intervention extérieure et analogues aux galles que forment beau-

Digitized by Google

coup d'insectes. Cette interprétation est la seule qui permette de se rendre compte des détails de structure du *Sclerotium stipitatum*. Celui-ci, en effet, est formé par la dilatation de l'espèce de rhizomorphe dont une portion plus ou moins considérable persiste à la base de tous les exemplaires. Or, il n'existe rien de morphologiquement comparable parmi les différenciations mycéliennes, pourtant si variées, que l'on connaît aujourd'hui.

Mylitta Fr.

Ce genre comprend deux espèces, *M. australis* et *M. lapidescens*. Ces types ont déjà fait l'objet de nombreuses descriptions et l'on n'a cependant aujourd'hui encore que des données bien vagues sur leur organisation.

J'ai eu l'occasion d'étudier la série si complète d'échantillons de *M. australis* que renferme l'herbier du British Museum, ainsi que les documents très intéressants faisant partie de l'herbier de Kew. Grâce à ces matériaux exceptionnels, j'ai pu élucider la véritable nature de ce Champignon, jusqu'ici assez énigmatique.

Mylitta australis Berk.

Les exemplaires de *M. australis* que l'on rencontre dans les herbiers sont des corps très irrégulièrement sphériques, de dimensions variables (10-25 cent. de diamètre), compacts et extrêmement durs, revêtus d'une croûte très mince de couleur noire. Les caractères de la substance interne qui s'étend sous cette couche superficielle sont variables. Dans certains exemplaires la masse interne est compacte, translucide, de consistance cornée, d'une couleur jaune brunâtre; on distingue au sein de cette substance des veinules minces, sinueuses, opaques, de couleur blanchâtre; la transparence de la substance cornée permet de les apercevoir à une certaine profondeur au-dessous des surfaces de section (pl. V, fig. 3). Le tissu qui forme ces veinules s'étend aussi à la surface du Champignon en une couche très mince, immédiatement recouverte par une croûte noire superficielle. Les

Digitized by Google

exemplaires ainsi constitués ont une forme subsphérique ou largement mamelonnée; leur surface ne présente ni rides ni sillons. Leurs dimensions à l'état sec sont très variables; un exemplaire du Muséum de Paris, rapporté de Tasmanie par Verreaux, mesure à peu près 10 centimètres de diamètre, tandis qu'un autre échantillon, faisant partie des collections du British Museum et provenant d'Australie, mesure 25 centimètres de diamètre.

D'autres spécimens, tout en offrant les principaux caractères qui viennent d'être indiqués, se font remarquer par le développement plus accentué de la substance blanchâtre et opaque qui constitue les veinules. Celles-ci forment à l'intérieur du tissu corné des cloisons incomplètes qui s'anastomosent entre elles; la couche superficielle de matière blanche s'épaissit aussi, bien que faiblement. La substance interne ainsi modifiée prend un aspect marbré très caractéristique (pl. V, fig. 4).

Un troisième type, que l'on rencontre le plus fréquemment, est caractérisé par un accroissement considérable de la substance blanche opaque, qui a déterminé au sein de la masse de tissu corné la formation d'alvéoles closes (pl. V, fig. 6 à 11). Il en résulte un aspect qui a été comparé à celui des rayons de miel, bien qu'il soit loin de présenter une aussi grande régularité. La couche superficielle, formée par la substance blanche de la paroi des alvéoles, prend également un développement assez grand; dans beaucoup d'exemplaires elle constitue une zone continue d'une épaisseur de 1 à 1,5 millimètres; d'autres fois elle atteint, sur une partie plus ou moins étendue de la surface, une épaisseur de 5 à 20 millimètres (fig. 6). Les échantillons dont il est question sont généralement de couleur beaucoup plus foncée que les autres; quand ils sont desséchés, leur surface est extrêmement irrégulière, marquée de rides et de sillons profonds, comme si la dessiccation avait fait subir un fort retrait à la masse entière. Dans tous les exemplaires de ce type, j'ai trouvé des cavités de formes et de dimensions assez irrégulières (fig. 6, 7); elles paraissent formées par des fissures progressivement agrandies et occupent parfois un très grand espace. Ces fissures ne doivent pas leur origine à la rétraction des tissus lors de la dessiccation, car elles sont recouvertes d'une couche souvent

Digitized by Google

épaisse (3 millimètres) de tissu blanchâtre, formé d'un feutrage d'hyphes minces, filamenteuses, ayant beaucoup d'analogie avec la substance qui forme la paroi des alvéoles.

Lorsqu'on plonge dans l'eau les échantillons desséchés de *M. australis*, ils reprennent au bout d'un temps plus ou moins long, l'humidité que la dessiccation leur avait fait perdre et les tissus offrent jusqu'à un certain point l'aspect qu'ils avaient à l'état frais. Les exemplaires appartenant au premier type que j'ai indiqué, ceux chez lesquels il n'existe que des veinules de substance blanchâtre, se ramollissent en prenant une consistance cartilagineuse ; l'augmentation de volume est assez faible. L'étiquette accompagnant un des spécimens (fig. 3) de l'herbier du British Museum donne des renseignements intéressants sur la diminution de poids qu'il a subie par la dessiccation; ce document indique que l'exemplaire pesait, au moment où il a été récolté, en 1846, 14 ℔ $^{2}/_{16}$ (mesure anglaise) ou 6406 grammes; en 1850, son poids était abaissé à 10 ℔ $^{10}/_{16}$ ou 4820 grammes.

Les exemplaires chez lesquels il existe une différenciation en alvéoles bien caractérisée offrent un changement de volume des plus manifestes. Les alvéoles se dilatent en doublant leurs dimensions primitives; elles affectent, lorsqu'elles sont regonflées, un contour polyédrique rappelant l'aspect d'un prisme hexagonal (pl. V, fig. 9). L'eau est surtout absorbée par la substance cornée remplissant les alvéoles; la substance blanche formant les parois en absorbe très peu. L'ensemble des tissus regonflés a une consistance cartilagineuse et leur translucidité a encore augmenté. La diminution de poids que les échantillons de cette catégorie subissent par la dessiccation est très considérable; un exemplaire du Museum II des Jardins royaux de Kew (fig. 5) pesait, à l'état frais, 25 ℔ $^{1}/_{2}$ (mesure anglaise), ou 11566 grammes; le poids s'est abaissé par la dessiccation à 9 ℔ 1 once et $^{3}/_{4}$, ou 4132 grammes.

On a émis jusqu'à présent diverses hypothèses sur la place que le genre *Mylitta* doit occuper dans la classification.

Backhouse, le premier, a signalé *M. australis* dans son travail sur les plantes comestibles de la terre de Van Diemen (40); dans cette île, de même qu'en Australie, ce Champignon servait de nourriture aux indigènes, d'où

Digitized by Google

le nom vulgaire de « native bread », par lequel on le désigne dans ces pays. En raison de son habitat souterrain et peut-être aussi à cause de l'aspect de la substance interne, Backhouse l'avait considéré comme une Truffe, mais sans s'appuyer sur l'étude des caractères histologiques.

En 1839, Berkeley décrivit, sous le nom de *Mylitta australis*, la truffe signalée par Backhouse (41). Il ne trouva pas trace de spores, et rapprocha le nouveau type de *Mylitta pseudo-acaciae* qu'on sait aujourd'hui être une galle; il remarqua que la structure de *M. australis* diffère beaucoup de celle de *Pachyma cocos*. La figure qui se rapporte à la description très exacte de Berkeley montre un feutrage d'hyphes minces dont quelques-unes sont renflées irrégulièrement à leur extrémité; l'échantillon décrit appartenait au type à alvéoles.

Tulasne (42) considère *M. australis* comme une formation mycélienne analogue à la *Pietra fungaja;* Saccardo range ce Champignon à la suite des Tubéracés parmi les types critiques; enfin, plus récemment, Cohn et Schroeter (14) ont décrit un exemplaire de *M. lapidescens* portant un carpophore appartenant au genre *Omphalia* (*O. lapidescens*). Par suite de cette découverte, les mycologues sont aujourd'hui généralement d'accord pour considérer les espèces du genre *Mylitta* comme des sclérotes accumulateurs d'Hyménomycètes. Cette dernière interprétation semble avoir tout le poids d'un fait démontré par l'expérience, et cependant un examen attentif de la structure de *Mylitta,* étude assez négligée jusqu'à présent, loin de la confirmer, tend à la faire rejeter complètement.

Considérons en premier lieu le type de *M. australis,* dans lequel la matière cornée translucide forme une masse continue ne renfermant que des veinules de substance blanche opaque.

La masse des tissus, c'est-à-dire la matière cornée, est essentiellement formée d'hyphes sans cloisons, noueuses, souvent renflées à leur extrémité, très larges (5-10 μ), d'aspect très réfringent, rappelant d'une manière frappante les hyphes massives ramuleuses des sclérotes accumulateurs d'Hyménomycètes du type à structure hétérogène, tels que *Pachyma cocos* ou *Polyporus umbellatus;* la cavité cellulaire a disparu, comme chez ces

Digitized by Google

dernières, par suite de l'accumulation de réserves cellulosiques dans l'épaisseur de la membrane (pl. VI, fig. 1). Ces hyphes ont une tendance à se grouper en tractus et forment un tissu extrêmement serré, tout à fait comparable à celui de *Pachyma cocos* ou de *Polyporus tuberaster;* elles sont mélangées à des hyphes filamenteuses plus minces (1,5-2 μ). Ces deux sortes d'hyphes ne sont pas nettement distinctes les unes des autres, car on observe de nombreuses transitions d'un type à l'autre. Le tissu blanc opaque des veinules, peu différencié, est formé d'hyphes filamenteuses assez minces, à parois épaisses. On rencontre, très rarement il est vrai, des hyphes dont l'extrémité renflée (20-30 μ de diamètre) renferme deux corps ovoïdes de grandeur inégale, possédant une sorte de noyau particulièrement réfringent et rappelant les asques jeunes des Tubéracés.

Lorsqu'on traite une coupe par le brun Bismarck, on s'aperçoit qu'il existe entre les hyphes formant la masse du tissu une sorte de matière gélatineuse se colorant faiblement par le réactif; cette matière anhiste semble imprégner tous les éléments du tissu.

La structure du type de *M. australis* qui présente la division de la matière cornée en alvéoles, diffère absolument de celle que l'on observe dans le type précédent (pl. VI, fig. 2).

Le tissu blanc opaque qui forme la majeure partie du revêtement cortical et limite le contenu des alvéoles est bien différencié (*a*); il est constitué par un feutrage d'hyphes à parois épaisses, mais conservant cependant une large cavité cellulaire. Ces hyphes sont enchevêtrées les unes dans les autres et forment un tissu aérifère à éléments libres; elles se ramifient abondamment et on y observe parfois, mais rarement, des unions en boucles. Quelques-unes d'entre elles, assez minces, semblent divisées par des parois transversales et leur membrane à surface rugueuse rappelle l'aspect des éléments du mycélium des Tubéracés (pl. VI, fig. 4 *a*). Leur diamètre est variable; elles mesurent en général 5-8 μ de diamètre. Dans les parties du tissu blanc opaque qui limite les alvéoles, on trouve une plus grande proportion d'hyphes minces (3-4 μ).

Les hyphes renferment un protoplasme granuleux assez abondant;

Digitized by Google

on peut s'en assurer surtout en examinant les éléments qui ont été froissés et ont laissé échapper une partie de leur contenu (fig. 4 *b*).

Le revêtement crustacé de *Mylitta* se forme par un processus analogue à celui qui donne naissance à l'écorce de *Polyporus umbellatus;* la couche corticale de tissu blanc opaque fournit les éléments de la couche superficielle. On observe, au contact de celle-ci avec les tissus sous-jacents, une zone étroite, assez nettement limitée, mesurant 90-100 μ d'épaisseur, dans laquelle les hyphes, dont la forme est assez altérée, ont une membrane très épaissie et fortement sclérotisée; ces caractères s'exagèrent encore dans la zone externe du revêtement crustacé où se constitue une masse absolument homogène de tissu sclérotisé translucide, d'un brun-acajou, mesurant en moyenne 300 μ d'épaisseur, et dans laquelle on ne retrouve plus aucune trace des éléments qui l'ont formée.

Le tissu qui remplit la cavité des alvéoles présente des caractères très différents de ceux du tissu blanc opaque (fig. 2 *b*). Il est constitué par un lacis d'hyphes hyalines, flexueuses, très minces (1-3 μ d'ordinaire), n'ayant pas l'allure irrégulière des hyphes du tissu blanc; elles sont aussi moins réfringentes que ces dernières. Le tissu des alvéoles et celui des parois est assez nettement séparé, mais on observe cependant un certain nombre d'hyphes du tissu blanc dans le tissu des alvéoles, observation rendue souvent très facile par cette circonstance que, dans certains échantillons, ce tissu ne se colore pas du tout par le brun Bismarck, même après un séjour très prolongé dans cette matière colorante, tandis que la membrane des hyphes du tissu subéreux se colore très fortement. Il est même possible de voir, dans des préparations ainsi colorées, qu'il existe des transitions insensibles entre les éléments les plus larges du tissu des alvéoles et les hyphes larges du tissu blanc; la même réaction permet d'y déceler la présence d'hyphes hyalines à membrane mince non colorée, semblables à celles des alvéoles.

Les éléments histologiques contenus dans les alvéoles sont plongés dans une substance gélatineuse anhiste, remplissant exactement tous les interstices qu'ils laissent entre eux. C'est à cette substance qu'est due la couleur foncée et l'aspect translucide caractérisant les alvéoles; le tissu des parois, contenant

Digitized by Google

de l'air, apparaît plus blanc et plus opaque. C'est encore cette substance qui absorbe surtout l'eau lorsqu'on y plonge les exemplaires secs de *Mylitta*, et c'est à son retrait qu'est due principalement la réduction de volume subie par les échantillons desséchés.

Le tissu des alvéoles renferme encore des éléments différents des hyphes minces et filamenteuses signalées jusqu'ici. On trouve dans toute son épaisseur des hyphes renflées, ovoïdes (5-8 μ de long), dont le contenu est plus réfringent que la substance de l'hyphe qui l'entoure (pl. VI, fig. 3). Ces éléments très particuliers sont extrêmement abondants dans le feutrage des hyphes hyalines. On observe dans certains de ces éléments, situés surtout à la périphérie des alvéoles, une différenciation bien remarquable du contenu ; on distingue à l'intérieur de l'hyphe, un, deux ou trois corps ovoïdes, à membrane très mince, renfermant chacun une sorte de noyau et remplissant à peu près toute la cavité de l'hyphe ovoïde (fig. 3 *b*). Enfin, chez quelques-unes de ces dernières, on voit à l'une des extrémités un prolongement indiquant que leur formation est due à la dilatation de la portion terminale des hyphes hyalines filamenteuses du tissu alvéolaire.

Les hyphes à contenu spécialisé atteignent leur plus haut degré de différenciation, non pas dans l'intérieur des alvéoles, mais bien dans le lacis des hyphes à membrane épaisse, formant la paroi de celles-ci (fig. 2 *c*). On constate que les hyphes ovoïdes ont notablement accru leurs dimensions (16-20 μ), que leur forme est devenue sphéroïdale, que leurs contours sont devenus plus nets et leur substance plus réfringente. Mais ce qui frappe surtout, c'est l'aspect que prend le contenu de l'hyphe : il se transforme en un corps arrondi (8-10 μ), de couleur brune, très réfringent, à surface verruqueuse et généralement affaissée en un point, présentant tous les caractères d'une spore (pl. VI, fig. 4 à 9).

Enfin, grâce à l'absence de la matière gélatineuse qui remplit les alvéoles, on peut voir très aisément que ces hyphes ovoïdes se trouvent toujours à l'extrémité d'une hyphe hyaline filamenteuse (fig. 4) ; chez un certain nombre d'entre elles, l'extrémité opposée à celle où s'insère l'hyphe filamenteuse est surmontée d'un prolongement également fila-

Digitized by Google

menteux, parfois assez long, qui semble indiquer que la dilatation de l'hyphe mère ne se fait pas toujours exactement à son extrémité. Dans quelques hyphes ovoïdes, présentant d'ailleurs le même développement que les autres, on ne trouve pas de contenu différencié, ou bien celui-ci n'est représenté que par un faible vestige, n'ayant pas le caractère d'un corps défini (fig. 10, 11).

Le mode de formation et les détails de structure des hyphes ovoïdes ont les plus grands rapports avec l'appareil reproducteur des Ascomycètes et conduisent à considérer les hyphes ovoïdes comme des asques.

L'échantillon de *M. australis* qui se trouve dans l'herbier de Berkeley, à Kew, est accompagné d'un croquis qui indique la formation des hyphes ovoïdes à l'extrémité des hyphes ordinaires. Broome a également vu ces corps particuliers, comme le témoignent les dessins très précis qui se trouvent intercalés dans son herbier au British Museum.

Dans certains exemplaires, les hyphes filamenteuses qui existent en si grande abondance dans la substance remplissant les alvéoles, prennent une allure tortueuse assez caractéristique; elles forment, par leurs ramifications, un véritable réseau à larges mailles. Indépendamment de ce tissu fondamental, il existe un lacis d'hyphes filamenteuses (2-5 μ), à contenu très réfringent, se ramifiant abondamment dans toute la masse du tissu des alvéoles. Au milieu de cet entrelacement de filaments, on distingue des corps arrondis, comparables aux hyphes ovoïdes. On rencontre ces dernières dans le tissu formant la paroi des alvéoles qui contiennent les nouveaux corps.

M'autorisant des déductions que font naître les caractères très particuliers des corps dont il va être question, je les appellerai *asques* dans la suite de la description.

Les asques sont, dans certains exemplaires, très abondamment répartis dans toute la masse du tissu des alvéoles et n'existent jamais dans le tissu qui les sépare; parvenus à tout leur développement, ils ont beaucoup d'analogie avec les asques de *Tuber melanosporum*. Leur forme est ovoïde ou subsphérique; ils mesurent 40-50 μ dans leur plus grand diamètre; leur membrane plissée est très mince et ils contiennent une seule grosse

Digitized by Google

spore hyaline, de forme allongée, mesurant 20-30 μ de longueur (pl. VI, fig. 12 à 19). La membrane des spores est tantôt lisse (fig. 12) ou légèrement ridée, tantôt verruqueuse (fig. 14) ou échinulée (fig. 13); les échinules son parfois aussi nettes que chez *Tuber melanosporum*. Dans certains cas, le protoplasme entourant la spore a une structure très manifestement radiée (fig. 15), due probablement à la formation des échinules. Les spores échinulées étaient peu nombreuses dans les échantillons que j'ai examinés. Il ne faut cependant pas considérer comme spores jeunes, celles dont la membrane n'est pas échinulée; les spores à contour bien défini, ayant une dimension normale de 20-30 μ sont parvenues également à tout leur développement. Chez *Tuber melanosporum*, les spores mûres, bien reconnaissables à leur couleur brun foncé, peuvent aussi manquer d'échinules et offrir une surface verruqueuse ou même tout à fait lisse.

Il est très difficile de voir l'attache des asques sur les hyphes ascogènes (fig. 16); on ne peut guère l'observer que dans les asques jeunes (fig. 19). Certaines hyphes se renflent à une extrémité en massue plus ou moins allongée; la membrane de cette partie dilatée est fort épaisse (2-5 μ), la cavité cellulaire est remplie d'un protoplasme granuleux réfringent. A un stade plus avancé, lorsque l'organe devenu sphérique a atteint à peu près sa taille définitive, le contenu protoplasmique se divise en plusieurs masses ovoïdes dans lesquelles on aperçoit parfois une sorte de noyau (fig. 17). Ce sont les jeunes spores; certaines d'entre elles avortent et leur substance doit être toujours absorbée par celle qui seule arrive à maturité, car dans l'asque adulte elles ont tout à fait disparu. En même temps que la formation des spores, la membrane des asques prend un aspect plissé, comme si elle avait tout à coup diminué d'épaisseur.

Dans les cas les plus favorables à l'observation, on voit distinctement que la formation de l'asque est due à deux hyphes (fig. 17, 18); l'organe semble formé par la dilatation de l'une d'elles; l'autre n'est pas en continuité de substance aussi directe avec le protoplasme de l'asque, bien qu'elle pénètre à l'intérieur de la membrane. Ces deux hyphes paraissent souvent être indépendantes l'une de l'autre, mais cette indépendance peut n'être qu'apparente, car il est impossible de suivre ces hyphes minces sur

Digitized by Google

un parcours un peu considérable, au milieu du tissu enchevêtré du carpophore. J'ai d'ailleurs observé un asque jeune dans lequel le filament ascogène portait, un peu au-dessous de sa dilatation terminale, un rameau court, qui, se recourbant dans sa partie supérieure, allait s'appliquer à la surface de l'asque (fig. 18); l'ensemble rappelait la figure classique des phases préparatoires de la formation du périthèce chez *Pyronema confluens* et se rapportait d'une manière frappante aux stades jeunes de la formation des asques dans le genre *Tuber*, tels que M. le professeur Errera les a observés.

Le mode de formation et les détails de structure des asques conduisent donc à considérer *Mylitta australis* comme un Ascomycète hypogé.

Le résultat de ces observations a été soumis à M. le professeur Errera, qui l'a pleinement confirmé.

Si l'on compare entre eux les différents aspects sous lesquels se présente *Mylitta australis*, et si l'on tient compte en même temps des caractères histologiques, on voit que les trois types qui ont été décrits doivent être considérés comme des stades successifs du développement du carpophore.

Le type à veinules est une forme jeune, dans laquelle la majeure partie des tissus est gorgée de matériaux de réserve, de nature exclusivement cellulosique. Les réserves glycogéniques ne se rencontrent chez les Champignons du genre *Mylitta* à aucun stade de leur développement. On connaît d'autres Champignons supérieurs chez lesquels il existe dans le carpophore des réserves cellulosiques; *Collybia fusipes*, si caractéristique par le développement qu'acquiert son stipe, renferme dans la membrane épaissie des hyphes qui forment cet organe, d'assez grandes quantités de matières cellulosiques. Je pense cependant qu'il existe peu de carpophores de Basidiomycètes ou d'Ascomycètes possédant uniquement des réserves de cette espèce.

Il est intéressant de constater combien la nature d'une adaptation imprime un caractère commun aux organismes qui la présentent, quelle que soit d'ailleurs la nature morphologique des organes auxquels elle s'applique. Les sclérotes à réserves exclusivement cellulosiques sont caractérisés par la

Digitized by Google

dimension, la forme massive, la réfringence des hyphes dont ils sont composés; ces caractères sont également ceux des tissus jeunes de *Mylitta,* gorgés de matières cellulosiques, et cette identité d'aspect justifie pleinement l'opinion soutenue par plusieurs auteurs; il est pour ainsi dire nécessaire de rapporter aux sclérotes accumulateurs d'Hyménomycètes les exemplaires jeunes de *Mylitta,* quand on ne dispose pas d'une série bien complète d'échantillons à divers états de maturité. Les sclérotes à réserves cellulosiques sont encore caractérisés par leurs dimensions très grandes; cette particularité se retrouve également très accusée chez *Mylitta australis.* Comme on le verra plus loin, le genre *Mylitta* doit être rangé parmi les Tubéracés; c'est actuellement du moins le seul genre de ce groupe ayant des réserves exclusivement cellulosiques, et certainement celui dans lequel le carpophore arrive au plus grand développement (25 centimètres de diamètre). De même que dans les sclérotes à réserves cellulosiques, il faut probablement rechercher la cause de ce développement en volume dans la nature chimique des réserves accumulées.

La première modification que subissent les tissus du jeune carpophore, est la différenciation progressive d'un tissu particulier qui divisera finalement la masse primitivement homogène en alvéoles isolées les unes des autres. Un double résultat est atteint par cette disposition particulière. En premier lieu, il faut considérer que les échanges sont certainement fort difficiles au sein de la masse compacte formée par les hyphes massives à réserves nutritives, et un premier effet de la division en alvéoles est de favoriser le développement des corps reproducteurs en fractionnant le tissu accumulateur en petites masses renfermant à la fois une partie déterminée de filaments ascogènes et les réserves qui leur sont nécessaires; ces différents fragments peuvent ainsi évoluer plus indépendamment les uns des autres. Cette modification de la structure est, comme on le voit, en rapport avec le volume de l'organisme; elle est parallèle à la différenciation du tissu conducteur chez les gros sclérotes à réserves cellulosiques, car la formation de ce dernier est due à la même cause. En second lieu, la fragmentation de la masse homogène primitive doit faciliter aussi la désagrégation finale du carpophore lorsqu'il est parvenu à toute sa maturité. On sait, en effet, que les spores des Tubéracés

Digitized by Google

sont mises en liberté par la décomposition du carpophore. Ce phénomène se produit également chez *Mylitta* (pl. V, fig. 10, 11), et il est évident que les agents de cette désorganisation doivent exercer plus rapidement et plus facilement leur action sur un tissu fractionné, offrant une très grande multiplication des surfaces, que sur un tissu compact, où la surface d'attaque serait infiniment moins considérable.

En même temps que se constituent les alvéoles, d'importants changements se font dans le tissu corné qui les remplit; la réaction du tissu de l'alvéole devient acide et les hyphes massives dont il est formé dissolvent leur contenu, qui se transforme en une substance gélatineuse anhiste remplissant toute l'alvéole. C'est dans ce bain de substance nutritive que les filaments ascogènes se transforment en asques; leur nutrition se fait d'une manière comparable à celle de l'embryon dans les graines à albumen; soit comme dans les graines à albumen oléagineux, si les zymases se développent dans les hyphes massives, soit plus vraisemblablement (puisque ces dernières, n'ayant plus de cavité cellulaire, sont dépourvues d'activité vitale), comme dans les graines à albumen amylacé ou cellulosique, si les zymases prennent naissance dans les hyphes ascogènes.

Un des faits les plus étranges que révèle l'étude histologique de *M. australis*, est la présence dans les tissus du carpophore adulte de deux espèces de corps reproducteurs. Il semble difficile, en effet, de ne pas considérer comme des asques, les hyphes ovoïdes qui sont si abondantes dans certains exemplaires et que l'on trouve toujours en plus ou moins grande quantité dans les carpophores mûrs. Il n'existe guère d'exemples comparables chez les autres Ascomycètes. On sait cependant qu'il y a dans plusieurs cas de grandes différences dans l'appareil conidien d'une même espèce. Ces exemples tendent à prouver que ce dimorphisme des corps reproducteurs n'est pas un fait isolé, mais ils demandent à être confirmés en ce qui concerne les asques. Il ne paraît pas prudent de faire actuellement des hypothèses quelconques au sujet du rôle qui incombe respectivement aux deux espèces de corps reproducteurs de *M. australis* dans la propagation de l'espèce; il faudrait pour cela pouvoir étudier le développement du Champignon à l'état vivant. On peut simplement remarquer que l'on rencontre

Digitized by Google

les petits asques à tous les moments de l'existence du carpophore, qu'ils existent encore dans les exemplaires en voie de désorganisation, et qu'il semble y avoir une sorte de prépondérance de l'une ou de l'autre des formes d'asques dans des exemplaires déterminés.

Lorsqu'on examine un exemplaire adulte de *M. australis*, on est surpris du très petit nombre d'asques mûrs qu'il renferme, tandis que les asques jeunes sont extrêmement abondants; il semble qu'une cause générale influe d'une manière défavorable sur le développement des corps reproducteurs. Il est certain que la nature chimique des réserves, et surtout leur répartition en une masse compacte extérieure aux filaments ascogènes, doivent exercer une influence à cet égard. Est-ce là une cause prépondérante ou existe-t-il indépendamment une tendance à l'aposporie provenant de causes plus éloignées? Il est dans tous les cas intéressant de rapprocher de ce phénomène le fait que l'on n'est jamais parvenu à faire germer les spores de *Tuber*.

Si cependant les spores mûres de *M. australis* sont chargées de la propagation de l'espèce, le petit nombre de cellules reproductrices formées par les individus adultes, n'a qu'une importance relative, car, eu égard au volume très grand des carpophores, le nombre des spores mises en liberté par ceux-ci est en définitive considérable. La forme des asques et des spores, la présence constante d'un tissu stérile nettement différencié, la marche générale des phénomènes physiologiques, l'habitat enfin, rapprochent beaucoup les *Mylitta* des Tubéracés et justifient suffisamment la place du genre dans ce groupe. Si d'ailleurs on recherche les formes des Tubéracés auxquelles ils pourraient être le plus étroitement alliés, on voit que la structure générale de *Mylitta* a de grands rapports avec celle de *Terfezia*. Ce type présente comme *Mylitta* une tendance très nette à grouper ses asques en petites masses arrondies, isolées par une couche continue de tissu stérile, tendance réalisée au plus haut point chez *Genabea*. C'est avec beaucoup de raison que Von Tavel (43) réunit ces formes ainsi que le genre *Delastria* dans un groupe commun; il convient aujourd'hui d'y joindre *Mylitta*, bien que ce genre offre une tendance à la formation d'un hyménium interne; c'est là, me semble-t-il, l'interprétation rationnelle qu'il convient de donner aux cavités si caractéristiques que l'on rencontre dans les exemplaires mûrs de

Digitized by Google

M. australis. J'ai démontré qu'on ne doit pas les considérer comme produites accidentellement par la dessiccation; qu'elles sont, au contraire, formées pendant la période de maturité, et dans certains exemplaires on observe que le tissu blanchâtre qui les recouvre renferme une quantité remarquable d'asques appartenant au type le plus petit, qui seul peut se développer hors des alvéoles. Dans ce cas, la formation offre une remarquable analogie avec la figure classique du carpophore de *Tuber rufum* dans laquelle on voit les asques se produire surtout au voisinage des lacunes aérifères. De même que la division en alvéoles doit être considérée, en partie du moins, comme un moyen de favoriser la dissémination, de même il faut interpréter la formation des lacunes aérifères, aussi bien chez les Tubéracés en général que chez *Mylitta,* comme un moyen de favoriser la dissémination en rapport avec le volume et la forme compacte du carpophore. Chez *Mylitta,* qui appartient à une tribu ne présentant pas encore des lacunes aérifères, cette formation serait encore à ses débuts et, adaptation peu fixée, elle n'aurait pas encore acquis la constance de caractères qu'elle présente dans les autres formes de Tubéracés, où elle existe depuis longtemps.

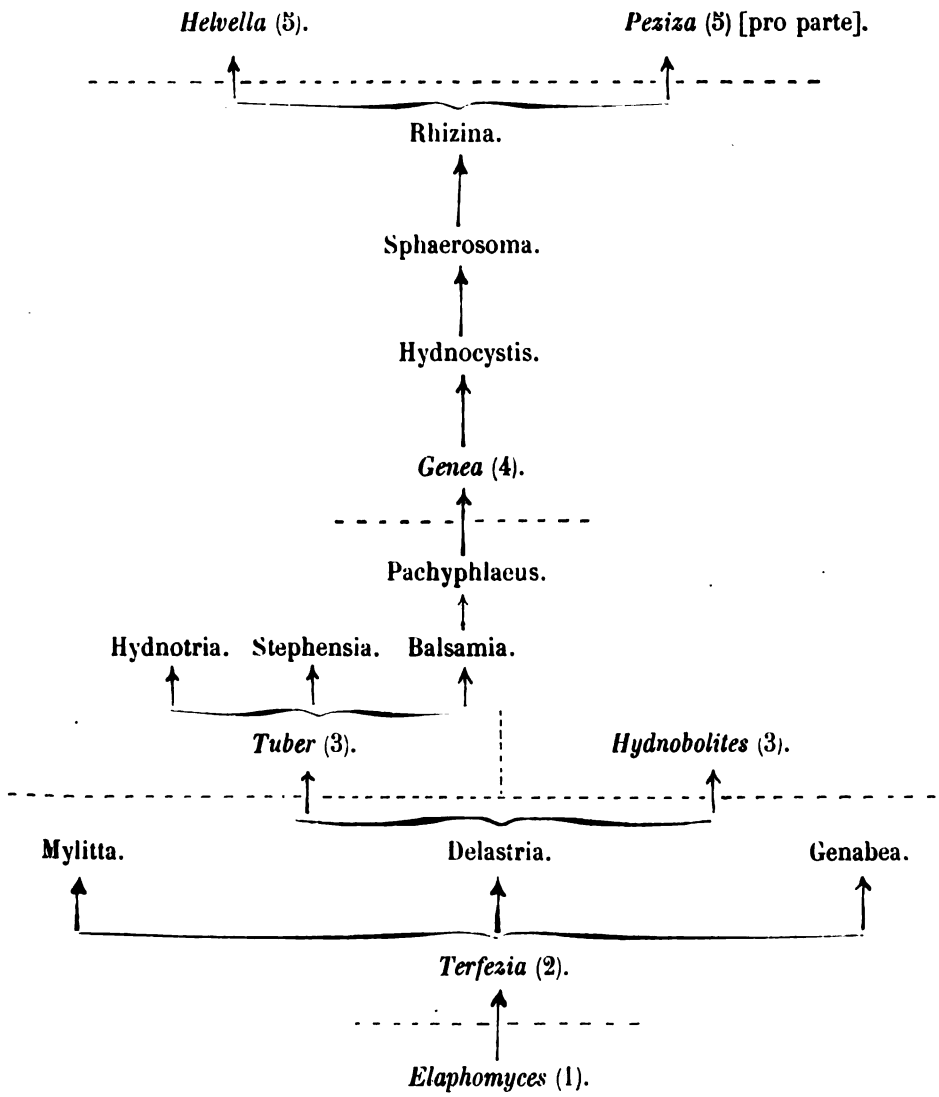
Il est difficile actuellement, faute d'une classification naturelle, de se faire une idée synthétique du groupe si intéressant cependant des Tubéracés. Il existe simplement une division en Elaphomycés et en Tubérés (Tulasne) (42) à laquelle on a ajouté un groupe des Terféziés (Von Tavel), mais il ne me semble pas que ces classifications rendent exactement compte de la filiation probable des formes nombreuses et très différentes du groupe.

Un examen attentif de l'anatomie comparée des Tubéracés démontre que la dominante de leur évolution est en premier lieu la différenciation du tissu stérile; cette différenciation atteint un haut degré chez les Terféziés, on voit ensuite se superposer à cette première transformation du tissu capillitial primitif, la formation d'un hyménium interne qui, en s'exagérant toujours, finit par devenir externe chez *Genea* et *Rhizina.* Par cette dernière forme s'établit le passage des Tubéracés aux formes à hyménium si caractérisé des Discomycètes. Il paraîtra peut-être inexact de faire procéder ces formes gymnocarpes de formes angiocarpes; mais, indépendamment des arguments phylogénétiques, le développement des Discomycètes fournit des arguments

Digitized by Google

ontogénétiques, car on sait que dans leur développement les Pezizes sont d'abord angiocarpes.

Je donne ci-après l'esquisse de l'évolution des Tubéracés, en accord avec les idées que je viens d'exposer.



Les noms des types caractéristiques de chaque série sont en *caractères italiques ;* ils sont accompagnés d'un numéro qui indique leur degré de différenciation. Les différentes séries sont séparées par un trait interrompu.

Digitized by Google

Cooke et Massee (44) ont décrit un Polypore, *P. mylittæ*, croissant sur *Mylitta australis* (pl. V, fig. 12, 13). Cette espèce est voisine de *P. ovinus* et de *P. tumulosus*. Saccardo (45) a trouvé les corps reproducteurs dans un exemplaire de *Mylitta* portant ce Polypore; il a rapporté l'ensemble constitué par *Mylitta* et le Polypore aux formations cériomycétiennes que l'on rencontre chez les Polyporés. Il considère les asques comme des spores, interprétation qui ne paraît pas fondée, étant donnée la présence de plusieurs spores rudimentaires dans les asques jeunes.

Si le fait de la présence du Polypore sur *Mylitta* était isolé, on serait en droit de l'interpréter comme un cas de parasitisme; or, sans être fréquente, cette relation existe assez souvent. Un fermier de Tasmanie avait réuni, en vue de l'exploitation industrielle, plusieurs centaines de tonnes de *Mylitta* qu'il avait trouvé dans les alluvions d'une rivière. Ces exemplaires, arrachés par les crues de la rivière du sol des forêts où ils s'étaient développés, s'étaient amassés en grand nombre dans les alluvions. Une centaine d'entre eux portaient encore des carpophores plus ou moins développés.

Peut-être aurait-on affaire à un cas de parasitisme tel que celui que présente *Cordyceps ophioglossoides* ou *Boletus parasiticus* qui se développent toujours, le premier sur *Elaphomyces,* le second sur *Scleroderma.* Un exemplaire de *Mylitta australis* du British Museum (pl. V, fig. 14, 15), vient heureusement écarter les doutes que l'on pourrait conserver. Ce spécimen offre, comme beaucoup d'autres, une large cavité centrale; sur l'une des parois de cette cavité, on voit une sorte de coussinet formé par l'hyménium de *P. mylittæ* qui présente tout à fait l'aspect des fragments d'hyménium qui se développent sur les formations ptychogastériennes de certains Polypores (46) [1].

Ce coussinet ne possède pas de vrais pores; on ne trouve à sa surface que de petites excavations hémisphériques; par contre, toute la masse du tissu renferme dans son épaisseur de nombreuses petites cavités closes, arrondies, qui sont entièrement tapissées par l'hyménium. Je pense que c'est à une semblable formation qu'il faut rapporter certaines figures de l'analyse que

[1] Les pages 82 à 86 ont été ajoutées au moment de l'impression, en vertu de l'autorisation donnée par la Classe des sciences dans sa séance du 8 mai 1894.

Digitized by Google

Corda (47, fig. 93) a donnée de *M. australis* dans ses *Icones;* il figure un tissu en palissade qui a tout à fait l'aspect d'un hyménium stérile de Basidiomycète et dans lequel on distingue même des éléments plus gros, analogues aux cystides, structure absolument différente de celle que l'on observe normalement chez *M. australis.* La disposition particulière de l'hyménium dont il vient d'être question a déjà été signalée chez les Polyporés; Bulliard a figuré sous le nom de *Cellularia cyathiformis* (48, pl. 414) un Polypore stipité de taille moyenne qui présente également au lieu de pores vrais une zone de petites cavités closes dont les plus superficielles s'ouvrent à l'extérieur.

Le tissu qui forme le coussinet hyménial est identique au tissu blanc opaque qui constitue la paroi des alvéoles des exemplaires de *Mylitta australis* parvenus à maturité. Autour de la lumière des pores, les hyphes plus épaisses et plus serrées prennent la disposition en palissade si caractéristique dans l'hyménium des Hyménomycètes; l'exemplaire est malheureusement stérile.

La disposition particulière de cet hyménium, rappelant celle de l'hyménium imparfait des formations ptychogastériennes, la continuité et l'identité de substance existant entre cet hyménium et le tissu stérile de *Mylitta,* autorisent à établir qu'il existe entre *Mylitta* et le Polypore une relation intime de même nature que celle qui, dans un type présentant deux espèces de corps reproducteurs, unit le carpophore typique aux corps reproducteurs d'ordre secondaire que la même espèce peut produire.

Il résulte de cette interprétation qu'un carpophore d'Hyménomycète (*P. mylittæ*) est ici en réalité le conidiophore d'un carpophore d'Ascomycète (*M. australis*). Si cette conclusion semble exacte dans le cas présent, on doit admettre que cette relation existe d'une manière générale entre les formes des Basidiomycètes et celles des Ascomycètes.

De Bary (2, p. 594) a émis, il y a déjà longtemps, l'idée que les Basidiomycètes et les Urédinés pouvaient être des formes conidiennes d'Ascomycètes. Brefeld (49, p. 350), tout en considérant également les types de ces groupes comme des formes conidiennes, n'est cependant pas d'avis de les rapporter directement à des types Ascomycètes. Il les regarde comme provenant de la différenciation des formes conidiennes des Zygomycètes, tandis

Digitized by Google

que les Ascomycètes proviendraient de l'évolution des formes typiques à sporanges du même groupe.

Certains faits (*Armillaria mellea*, *Nyctalis*) (2, p. 366), dont l'appréciation est, il est vrai, fort délicate, tendent à établir un rapport direct entre quelques formes de Basidiomycètes et le groupe des Ascomycètes et on vient de voir que l'exemple de *M. australis* et de *P. mylittæ* semble devoir être interprété dans le même sens.

Si l'on considère l'hypothèse au point de vue théorique, sans tenir compte des faits particuliers sur lesquels elle peut s'appuyer, on voit qu'elle ne présente rien d'invraisemblable et qu'elle ne nécessite aucune interprétation nouvelle des phénomènes connus jusqu'ici.

Il n'existe pas de caractère permettant de séparer nettement les basides des conidies des Ascomycètes. On rencontre même chez certaines Pezizes des conidies offrant une grande analogie avec les basides typiques (50, pl. XIII, fig. 17). Les basides se distinguent seulement par la fixité de leurs caractères ; mais outre que beaucoup de conidies ont des caractères assez fixes, il est évident que des appareils conidiens ayant pris l'importance des carpophores de Basidiomycètes doivent être assez étroitement adaptés et présenter, en conséquence, une grande fixité dans les détails de leur structure.

Ce haut degré de spécialisation des conidiophores existe d'ailleurs chez les conidiophores proprement dits des Ascomycètes.

Chez *Nectria cinnabarina* (30, vol. III, pl. XII), il existe un véritable conidiophore formé d'un massif de tissu stérile recouvert d'un hyménium conidien. Cette formation secondaire prend dans beaucoup d'individus un développement aussi considérable que les périthèces.

Chez *Sphaerostilbe aurantiaca* et *S. gracilipes* (30, vol. III, pl. XIV), non seulement le conidiophore se différencie davantage, c'est une sorte de massue stipitée de forme bien définie, mais encore son volume dépasse très notablement celui des carpophores à asques. Enfin, chez *Erysiphe guttata* (30, vol. I, pl. I), il se développe sur le carpophore un appareil conidien dont les éléments bien spécialisés ont quelque analogie avec les basides. Cet appareil est protégé, comme le carpophore, par une sorte de péridium résistant qui lui est propre. Dans ce Champignon, les deux systèmes reproducteurs, le système typique à asques et le système secondaire conidien,

Digitized by Google

sont réunis en un même individu et jouissent tous deux d'un degré de différenciation très comparable.

Les exemples qui viennent d'être cités montrent que l'appareil conidien peut être en rapport direct avec le carpophore et que l'association des deux systèmes reproducteurs en un même individu n'est pas rare; ce caractère est donc loin d'être exceptionnel dans le cas de *M. australis* et *P. mylittæ*.

Si l'on admet que les Basidiomycètes sont des formes conidiennes d'Ascomycètes, il faut bien reconnaître que, dans l'immense majorité des cas, une semblable association n'existe pas. Brefeld (49, Heft VIII, p. 264), en admettant la possibilité théorique de cette relation entre les deux groupes, rejette l'hypothèse comme invraisemblable, parce qu'il ne peut admettre que les deux systèmes reproducteurs prennent simultanément un développement très grand. Les exemples précédents ont montré que le développement simultané se réalise parfois d'une manière très nette. Il me semble que l'argument du balancement organique invoqué par Brefeld, non seulement n'est pas valable dans le sens où il veut l'employer, mais qu'il est plutôt favorable à la manière de voir de de Bary. On ne connaît guère, en effet, d'Ascomycètes dont le développement soit uni à celui de types Basidiomycètes; le seul exemple positif connu serait *M. australis* et *P. mylittæ*. Or, cet exemple prouve que cette relation intime peut exister, et rien n'autorise à la regarder comme constituant une exception aux lois du développement des Ascomycètes et des Basidiomycètes. Il faut donc admettre que, dans la plupart des cas, le carpophore Ascomycète a disparu en vertu d'un véritable balancement organique qui fait disparaître l'un des modes de reproduction quand l'autre devient prépondérant. C'est en invoquant ce balancement organique que Brefeld a montré que les types très évolués d'Ascomycètes n'ont pas de mode de reproduction secondaire; réciproquement, les types qui ont des appareils conidiens très développés n'ont plus de formes à asques.

Il est intéressant de remarquer que dans le seul cas où nous voyons nettement un carpophore à asques uni à un conidiophore à basides, le premier présente une dégénérescence profonde dans la formation des corps reproducteurs; il semble qu'il y ait là une application du même principe général.

L'étude des relations qui existent entre *M. australis* et *P. mylittæ* soulève

Digitized by Google

un grand nombre de questions fort importantes qui ne peuvent être traitées ici et dont l'examen approfondi fera l'objet d'un travail ultérieur.

Mylitta lapidescens Hor.

L'examen de nombreux échantillons de ce Champignon, provenant de localités très différentes (Chine, Japon, Formose, Jamaïque), m'a démontré que cette espèce a de grandes analogies avec *M. australis*. On trouve des exemplaires dans lesquels la substance interne, translucide et de consistance cornée, est traversée par de fines veinules de tissu blanc opaque (pl. V, fig, 16); dans d'autres spécimens, on remarque une division très nette de la masse en alvéoles limitées par le tissu blanc (pl. V, fig. 17).

La structure histologique correspond également à celle de *M. australis;* toutefois je n'ai pas trouvé trace de corps reproducteurs dans les échantillons que j'ai examinés; il faut en conclure que le système reproducteur est encore plus dégénéré dans cette espèce que dans la précédente; les asques doivent être très rares ou même manquent complètement. Ce fait n'a rien d'étonnant si l'on se rappelle les profondes marques de dégénérescence qui caractérisent déjà l'appareil reproducteur de *M. australis :* la production de deux espèces très distinctes de corps reproducteurs dans le même carpophore; la rareté fréquente des asques de la grande variété, qui sont plus rapprochés de la forme typique des asques des Tubéracés que ceux de la petite variété; enfin la très faible proportion des asques mûrs des deux variétés.

Étant donnés les rapports étroits qui unissent les deux espèces du genre *Mylitta,* je ne pense pas que l'on puisse admettre l'opinion émise par Cohn et Schroeter qui considèrent *M. lapidescens* comme le sclérote d'*Omphalia lapidescens* (14). Il n'est cependant pas impossible qu'il existe entre ce Champignon Basidiomycète et *M. lapidescens* une relation du même ordre que celle qui unit *P. Mylittæ* et *M. australis;* il serait désirable que de nouvelles observations vinssent confirmer le fait observé une fois seulement par les savants allemands, afin d'écarter l'hypothèse que le carpophore d'*Omphalia lapidescens* se soit développé en parasite sur *M. lapidescens.*

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

CONCLUSIONS.

Les exemples d'agglomérations mycéliennes qui viennent d'être exposés montrent le caractère général de certaines adaptations dans le règne végétal. La véritable dégénérescence, dont une longue accoutumance à la vie parasitaire a frappé l'appareil végétatif des Champignons, ne laisse pas soupçonner la variété des différenciations dont il est susceptible. Et cependant, au point de vue de la nature de ces adaptations, on voit se reproduire dans ce groupe, composé tout entier de types parasites ou saprophytes, plusieurs des modifications principales que présente l'appareil végétatif des végétaux supérieurs. Ainsi que ce dernier, le mycélium des Champignons peut offrir des adaptations offensives, propagatrices, protectrices et accumulatrices.

La présence de ces adaptations dans un groupe dont l'appareil végétatif est aussi dégénéré, est la preuve la plus convaincante de l'importance de ces différenciations pour les végétaux. Si l'on remarque, d'autre part, qu'elles sont peu développées dans les groupes de Champignons inférieurs et qu'elles ne le sont guère non plus chez les Algues, il est permis de considérer le grand développement qu'elles prennent chez les Champignons supérieurs comme une preuve immédiate du caractère très évolué de ces derniers types. Il n'existerait pas actuellement de formes d'Algues qui leur soient exactement comparables, comme il en existe pour les types de Champignons moins différenciés. Les rapports unissant les Champignons à carpophore (Basidiomycètes et Ascomycètes) aux Floridées (50, 51) ne seraient guère intimes, les Champignons à carpophore étant parvenus à un degré d'évolution bien supérieur.

Si cette assertion semble hasardée et si l'on veut ne pas tenir compte de l'argument précédent, on pourrait trouver d'autres preuves de ce que

Digitized by Google

j'avance. L'appareil reproducteur d'une plante parasite n'est presque jamais atteint par la dégénérescence imprimée par le parasitisme à son appareil végétatif; on peut donc comparer l'appareil reproducteur d'une plante non parasite à celui d'une plante parasite, sans tenir compte des conditions biologiques dans lesquelles est placée cette dernière; les éléments seront absolument comparables. Si l'on établit une comparaison entre l'appareil reproducteur des Basidiomycètes, des Ascomycètes et celui des Floridées, on reconnait que le même principe a présidé à leur formation; mais on doit convenir que les Champignons supérieurs ont évolué beaucoup plus loin que les Floridées dans la direction qui leur est commune.

La comparaison des adaptations de l'appareil végétatif des Champignons avec celles que l'on observe chez les végétaux supérieurs, peut se poursuivre très loin, tant au point de vue morphologique qu'au point de vue physiologique.

Les adaptations offensives sont peu nombreuses chez les Champignons; la plus caractéristique est peut-être celle des haustoires des Péronosporés, d'autant plus remarquable qu'elle se produit chez des Champignons dont la vie est tout à fait parasitaire. Ces haustoires, expansion des filaments mycéliens, plongeant seuls à l'intérieur des cellules de la plante nourricière, sont absolument comparables aux suçoirs de plusieurs Phanérogames parasites, telles que *Thesium* ou *Cuscuta*.

On peut également considérer comme une modification offensive les rhizomorphes qui se développent sous l'écorce des arbres et dont *Armillaria mellea* fournit un exemple caractéristique. Les rhizomorphes appartenant à cette espèce doivent être divisés, au point de vue physiologique, en deux catégories. Les uns, se développant entre le bois et le liber, sont des organes nettement offensifs qu'on peut comparer au système radiculaire spécial du Gui, bien que leur activité destructrice soit infiniment plus grande. Les autres, véritables stolons, doivent être considérés comme des adaptations propagatrices. Ces deux espèces de rhizomorphes sont dans une dépendance étroite. Les rhizomorphes subcorticaux offensifs émettent, au dehors des racines, des rameaux propagateurs se développant dans le sol, qui, arrivés

Digitized by Google

au contact des racines d'autres arbres, y pénètrent en se ramifiant abondamment entre le bois et l'écorce et se transforment de nouveau en organes offensifs.

Les adaptations propagatrices, dont le cas le plus simple est représenté par *Rhizopus nigricans*, aboutissent, chez les Champignons supérieurs, à la formation d'un système végétatif spécial, beaucoup plus condensé que le système ordinaire. Dans l'exemple typique de *Phallus*, il se constitue une sorte de rhizome possédant plusieurs systèmes de tissus. Il existe un tissu protecteur externe (épiderme) auquel fait suite un parenchyme abondamment pourvu de matières de réserve (parenchyme cortical) et entourant un cylindre central formé d'éléments larges et longs, destinés probablement à assurer la rapidité des échanges. Ces mêmes éléments remplissent les fonctions d'organes d'excrétion, comme le prouve la présence constante de cristaux d'oxalate de chaux ; enfin, c'est à eux également qu'est dévolu le rôle de tissu mécanique destiné à donner à l'ensemble cette résistance si caractéristique des vrais cordons propagateurs et qui doit contribuer puissamment à assurer leur conservation. Il est, me semble-t-il, plus logique d'interpréter aussi de cette manière l'épaississement si notable des éléments larges, au lieu d'y voir seulement une accumulation de réserves. Le système particulier des hyphes vasculaires ne manque jamais non plus aux cordons propagateurs proprement dits. Enfin, un appareil d'absorption, formé parfois de portions différenciées des cordons propagateurs (*Phallus*), d'autres fois fourni par certaines hyphes superficielles de ces derniers (*Collybia platyphylla, Cyathus striatus*), vient compléter cet ensemble fonctionnel.

Cette condensation de tissus si différents comme structure et comme fonctions, a pour effet de constituer un système complet par lui-même, comparable à celui d'une tige typique et capable, par conséquent, de résister dans une large mesure à toutes les vicissitudes que peut subir l'appareil végétatif diffus ordinaire. Le développement dont un tel système est susceptible par suite de cette résistance, en fait un agent parfait de propagation, plus indépendant et plus sûr dans son fonctionnement que le processus long et souvent hasardeux des phénomènes normaux de la reproduction.

Digitized by Google

Dans d'autres cas (*Xylaria Tulasnei*), la fonction des cordons propagateurs est plus simple; ils servent uniquement à aider à la dissémination de l'espèce, en éloignant les carpophores de l'endroit où le mycélium s'est développé d'abord.

Les cordons propagateurs, caractérisés par la réunion en un système condensé d'un appareil diffus d'ordinaire, offrent une analogie remarquable avec les rhizomes des plantes supérieures qui sont, de même, destinés dans bien des cas (*Pteris, Equisetum, Lolium*) à assurer efficacement la propagation de l'espèce, indépendamment du système reproducteur. Chez ces derniers aussi, on voit se constituer un système condensant à la fois les fonctions de la tige et celles de la racine, auxquelles, dans le cas de certains *Polypodium,* s'ajoutent encore celles des feuilles. *Corallorhiza* est un type absolument parallèle à un Champignon tel que *Phallus,* au point de vue du groupement de ses fonctions. Cette plante ne comprend, de même que *Phallus,* qu'un système souterrain absorbant et propagateur et un système reproducteur aérien.

Les modifications protectrices du mycélium ont, sans doute, uniquement pour but de soustraire ce dernier à la dessiccation. L'adaptation est, dans ce cas, caractérisée encore par le groupement des éléments mycéliens, soit en cordons, soit en masses compactes. Comme le simple fait du groupement suffit en général pour combattre efficacement la dessiccation, on ne verra plus, dans le cas dont il s'agit, se constituer un ensemble très complexe de tissus. Il y a ordinairement simple juxtaposition des hyphes du mycélium (*Agaricus campestris, Cordyceps ophioglossoides*). Lorsque cette adaptation est constante et fixée depuis longtemps (*Scleroderma, Poronia Doumetii*), les différenciations sont plus profondes, et il y a formation d'une écorce et d'une moelle parfois très caractérisées. Les cordons sont constitués dans *Scleroderma* par un véritable pseudoparenchyme dans lequel les hyphes sont étroitement soudées les unes aux autres, disposition diminuant évidemment la surface d'évaporation. Le système absorbant est limité aux hyphes périphériques qui, seules, ont une certaine indépendance. Enfin, au milieu du cordon, se différencient quelques grandes hyphes à larges cavités, à

Digitized by Google

cloisons espacées, facilitant probablement les échanges dans l'ensemble de la formation et assumant aussi le rôle d'organes d'excrétion (oxalate de chaux). La raison de leur présence dans ces cordons, comme dans les cordons propagateurs, est due aux nécessités de la nutrition qui doivent être analogues dans un système semblable, et dès lors exigent des appareils également semblables. L'épaississement des membranes des hyphes doit être considéré non comme une accumulation de réserves, mais comme un moyen de défense contre la dessiccation. Indépendamment de leur structure plus simple, le développement relativement très faible (quelques centimètres) des formations dont il est question, empêchera toujours de les confondre avec les cordons propagateurs.

Plus efficace encore, au point de vue de la protection contre le desséchement, est le groupement du mycélium, non plus en cordons nombreux et séparés, mais en une masse compacte. Déjà dans les *Scleroderma,* particulièrement chez *S. vulgare* et *S. Bovista,* les cordons ont une tendance à se grouper et constituent même, par leur fusion partielle, un petit massif de tissu compact, à la base du péridium. Mais c'est chez *Polysaccum* que l'on voit apparaître cette modification comme une formation fixée et bien définie. Chez *Polyporus lucidus* enfin, bien que le groupement du mycélium soit peut-être moins dense que dans le type précédent, la présence d'une écorce continue autour des éléments mycéliens assure à ceux-ci une protection parfaite.

Ici encore nous trouvons à établir facilement un parallèle avec des adaptations semblables chez les plantes supérieures. Le groupement partiel en cordons est tout à fait analogue à la réduction des surfaces que l'on observe, par exemple, chez *Colletia cruciata* ou *Euphorbia Canariensis,* et la condensation en une masse compacte se trouve réalisée chez un grand nombre de Cactées : *Cereus, Echinocactus,* etc.

Les adaptations accumulatrices sont peut-être les plus importantes de toutes, au moins si l'on en juge par le grand nombre de types qui les présentent et par la diversité des modifications qu'elles impriment à l'appareil végétatif. Elles sont presque toujours associées à des adaptations protectrices,

Digitized by Google

auxquelles est due l'écorce des sclérotes. Ces formations offrent deux types différents ; le premier comprend les sclérotes dans lesquels persistent un certain nombre d'éléments filamenteux du mycélium non transformés ; leur structure est hétérogène. Le second renferme les sclérotes dont toute la masse est formée d'hyphes métamorphosées et dont la structure est homogène. En comparant les caractères généraux de ces deux types, on voit que la modification est moins profonde chez le premier.

Dans les sclérotes à tissu hétérogène, la présence constante d'hyphes mycéliennes non modifiées est l'indice d'une transformation imparfaite. Le caractère peu différencié des sclérotes de cette catégorie se trouve également indiqué par la nature de leurs réserves. Ce sont des substances cellulosiques existant dans les hyphes normales dont la proportion s'est simplement accrue ; il n'y a pas formation de matières de réserves spécialement élaborées, telles que des huiles ou du glycogène. Ces sclérotes sont très volumineux et d'un développement lent. Bien que la production des carpophores se manifeste à plusieurs reprises sur un même sclérote, il semble y avoir disproportion entre la masse des matériaux accumulés et la quantité réellement utilisée par les appareils reproducteurs, relativement peu nombreux. Une preuve évidente de ce fait est fournie par le sclérote de *Polyporus umbellatus,* qui produit si rarement des carpophores, et surtout par *Pachyma cocos,* dont la fructification n'est pas encore connue.

Le type de sclérotes à tissu homogène est plus modifié ; la masse tout entière est formée d'un tissu accumulateur, susceptible de différenciations très profondes, dont les éléments conservent quelquefois, jusqu'à un certain point, l'allure allongée des hyphes mycéliennes (*Collybia tuberosa* et *C. racemosa*), mais affectant plus généralement les caractères d'un tissu pseudo-parenchymateux à cellules isodiamétriques, pouvant présenter des détails de structure très délicats, tels que les ponctuations des cellules du sclérote de *Peziza mycetophila* (1). Le développement des sclérotes est ici bien mieux en rapport avec le rôle qu'ils sont appelés à remplir. Leurs dimensions sont faibles et leurs réserves, rapidement accumulées, sont utilisées tout entières en une fois pour la production d'un seul carpophore, rarement plus. Les réserves sont formées de substances spécialement élaborées comme telles,

Digitized by Google

des huiles ou du glycogène; les réserves cellulosiques qui peuvent exister aussi, sont toujours en bien moindre proportion.

Il faut, me semble-t-il, rechercher dans la nature des réserves des sclérotes accumulateurs la cause de l'existence, dans ces formations, de deux types de différenciation inégale. La constitution des réserves peut se faire suivant deux modes principaux, comme on l'observe aussi pour les graines des végétaux supérieurs. Dans le cas le plus général, c'est le contenu cellulaire qui se modifie; il y a formation d'une proportion variable de glycogène ou de matières grasses. Toutes les cellules offrent un même degré de modification et sont toujours groupées en un tissu très serré, souvent même pseudo-parenchymateux. Les échanges sont faciles d'une hyphe à l'autre, l'utilisation des réserves est rapide et les formations accumulatrices de ce type n'acquièrent que le développement strictement nécessaire pour remplir le rôle qui leur est dévolu. Les réserves peuvent, d'autre part, être exclusivement cellulosiques; les hyphes se transforment alors en rameaux ou en tubercules massifs. Si toutes les hyphes étaient également métamorphosées de la sorte, les échanges seraient difficiles, et il est nécessaire que des éléments filamenteux moins différenciés remplissent le rôle de tissu conducteur. On a vu qu'il existe même, dans tous les sclérotes à réserves exclusivement cellulosiques, un groupement en tractus de ces hyphes conductrices, formant donc en réalité une sorte de système circulatoire, uniformément réparti dans la masse. Les sclérotes de ce type devront donc acquérir un volume relativement considérable, puisqu'une forte proportion de leurs tissus ne présente pas d'adaptations accumulatrices profondes; c'est probablement à cette cause qu'est dû aussi le développement souvent énorme des Tubéracés à réserves cellulosiques tels que *Mylitta australis*. Les échanges sont lents et difficiles dans les formations dont il s'agit, à cause de leur volume et aussi parce que leurs tissus, en vertu de leur hétérogénéité, ont une structure feutrée, donnant aux hyphes qui les composent une indépendance assez grande les unes vis-à-vis des autres.

Comme Errera l'a indiqué (19), il existe aussi un grand nombre de sclérotes accumulateurs dans lesquels se rencontrent à la fois les deux types de réserves; la membrane des hyphes s'épaissit plus ou moins, mais une

Digitized by Google

large cavité persiste toujours et les échanges ne sont jamais entravés au point de nécessiter la présence d'un tissu spécial de conduction.

On trouve, dans le groupe des sclérotes accumulateurs, des types qui montrent bien nettement le caractère purement adaptatif de ces formations. Ce sont des agglomérations mycéliennes s'adaptant secondairement à une fonction autre que celle en vue de laquelle elles s'étaient d'abord différenciées. Les sclérotes de *Collybia tuberosa* offrent dans leur structure des caractères qui les rapprochent des cordons; ils sont allongés, doués de croissance terminale; les éléments sont groupés parallèlement les uns aux autres; il existe une zone périphérique à hyphes minces et une moelle centrale composée d'hyphes larges. Chez *Collybia cirrhata*, cette distinction en deux zones existe encore, mais la croissance terminale a disparu. On distingue deux couches différentes, caractérisées par le volume des hyphes dont elles sont composées, mais celles-ci ne présentent plus l'allure allongée caractéristique des hyphes des cordons mycéliens; elles sont devenues isodiamétriques. Ces deux exemples doivent être considérés comme des agglomérations mycéliennes en cordons, se transformant secondairement en sclérotes.

L'exemple inverse est réalisé par *Armillaria mellea* (13). Le sclérote typique qui se développe sur le mycélium filamenteux se transforme en cordons soit offensifs, soit propagateurs. On sait que le sclérote primitif est formé d'hyphes larges et courtes, constituant un pseudo-parenchyme. Pour se transformer en cordons, les tissus se différencient; la zone corticale externe conserve seule les caractères du tissu du sclérote, mais, dans la zone interne, les hyphes deviennent larges et longues. Lorsque les cordons ont acquis leurs caractères définitifs, il y a, dans le cas des cordons propagateurs, formation d'une moelle d'origine secondaire, tout à fait comparable à celle des cordons propagateurs typiques; elle est formée comme eux d'hyphes très allongées de deux espèces, les unes larges, les autres étroites, auxquelles sont associées des hyphes vasculaires.

Le sclérote de *P. umbellatus* nous offre l'exemple de la transformation d'un sclérote en cordon propagateur à un stade encore peu avancé. Par suite de l'accroissement prépondérant du sclérote dans certaines directions, il se

Digitized by Google

constitue des espèces de cordons, en vérité très épais et très irréguliers; comme cette adaptation secondaire est encore très imparfaite, rien, dans la structure de ces cordons rudimentaires, ne révèle les caractères si nets des tissus des cordons typiques. L'exemple de *P. umbellatus*, auquel se rattachent ceux de *Peziza sclerotiorum* (52, pl. VIII, fig. 6, et pl. IX, fig. 12), de *Xylaria vaporaria* et de *X. Tulasnei*, justifie l'interprétation que Brefeld a donnée des rhizomorphes d'*Armillaria mellea*, en établissant un passage plus graduel des sclérotes typiques aux cordons d'origine sclérotique de cette dernière espèce, qui sont si profondément modifiés.

Les deux cas d'adaptation secondaire qui viennent d'être cités font bien ressortir le caractère essentiel de la structure des cordons et des sclérotes. L'accumulation des réserves dans les sclérotes accumulateurs tend à leur faire perdre toute activité végétative; les sclérotes les plus typiques sont constitués par un tissu homogène, dans lequel l'accroissement est limité. Aussi les cordons se transformant en sclérotes présentent-ils tout d'abord un ralentissement dans leur croissance terminale (*Collybia tuberosa*); à un stade plus avancé de transformation, la forme allongée de leurs hyphes, en rapport avec la croissance terminale, disparaît et rien ne persiste comme vestige de leur origine, que le caractère hétérogène des tissus (*Collybia cirrhata*).

Les cordons propagateurs sont caractérisés par un accroissement terminal très actif; leurs tissus sont très différenciés, les hyphes qui les composent ont toujours une forme filamenteuse et jouissent d'une certaine indépendance. Aussi, lors de la transformation du sclérote pseudo-parenchymateux d'*Armillaria mellea* en cordons propagateurs, les éléments s'allongent d'abord, le groupement en pseudo-parenchyme tend à disparaître et, dans les cordons parvenus à l'état adulte, se constituent les trois ordres d'éléments des cordons propagateurs typiques.

Les formations accumulatrices sont également très répandues dans les végétaux supérieurs et l'on observe aussi des degrés divers dans leur différenciation. Les tubercules très différenciés, tels que ceux de *Solanum tuberosum* ou d'*Orchis*, répondent aux sclérotes à structure homogène. Les formations accumulatrices, telles que les tubercules de *Manihot* ou les

Digitized by Google

rhizomes tubéreux de *Colocasia*, conservant encore dans une grande mesure leur structure primitive, sont plus exactement comparées aux sclérotes à tissu hétérogène.

Les différentes adaptations que présente le mycélium des Champignons supérieurs peuvent être groupées comme l'indique le tableau synoptique que j'ai dressé. Cette classification repose sur les caractères morphologiques des formations adaptatives du mycélium. Fayod a donné (2), dans son *Histoire naturelle des Agaricinés*, l'esquisse d'une classification des différenciations présentées par le mycélium de ces végétaux; elle est basée aussi sur les caractères morphologiques et concorde en plusieurs points avec la division que j'ai établie. Je ne partage cependant pas l'avis de cet auteur en ce qui concerne le sclérote de *Lentinus Tuber Regium* et les rhizomorphes d'*Armillaria mellea;* il considère le premier, qui est très semblable, sinon identique au sclérote de *Lentinus Woermanni*, comme une concrétion mycélique, c'est-à-dire une simple variété du mycélium persistant, filamenteux, et les derniers comme des cordons à écorce sclérotisée.

Une classification basée sur les caractères morphologiques peut seule fournir une vue synthétique sur l'ensemble des adaptations du mycélium, mais ne donne pas un groupement homogène de ces formations. Il ne faut pas, en effet, perdre de vue le caractère nettement adaptatif de toutes les agglomérations mycéliennes, qui ne sont, par conséquent, reliées les unes aux autres par aucun rapport génétique; on ne peut même comparer entre elles les formations morphologiquement semblables, telles, par exemple, que les cordons ou les sclérotes, car ces divisions renferment aussi des éléments hétérogènes, tant au point de vue physiologique qu'au point de vue systématique. Il n'y a de comparable, et seulement en ce qui regarde le degré de différenciation, que les adaptations de même nature; la seule classification naturelle possible devrait être basée sur les fonctions des agglomérations mycéliennes; malheureusement, un tel groupement a l'inconvénient de n'être pas en rapport avec les caractères morphologiques des types qu'il réunirait. De plus, certaines espèces, telles que *Armillaria mellea*, devraient entrer dans trois catégories différentes.

Digitized by Google

C'est aussi à cause du caractère adaptatif des différenciations du mycélium qu'il n'existe aucun rapport entre la nature de ces formations et la place occupée dans la classification par les Champignons chez lesquels on les rencontre. Ces adaptations n'ont d'autre raison d'être que les nécessités biologiques des organismes qui les produisent; elles peuvent donc exister à un degré très différent chez des formes semblables, ou à un même degré chez des types très éloignés. Il n'y a même pas de différence tranchée entre les agglomérations mycéliennes des Basidiomycètes et celles des Ascomycètes; on ne peut que trouver des variations dans le degré et la fréquence des adaptations mycéliennes. Chez les derniers, on remarque une richesse de formes moins grande, les types y sont aussi représentés par un nombre plus restreint d'exemples.

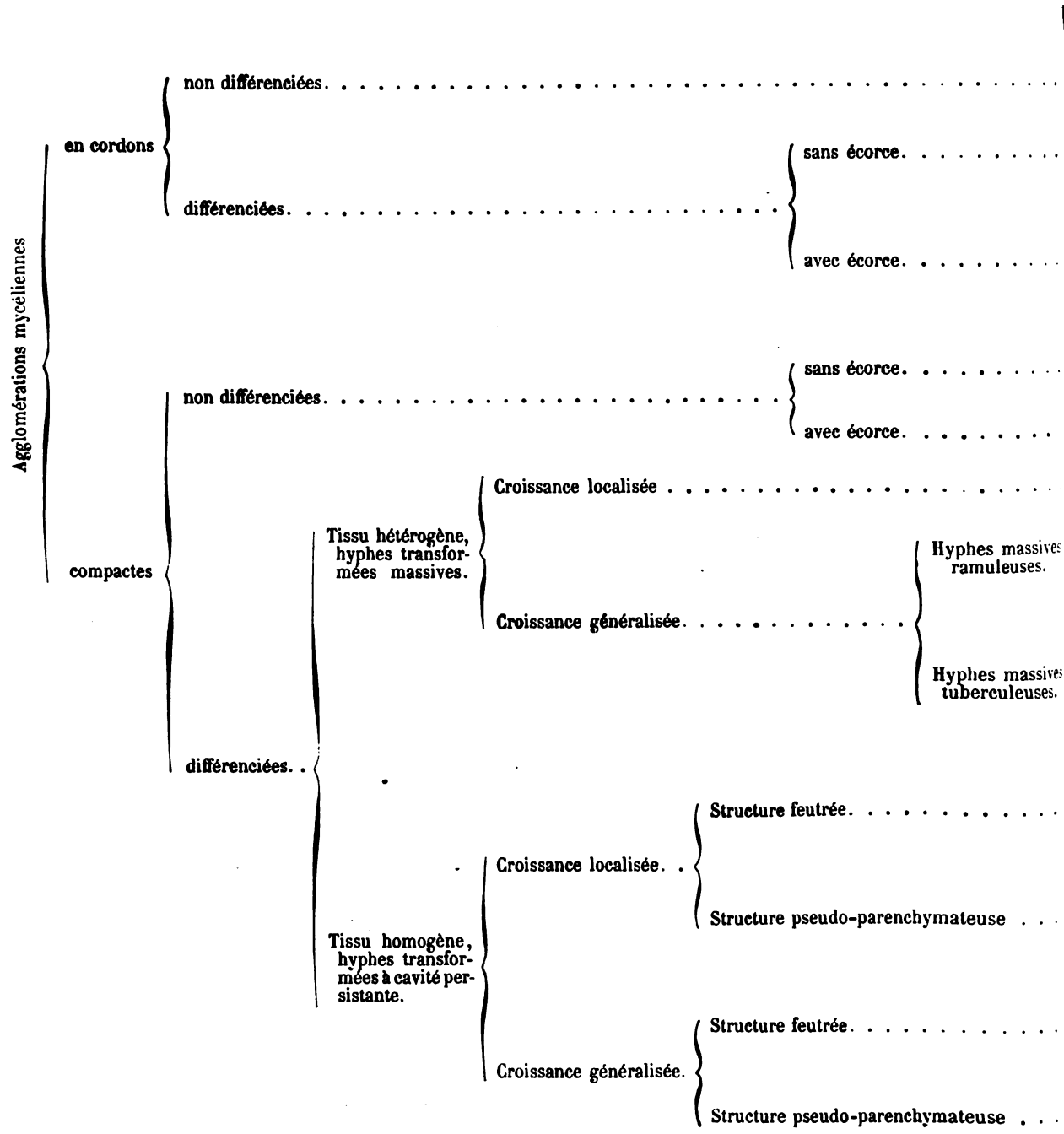
Les cordons, soit protecteurs, soit propagateurs, ne présentent qu'une simple différenciation en écorce et en moelle; celle-ci n'a jamais une structure complexe et ne renferme pas d'hyphes vasculaires. L'oxalate de chaux n'est pas localisé à l'intérieur d'hyphes spéciales.

Les sclérotes ne présentent pas une distinction aussi tranchée au point de vue de la nature de leurs réserves; le type à structure hétérogène et à réserves exclusivement cellulosiques fait défaut.

La structure typique des cordons et des sclérotes est moins marquée; le sclérote de *Xylaria Tulasnei* s'allonge en cordons, sans modifier sa structure comme le fait celui d'*Armillaria mellea*. Il est donc permis d'en conclure que la structure des agglomérations mycéliennes est souvent plus simple et moins différenciée chez les Ascomycètes; mais, à cette restriction près, on est frappé du parallélisme existant entre les différenciations présentées par l'appareil végétatif dans les deux groupes où elles sont surtout développées.

Digitized by Google

DIFFÉRENCIATIONS DU MYCÉLIUM DES



Digitized by Google

BASIDIOMYCÈTES ET DES ASCOMYCÈTES.

BASIDIOMYCÈTES.	ASCOMYCÈTES.	ADAPTATIONS DOMINANTES.
Agaricus campestris	*Cordyceps ophioglossoides*	Protectrice.
.....	*Isaria densa*	Propagatrice.
Scleroderma vulgare	.....	Protectrice.
Collybia platyphylla	.....	Propagatrices.
Cyathus striatus	.....	
Phallus impudicus	.....	
.....	*Poronia Doumetii*	Protectrice.
Polysaccum crassipes	.....	Protectrices.
Polyporus lucidus	.....	
Polyporus umbellatus	.....	Accumulatrice et propagatrice.
Lentinus Woermanni	.....	Accumulatrices.
Lentinus scleroticola	.....	
Pachyma cocos	.....	
Polyporus tuberaster	.....	
Polyporus rhinoceros	.....	
Polyporus sacer	.....	
Collybia tuberosa	.....	
Collybia cirrhata	.....	
.....	*Xylaria vaporaria*	Accumulatrices et propagatrices.
.....	*Xylaria Tulasnei*	
Armillaria mellea	.....	Accumulatrice, propagatrice et offensive.
Collybia racemosa	*Isaria densa*	Accumulatrices.
Typhula variabilis	.....	
.....	*Claviceps purpurea*	
Coprinus stercorarius	*Peziza sclerotiorum*	

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

1. V. Fayod. — Notes sur quelques Champignons parasites nouveaux ou peu connus. (*Ann. Sc. nat.*, 7e sér., t. II.)

2. A. de Bary. — Vergleichende Morphologie und Biologie der Pilze. Leipzig, 1884.

3. V. Fayod. — Prodrome d'une histoire naturelle des Agaricinés. (*Ann. Sc. nat.*, 7e sér., t. IX, 1889.)

4. N. Sorokine. — Développement du Scleroderma verrucosum. (*Ann. Sc. nat.*, 6e sér., t. III.)

5. Ch. Van Bambeke. — Recherches sur les hyphes vasculaires des Eumycètes. (*Dodonaea*, 4e année. Gand, 1892.)

6. Ch. Van Bambeke. — Hyphes vasculaires du Mycélium des Autobasidiomycètes. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 3e série, t. XXVII, pp. 492-494, 1894.)

7. L. Errera. — Épiplasme des Ascomycètes. Bruxelles, 1882.

8. L. Errera. — Sur le glycogène chez les Basidiomycètes. Bruxelles, 1885.

9. G. Massee. — Revision of Polysaccum. (*Grevillea*, vol. XIV, p. 27.)

10. L. R. Tulasne. — Sur les genres Polysaccum et Geaster. (*Ann. Sc. nat.*, 2e sér., t. XVIII.)

11. M. C. Cooke. — Australian fungi. (*Grevillea*, vol. XVII, 1888-1889, p. 55.)

12. N. Patouillard. — Ptychogaster lycoperdon nov. sp. (L. Morot, *Journal de botanique*, vol. I, 1887, p. 113.)

13. O. Brefeld. — Untersuchungen über Schimmelpilze, Heft III. Leipzig, 1877.

14. Cohn & Schroeter. — Untersuchungen über Pachyma und Mylitta. (*Abhandlungen der Naturwissenschaftlichen Verein in Hamburg*, XI, Heft II.)

15. G. Murray. — On two species of Lentinus, one of them growing in a large Sclerotium. (*Linn. Transact.*, 2d series, Botany, vol. II, 1886.)

16. Mmes E. Bommer et M. Rousseau. — Contributions à la flore mycologique de Belgique. (*Bull. Soc. roy. de botanique de Belgique*, t. XXIX, 1891, 1re partie.)

17. E. Rostrup. — Mykologiske Meddelelser. (*Saertryk af Botanisk Tidsskrift*, 17 Bind, 3 Haefte. Kjöbenhaven, 1889.)

Digitized by Google

18. Ed. Prillieux. — Le Pachyma cocos en France. (*Bull. Soc. bot. de France*, t. XXXVI, 1889, p. 433.)

19. Léo Errera. — Les réserves hydrocarbonées des Champignons. (*Comptes rendus*, 3 août 1885.)

20. R. Hartig. — Wichtige Krankheiten der Waldbäume. Berlin, 1874.

21. P. A. Saccardo. — Sylloge Fungorum, t. VI.

22. E. Fischer. — Pachyma Cocos und ähnliche Sclerotienartige Bildungen. (*Hedwigia*, Heft II, 1891.)

23. Rumphius. — Herbarium Amboinense, Lib. IX.

24. N. Patouillard. — Fragments mycologiques. (L. Morot, *Journal de botanique*, t. III, n° 3, 1889.)

25. W. Rothert. — Ueber Sclerotium hydrophilum, einen Sporenlosen Pilz. (*Botanische Zeitung*, 1892.)

26. M. C. Cooke. — Notes on Clavariei. (*Grevillea*, vol. XX, 1891-1892, p. 10.)

27. N. Patouillard. — Sur quelques Champignons nouveaux de la Cochinchine. (L. Morot, *Journal de botanique*, 1889.)

28. C. Bommer. — Note sur le sclérote de Polyporus umbellatus. (*Bull. Soc. roy. de botanique de Belgique*, t. XXIV, 1891, 2e partie, pp. 146-148.)

29. E. Fischer. — Nachtrag zur Abhandlungen über Pachyma Cocos. (*Hedwigia*, Heft IV, 1891.)

30. L. R. Tulasne. — Selecta Fungorum Carpologia, t. III. Paris, 1865.

31. N. Patouillard. — Poronia Doumetii, nouveau Pyrénomycète de Tunisie. (*Revue mycologique*, 15e année, n° 60.)

32. J. von Sachs. — Vorlesungen über Pflanzenphysiologie. Leipzig, 1882.

33. A. Giard. — *Isaria densa*, Champignon parasite du hanneton commun. (*Bulletin scientifique de la France et de la Belgique*, vol. XXIV, 1893.)

34. Rev. M. J. Berkeley. — Some Entomog. Sphaeriæ. (*Hook. Journ.*, 1843, p. 209.)

35. Rev. M. J. Berkeley. — On two tuberiform vegetable productions from Travancore. (*Linn. Transact.*, vol. XXIII, 1862.)

36. J. Currey & D. Hanbury. — Remarks on Sclerotium stipitatum Berk. and Curr., Pachyma cocos Fr. and some similar productions. (*Linn. Transact.*, vol. XXIII, 1862.)

Digitized by Google

37. A. Möller. — Die Pilzgärten einiger sudamerikanischer Ameisen. (Schimper, *Botanische Mittheilungen aus den Tropen*, fasc. VI, 1893.)

38. G. Massee. — A monograph of the genus Podaxis Desv. (Podaxon Fr.) (*Journ. of Bot.*, Feb.-March 1890.)

39. E. Fries. — Hymenomycetes europaei (p. 278). Upsal, 1874.

40. Backhouse. — Compendium Bot. Mag., II.

41. Rev. M. J. Berkeley. — Ann. and Mag. of Nat. Hist., t. III, 1839.

42. L. R. Tulasne. — Fungi Hypogaei. Paris, 1862.

43. F. von Tavel. — Vergleichende Morphologie der Pilze. Iéna, 1892.

44. M. C. Cooke et G. Massee. — Australian fungi. (*Grevillea*, décembre 1892, p. 37.)

45. P.-A. Saccardo. — Mycetes aliquot australienses. (*Hedwigia*, vol. XXXII, 1893, Heft II.)

46. E. Boudier. — Deux nouvelles espèces de Ptychogaster. (L. Morot, *Journ. de bot.*, t. I, 1887, p. 7.)

47. Corda. — Icones fungorum, vol. VI.

48. Bulliard. — Herbier de la France, vol. V. Paris, 1780.

49. O. Brefeld. — Untersuchungen aus dem Gesammtgebiete der Mykologie. Heft X. Münster i. W., 1891.

50. F. Cohn. — Grundzüge einer neuen natürlichen Anordnung der kryptogamischen Pflanzen. (*Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur*, 1872.)

51. Luerssen. — Medicinisch pharmaceutische Botanik, 1 Bd, Kryptogamen. Leipzig, 1879.

52. O. Brefeld. — Botanische Untersuchungen über Schimmelpilze. Heft IV, Leipzig, 1881.

Digitized by Google

EXPLICATION DES PLANCHES [1].

PLANCHE I.

Collybia platyphylla.

FIG. 1. Coupe transversale de la moelle du cordon, présentant à la fois des éléments larges et des éléments minces; les membranes de ces hyphes se sont fusionnées en une masse homogène.

Phallus impudicus.

FIG. 2. Coupe transversale de la région corticale du cordon : *a.* zone externe pseudo-parenchymateuse, composée d'hyphes larges, disposées transversalement au grand axe du cordon; *b.* zone interne, composée d'un feutrage très dense d'hyphes minces et longues, disposées perpendiculairement aux premières; la partie externe de cette zone renferme quelques éléments larges.

Cyathus striatus.

FIG. 3. Coupe longitudinale du cordon : *a.* écorce composée d'un feutrage assez lâche d'hyphes filamenteuses à membrane sclérotisée; *b.* moelle constituée par un feutrage dense d'hyphes minces ou larges; *c.* hyphes vasculaires.

Collybia cirrhata.

FIG. 4. Aspect du sclérote.

— 5. Structure du sclérote et du cordon mycélien : *a.* zone corticale à petits éléments; *b.* moelle avec grands éléments arrondis; *c.* cordon.

— 6. Carpophore en relation avec un sclérote (*a*) et des cordons mycéliens.

(Dessins originaux de M. Fayod.)

[1] Les figures des planches I, IV et VI ont été dessinées à la chambre claire. Les échelles qui accompagnent ces planches représentent les divisions d'un micromètre objectif tracées à la chambre claire dans les mêmes conditions que les figures auxquelles elles se rapportent.

Digitized by Google

Collybia racemosa.

Fig. 7. *a*. Aspect du sclérote ; *b*. sclérote sécrétant des gouttelettes d'eau.
— 8. Structure du sclérote.
— 9. Sclérote portant un appareil conidien.

(Dessins originaux de M. Fayod.)

Lentinus Woermanni.

Fig. 10. Hyphes jeunes ? de la moelle du sclérote.
— 11. Hyphes normales de la moelle du sclérote. La membrane est uniformément épaissie ; la cavité cellulaire a un calibre invariable.
— 12. Hyphe à membrane très épaissie ; la cavité cellulaire a totalement disparu ; on voit en certains points le début d'épaississements tuberculeux.
— 13, 14, 15, 16. Hyphes dans lesquelles la cavité cellulaire est irrégulièrement développée ; les membranes sont très épaissies.
— 18, 19, 20, 22. Hyphes à membrane épaisse, dont la cavité cellulaire s'est fortement accrue ; la figure 19 montre que la membrane s'accroît par le dépôt successif de couches de cellulose, car la couche interne s'est décollée en partie.
— 17, 21, 23. Hyphes tuberculeuses dans lesquelles la membrane s'est développée seule ; la cavité cellulaire a disparu complètement.
— 24. Hyphe présentant à la fois un grand développement de la cavité cellulaire et un épaississement tuberculeux de la membrane.
— 25. Structure de la moelle du sclérote ; le tissu, dissocié dans la moitié droite de la figure, est formé par le mélange intime des hyphes normales (fig. 11), des hyphes tuberculeuses et des hyphes à large cavité cellulaire.

(L'exemplaire d'après lequel ont été faits ces dessins, a été récolté au Congo par M. Fernand De Meuse.)

Polyporus umbellatus.

Fig. 26. Hyphe de la moelle du sclérote, non modifiée.
— 27. Différents stades de l'épaississement des hyphes ; la cavité cellulaire a disparu.
— 28. Hyphe tuberculeuse au centre de laquelle on voit persister la cavité cellulaire primitive.
— 29. Hyphes à membrane épaissie, très modifiées, de forme sphérique ; la cavité cellulaire persiste au centre.
— 30. Structure de la moelle du sclérote, formée par le mélange intime d'hyphes à tous les degrés de transformation.
— 31. Écorce cicatricielle recouvrant une partie de la moelle du sclérote, mise à nu par une blessure. Il s'est formé des crevasses dans cette écorce et celles-ci ont été isolées des tissus internes par une nouvelle écorce intramédullaire.

Digitized by Google

Fig. 32. Rameau du sclérote putréfié en partie; le tissu malade est isolé par une couche intramédullaire de tissu cortical.
— 33. Rameau du sclérote à la surface duquel s'est appliqué un rhizomorphe d'*Armillaria mellea*. Une couche intramédullaire de tissu cortical s'est développée à une certaine distance du point attaqué pour empêcher l'invasion du sclérote par les hyphes du rhizomorphe.
— 34. Les rhizomorphes ont pénétré dans la moelle du sclérote, mais ils sont isolés sur tout leur parcours par une gaine intramédullaire de tissu cortical, formée par le sclérote.
— 35. Structure des gaines intramédullaires de tissu pseudo-parenchymateux, formé de cellules courtes et très larges.
— 36. Aspect de ces gaines.
— 37. Gaine intramédullaire de tissu cortical ordinaire; l'intérieur de la gaine est occupé par les hyphes filamenteuses du rhizomorphe.
— 38. Portion d'une gaine intramédullaire de tissu cortical, montrant en un point les hyphes à membranes épaissies qui la composent.
— 39. Aspect de cette gaine.
— 40. Tissu d'une gaine intramédullaire pseudo-parenchymateuse se transformant en une gaine de tissu sclérotisé compact (coupe transversale).
— 41. Gaine intramédullaire de tissu cortical ordinaire avec gaine pseudo-parenchymateuse adjacente; on voit une autre gaine adjacente qui s'est transformée en tissu sclérotisé compact.

(Les exemplaires d'après lesquels les dessins ont été faits proviennent de la forêt de Soignes, près de Bruxelles.)

PLANCHE II.

Polyporus umbellatus.

Fig. 1. Racine de hêtre dont le tissu a été détruit par le mycélium du Champignon; à l'exception du périderme, toute la substance de la racine a disparu et a été remplacée par le sclérote qui, en poursuivant son développement, vient faire saillie au dehors.
— 2. Racine de hêtre dont le tissu interne a été remplacé par le sclérote qui est déjà très développé.
— 3. Rameau du sclérote présentant une partie en voie de bourgeonnement, caractérisée par sa couleur plus claire.
— 4. Petit carpophore adhérant à un rameau du sclérote.

(Toutes les figures de cette planche sont dessinées de grandeur naturelle d'après des spécimens récoltés dans la forêt de Soignes.)

Digitized by Google

PLANCHE III.

Scleroderma vulgare.

Fig. 1. Formation très développée de cordons mycéliens.

(Dunes des environs de la Haye. — Un peu réduit.)

Scleroderma bovista.

Fig. 2, 3. Formation de cordons mycéliens très développée; dans l'exemplaire coupé, on voit un massif assez considérable de tissu formé à la base du péridium par la coalescence des cordons.

(Dunes des environs de la Haye. – Un peu réduit.)

Phallus impudicus.

Fig. 4. Plan de deux colonies voisines situées dans un bois de haute futaie.

(Forêt de Soignes. — Réduction au $^1/_{90}$.)

Polysaccum crassipes.

Fig. 5, 6. Exemplaires possédant une base radicante très développée. Dans l'exemplaire de la figure 6, la moitié inférieure de la base est formée de mycélium mélangé d'éléments étrangers; sa forme élargie a une certaine analogie avec la base du carpophore de *Scleroderma vulgare*, tandis que l'exemplaire de la figure 5 rappelle plutôt l'aspect de *Scleroderma bovista*.

(Herbier de Persoon. — Demi-grandeur.)

Polyporus tumulosus.

Fig. 7. Exemplaire portant une concrétion mycélienne peu développée. La proportion de sable qui entre dans cette formation est très considérable.

(Récolté près d'Adélaïde (Australie S.) par le Dr Schomburgk, 1880.)

— 8. Concrétion mycélienne de forme définie accompagnant l'exemplaire précédent; elle est recouverte d'une écorce bien distincte, de couleur brun foncé.

(Jardins royaux de Kew, Museum II. — Échelle de 5 centimètres.)

Digitized by Google

Polyporus lucidus.

Fig. 9. Exemplaire comprenant le carpophore et la concrétion mycélienne à laquelle il est attaché. La surface de la concrétion est couverte de racines et de fragments de pierres qui ont été englobés lors de sa formation (hauteur, $0^m,235$).

— 10. Autre concrétion, vue de dessus. Elle ne portait pas de carpophore et était située horizontalement dans le sol (longueur, $0^m,18$).

(Les deux exemplaires proviennent du bois de Vincennes, près de Paris.)

Armillaria mellea.

Fig. 11. Formation sclérotique portant des carpophores; elle est due à l'épaississement et à la soudure de nombreux rhizomorphes.

(L'exemplaire figuré s'est développé sur un tronc de *Robinia pseudo-acacia* dans les jardins royaux de Kew. — Échelle de 10 centimètres.)

Polyporus umbellatus.

Fig. 12. Fragment d'un sclérote représenté figure 13, vu de dessus.

(Forêt de Soignes. — Demi-grandeur.)

— 13. Sclérote complet, à demi dégagé du sol : *a*. couche de feuilles mortes; *b*. terre végétale; *c*. sable ferrugineux. Le sclérote porte un carpophore de petite taille.

(Forêt de Soignes, près de Bruxelles.)

Lachnocladium insigne.

Fig. 14. Carpophore avec concrétion mycélienne à la base du stipe; une partie des rameaux du carpophore a été supprimée.

(Guyane. — Récolté par M. Mélinon. — Échelle de 5 centimètres.)

Lentinus lepideus.

Fig. 15. Exemplaire présentant la déformation clavarioïde.

(Trouvé dans un bâtiment à Londres. — Échelle de 2 pouces anglais ou 5 centimètres.)

Digitized by Google

Fig. 16. Exemplaire normal trouvé dans les mêmes conditions que le précédent; le chapeau est réfléchi vers la base du stipe.

(Jardins royaux de Kew, Museum II. — Même échelle que la figure 15. — Voir aussi dans Cooke, « Illustrations of British fungi », vol. VII, les planches 1140 et 1141 qui représentent le même Champignon sous ses deux aspects.)

Polyporus tuberaster.

Fig. 17. Exemplaire dont une partie a été enlevée; la substance interne se différencie fort bien de l'écorce. L'aspect est tout à fait comparable à celui d'un exemplaire de *Pachyma cocos*, dont la moelle serait colorée par des matières étrangères.

(Herbier du jardin botanique de Pise. – Réduction aux deux tiers de la grandeur naturelle.)

Poronia Doumetii.

Fig. 18. Aspect d'un exemplaire complet.

(Tunisie. — D'après un croquis de M. Patouillard. — Grandeur naturelle.)

Xylaria vaporaria.

Fig. 19. Aspect d'un exemplaire complet du sclérote; la figure 1 de la planche V correspond à un rameau tel que celui marqué *a*.

(L'exemplaire s'est développé sur une couche à champignons dans les jardins royaux de Kew.)

Sclerotium stipitatum.

Fig. 20. Exemplaires récoltés par Zippel.

(Herbier de Leyde. — Demi-grandeur.)

Digitized by Google

PLANCHE IV.

Pachyma cocos.

FIG. 1. Région superficielle de l'écorce. Les hyphes filamenteuses de la couche sous-jacente sont ici fusionnées en une masse amorphe, au milieu de laquelle persistent, non transformées, quelques hyphes dilatées à aspect réfringent dont la membrane est à peine colorée. Ces hyphes existent sur toute la surface de l'écorce, partout où elles n'ont pas été enlevées par le frottement.

— 2. Structure de la région moyenne de l'écorce. Hyphes filamenteuses à membrane peu épaissie, colorée en brun.

— 3. Hyphe filamenteuse de la moelle, à membrane épaissie.

— 4. Hyphes filamenteuses de la moelle, présentant le début de l'épaississement tuberculeux de la membrane.

— 5. Groupe d'hyphes filamenteuses à différents stades d'épaississement. L'une d'elles est déjà parvenue à un haut degré de modification.

— 6. Hyphes tuberculeuses offrant l'aspect coralloïde typique. On distingue encore dans l'une d'elles la cavité cellulaire primitive.

— 7. Hyphe coralloïde, modifiée en un point en grosse hyphe tuberculeuse non coralloïde. La figure montre que cette forme moins définie d'hyphe transformée n'est qu'une variété d'aspect des hyphes coralloïdes typiques.

Dans la figure 9, cette variété forme seule le tissu du sclérote.

— 8. Structure générale des parties profondes de la moelle, qui est formée par le mélange d'hyphes filamenteuses et d'hyphes coralloïdes. Dans les régions profondes, les éléments filamenteux ont presque totalement disparu; ils sont plus abondants vers la périphérie.

— 9. Coupe longitudinale d'une racine de *Pinus* attaquée par *Pachyma cocos* : *a.* couche d'hyphes filamenteuses pénétrant d'une part dans l'écorce de la racine, d'autre part dans le bois et s'y transformant en hyphes tuberculeuses. Dans d'autres exemplaires, cette couche n'est pas aussi nettement délimitée; elle contient un grand nombre d'hyphes transformées en corps coralloïdes et présente, dans ce cas, une épaisseur beaucoup plus grande; cependant, les éléments filamenteux sont toujours en majorité; *b.* masse de tissu tuberculeux formée dans l'écorce; on y distingue des débris de cellules des tissus corticaux; *c.* tissu ligneux; les trachéides sont entièrement remplies par le tissu tuberculeux du sclérote.

— 10. Coupe transversale de la région ligneuse de la même racine; au centre, canal résinifère dont les cellules de bordure ont été détruites, à l'exception d'une seule. On voit en certains points les membranes détruites, couche par couche, au contact des hyphes tuberculeuses qui remplissent tous les éléments du bois.

Digitized by Google

Fig. 11. Parenchyme cortical d'une racine d'arbre angiosperme (*Juglans ?*), attaquée par *Pachyma cocos*. On voit que l'attaque des tissus a toujours lieu par les hyphes filamenteuses qui se transforment ensuite en hyphes tuberculeuses dans les cellules qu'elles ont envahies; l'invasion des tissus a eu lieu de la région profonde de l'écorce *a* vers la région superficielle *b*.

(D'après un exemplaire provenant de la Chine. — Herbier du British Museum.)

Lachnocladium insigne.

Fig. 12. Hyphes filamenteuses de pseudo-sclérote à membranes épaissies.

(D'après un exemplaire récolté par M. Mélinon, en Guyane, et qui m'a été communiqué par M. Patouillard.)

Polyporus tuberaster.

Fig. 13. Structure du sclérote formé d'hyphes tuberculeuses mélangées de très fines poussières minérales et de quelques fragments plus volumineux, tels que des grains de sable.

— 14. Éléments de l'écorce du sclérote : *a*. Cellules corticales non sclérotisées; *b*. cellules sclérotisées.

— 15. Vue d'ensemble d'une portion du tissu cortical; une partie des éléments s'est fusionnée.

(Les dessins sont exécutés d'après un exemplaire provenant d'Italie.)

Polyporus sacer.

Fig. 16. Hyphes filamenteuses du sclérote à membrane épaissie.

— 17. Hyphe filamenteuse dont un rameau se divise par des cloisons en cellules courtes, à membrane légèrement épaissie, qui sont le début de la formation des « Endzellen ».

— 18. « Endzellen ». Le contenu est très réfringent et granuleux. La membrane ne présente pas encore d'épaississement marqué.

— 19. « Endzelle » présentant un épaississement notable de la membrane sur une partie de sa surface.

— 20. Différents stades de l'épaississement de la membrane des « Endzellen », ressemblant aux hyphes sphéroïdales de *Lentinus Woermanni*. (Pl. I, fig. 20.)

— 21. Hyphe filamenteuse qui s'est épaissie tout entière et offre quelque analogie avec certaines hyphes modifiées du sclérote de *Lentinus Woermanni*. (Pl. I, fig. 16.)

— 22. Stade plus avancé de l'épaississement de la membrane des « Endzellen ». La cavité cellulaire a été séparée en deux parties réunies entre elles par une portion très étroite, à la suite de l'accroissement de la membrane.

— 23, 24, 25. L'accroissement de la membrane fait disparaître progressivement la cavité cellulaire.

Digitized by Google

Fig. 26. Hyphe transformée dont l'origine est due probablement à la modification d'une grande portion d'hyphe filamenteuse plus considérable qu'une « Endzelle ».

— 27. Structure de la moelle du sclérote. Elle est formée d'un feutrage d'hyphes filamenteuses dans lequel se trouvent les hyphes transformées et les « Endzellen » qui leur donnent naissance. Presque toutes les hyphes transformées conservent un vestige plus ou moins considérable de la cavité cellulaire de la « Endzelle ».

(Dessins d'après un exemplaire récolté au Gabon, par M. Thollon, et faisant partie de l'herbier du Muséum de Paris.)

Polyporus rhinoceros.

Fig. 28, 29. Extrémités renflées d'hyphes filamenteuses normales, dont le contenu est remarquable par sa réfringence.

— 30. Hyphe profondément modifiée provenant de l'épaississement de la membrane de l'extrémité renflée d'une hyphe filamenteuse. Cet épaississement a lieu, comme on le voit, par le dépôt successif de couches de cellulose. La cavité cellulaire primitive persiste au centre.

— 31. Hyphe dont la membrane s'est épaissie encore davantage; la cavité cellulaire est devenue linéaire; les couches d'épaississement sont plus étroites et plus nombreuses que dans le cas précédent. C'est l'aspect des hyphes arrivées au terme de leur modification.

— 32, 33. Deux stades de formation d'hyphes à membranes très épaisses qui se sont développées à la bifurcation de deux rameaux d'une hyphe filamenteuse, au lieu de se former à une de ses extrémités.

(Dessins d'après un exemplaire provenant de Penang [Malacca].)

Poronia Doumetii.

Fig. 34. Épiderme du cordon formé d'une couche de cellules à membranes sclérotisées, étroitement unies entre elles, présentant des prolongements en forme de poils très longs, à membrane légèrement sclérotisée, divisés par des cloisons transversales.

(Exemplaire récolté en Tunisie par M. Patouillard.)

Xylaria vaporaria.

Fig. 35. Région corticale du sclérote formée de cellules à parois minces, groupées en pseudo-parenchyme. Dans la partie inférieure de la figure, on voit apparaître les éléments à membrane épaissie de la moelle.

— 36. Structure de la moelle; feutrage d'hyphes à parois épaissies. Les éléments plus larges sont des hyphes ampulliformes.

— 37. Hyphes ampulliformes à différents degrés de développement.

(Exemplaire figuré pl. V, fig. 1.)

Digitized by Google

PLANCHE V.

Xylaria vaporaria.

Fig. 1. Fragment de l'exemplaire représenté planche III, figure 19.

(Grandeur naturelle.)

Cordyceps Taylori.

Fig. 2. Carpophore s'étant développé sur une chenille; la larve et la plus grande partie du Champignon étaient enfouis dans le sol; le corps de la chenille est rempli d'un tissu dur, compact, blanc, qui constitue un véritable sclérote, comme on le voit sur la coupe du corps.

(Australie. — Herbier de Kew. — Demi-grandeur.)

Mylitta australis.

(L'échelle accompagnant les exemplaires photographiés mesure 5 centimètres.)

Fig. 3. Exemplaire jeune. La substance blanche opaque, qui formera plus tard les alvéoles, est encore peu développée, comme on le voit sur la surface de section. Le tissu n'a pas subi un fort retrait par suite de la dessiccation; la surface n'est pas sillonnée.

(Australie [North East Bay]. — Herbier du British Museum.)

— 4. Exemplaire jeune; la surface de section offre un aspect marbré caractéristique, dû au développement de la substance blanche.

(Tasmanie. — Herbier du British Museum.)

— 5. Exemplaire adulte. La substance blanche opaque s'est développée de manière à circonscrire dans la matière cornée translucide un grand nombre d'alvéoles. Le carpophore, globuleux à l'état frais, a subi un retrait considérable par suite de la dessiccation; sa surface est profondément sillonnée.

(Tasmanie. — Jardins royaux de Kew, Museum II.)

— 6. Exemplaire adulte à large cavité hyméniale. La partie corticale de la substance blanche est très développée en un point.

(Tasmanie. — Herbier du British Museum.)

— 7. Exemplaire adulte à cavité hyméniale centrale.

(Australie. — Herbier du British Museum.)

Digitized by Google

Fig. 8. Exemplaire adulte. La substance blanche opaque forme en certains points des amas plus considérables, qui sont probablement le début de la formation des cavités hyméniales.

(Herbier du British Museum. — Un peu réduit.)

— 9. Portion de l'échantillon précédent regonflé par un séjour de quarante-huit heures dans l'eau. Le volume a doublé et les alvéoles ont pris une forme polyédrique.

(L'échelle est la même que pour la figure précédente.)

— 10, 11. Exemplaires adultes en voie de désorganisation normale. Le siège de cette désorganisation peut être superficiel et gagner ensuite la profondeur (fig. 10), ou bien il peut être situé au milieu de la substance du carpophore (fig. 11). Ces exemplaires sont remarquables par la régularité et l'épaisseur de la couche corticale de substance blanche.

(Tasmanie. — Herbier du British Museum.)

— 12. Exemplaire portant des carpophores de *Polyporus Mylittæ*.

(Australie. — Photographie communiquée par M. G. Massee. — Échelle de 5 centimètres.)

— 13. Carpophore de *P. Mylittæ*.

(Croquis de M. G. Massee, d'après le dessin fait d'après nature. — Échelle de 5 centimètres.)

— 14. Exemplaire présentant une cavité dans laquelle s'est développé un coussinet hyménial de *P. Mylittæ*.

(Herbier du British Museum. — $^{8}/_{9}$ de la grandeur naturelle.)

— 15. Le coussinet hyménial de l'exemplaire précédent, vu par-dessus, après la suppression d'une partie de la paroi de la cavité.

($^{4}/_{5}$ de la grandeur naturelle.)

Mylitta lapidescens.

Fig. 16. Exemplaire offrant une structure semblable à celle de *M. australis* à l'état jeune.

(Chine. — Musée de la Pharmaceutical Society de Londres. — Grandeur naturelle.)

— 17. Exemplaires adultes à structure nettement alvéolaire.

(Les deux échantillons placés en haut de la figure viennent de Formose [Jardins royaux de Kew, Museum III]; le troisième échantillon est de la même provenance que celui de la figure 16. — Grandeur naturelle.)

Digitized by Google

PLANCHE VI.

Mylitta australis.

Fig. 1. Structure générale des exemplaires jeunes.
— 2. Structure des exemplaires adultes; la coupe comprend la paroi d'une alvéole, *a*, et la matière cornée translucide, *b*, dans laquelle on distingue de nombreux asques rudimentaires; en *c*, asques de la petite variété.
— 3. Aspect des asques au voisinage de la paroi d'une alvéole. La plupart des asques appartiennent à la petite variété; en *a*, un asque de la grande variété; en *b*, jeune asque de la petite variété contenant trois jeunes spores.
— 4. Asque de la petite variété, inséré sur l'hyphe ascogène hyaline; l'asque est accompagné des hyphes larges à paroi épaisse, qui forment la paroi des alvéoles. La couleur foncée de ces hyphes est due au brun Bismarck qui colorait la préparation.
— 5. Croquis montrant comment il faut interpréter la disposition de l'asque sur l'hyphe dans la figure précédente.
— 6 à 11. Différents aspects des asques de la petite variété.
— 10. Asque sans spore.
— 11. Asque ne contenant qu'un rudiment de spore.
— 12 à 19. Différents aspects des asques de la grande variété.
— 12. Asque à spore lisse.
— 13. Asque à spore échinulée.
— 14. Asque à spore verruqueuse.
— 15. Asque offrant une structure radiée du protoplasme, due probablement à la formation des échinules de la spore.
— 16. Asque inséré sur l'hyphe ascogène.
— 17. Jeune asque produit par deux hyphes ascogènes et renfermant cinq spores jeunes.
— 18. Jeune asque présentant une bifurcation de l'hyphe ascogène.
— 19. Stades très jeunes de la formation des asques.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

	Page.
INTRODUCTION.	3

CHAPITRE PREMIER.

LES AGGLOMÉRATIONS MYCÉLIENNES DES BASIDIOMYCÈTES.

A. — *Cordons mycéliens :*

	Pages.	Planches.	Figures.
Agaricus campestris	9		
Scleroderma	10		
— vulgare		III	1
— bovista		III	2, 3
Cyathus striatus.	12	I	3
Collybia platyphylla	14	I	1
Phallus impudicus	17	I	2
		III	4

B. — *Agglomérations mycéliennes compactes :*

Polysaccum	20	III	5, 6
Polyporus lucidus	22	III	9, 10

C. — *Sclérotes :*

Collybia tuberosa	24		
— cirrhata.	25	I	4, 5, 6
Coprinus stercorarius	26		
Typhula variabilis	26		
Collybia racemosa	27	I	7, 8, 9
Armillaria mellea	27	III	11
Lentinus Woermanni	30	I	10 à 25
— scleroticola	32		
Polyporus umbellatus	32	I	26 à 41
		II, III	12, 13
Pachyma cocos	40	IV	1 à 11

Digitized by Google

	Pages.	Planches.	Figures.
Lachnocladium insigne		III	14
		IV	12
Lentinus lepideus		III	15, 16
Polyporus tuberaster	47	III	17
		IV	13 à 15
— sacer	49	IV	16 à 27
— rhinoceros	54	IV	28 à 33

CHAPITRE II.

Les agglomérations mycéliennes des Ascomycètes.

A. — *Cordons mycéliens :*

Cordyceps ophioglossoides	57		
Poronia Doumetii	57	III	18
		IV	34

B. — *Sclérotes :*

Xylaria Tulasnei	60		
— vaporaria	62	III	19
		IV	35 à 37
		V	1
Isaria densa	63		
Cordyceps Taylori	64	V	2

CHAPITRE III.

Types critiques.

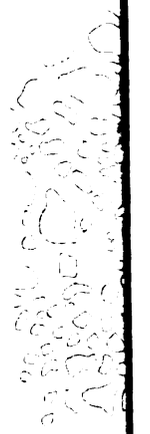
Sclerotium stipitatum	65	III	20
Mylitta australis	67	VI, V	3 à 15
— lapidescens	86	V	16, 17

CHAPITRE IV.

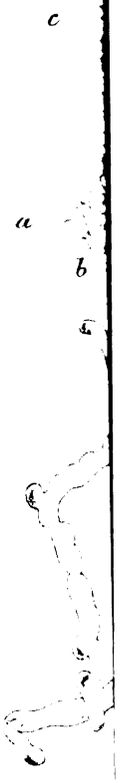
	Pages.
Conclusions	87
Bibliographie	100
Explication des planches	103

Digitized by Google

Planches.	Figures.
III	14
IV	12
III	15, 16
III	17
IV	13 à 15
IV	16 à 27
IV	28 à 33



III	18
IV	34
III	19
IV	35 à 37
V	1
V	2



III	20
V	3 à 15
V	16, 17

	Pages.
. .	87
. .	100
. .	103

Digitized by Google

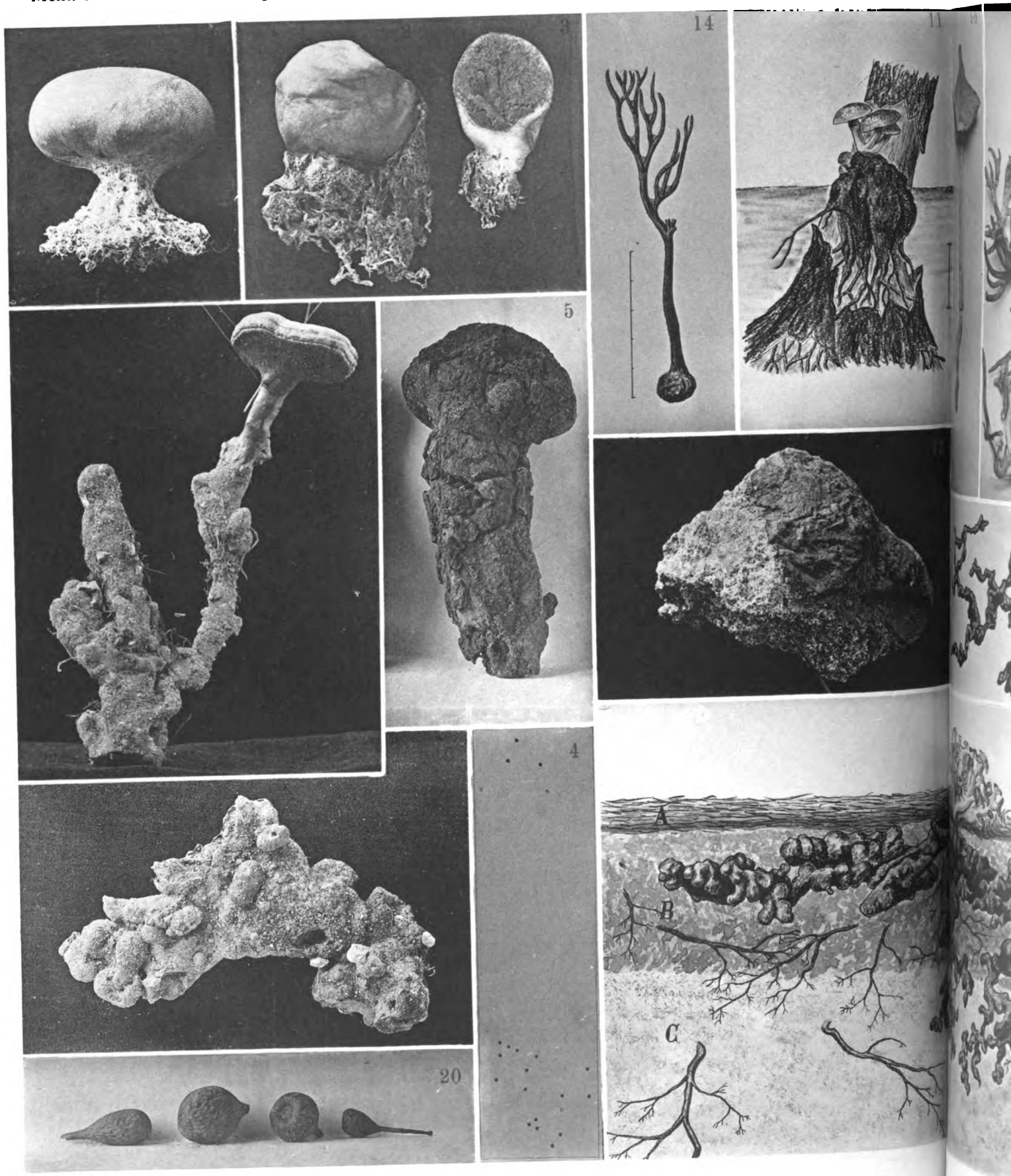
Digitized by Google

Mém. cour. et des sav. étrangers, Tome LIV.

Digitized by Google

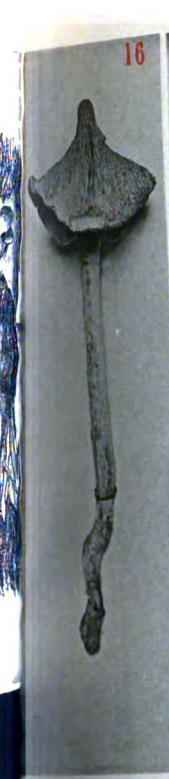
Digitized by Google

Digitized by Google

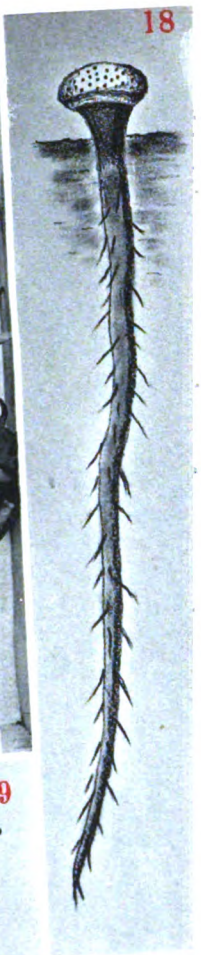


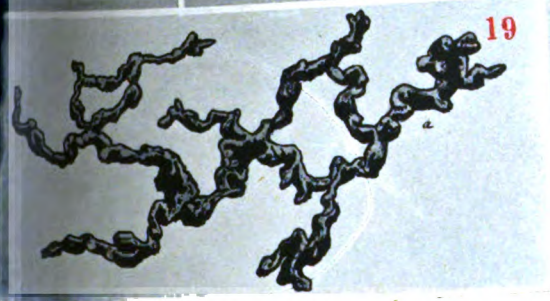
C. Bommer, phot. et del.

Digitized by Google


16

15


18


19

6

7 8

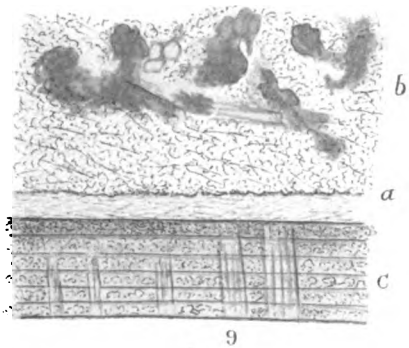
12

13

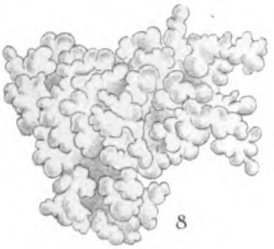
Impression photocollographique de Wilh. Otto, Dusseldorf-Bruxelles.

Digitized by Google

Digitized by Google



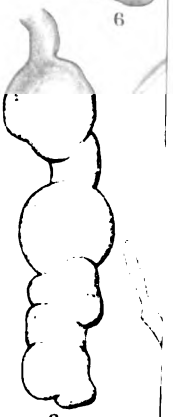
9



8

6

1



6

2

4

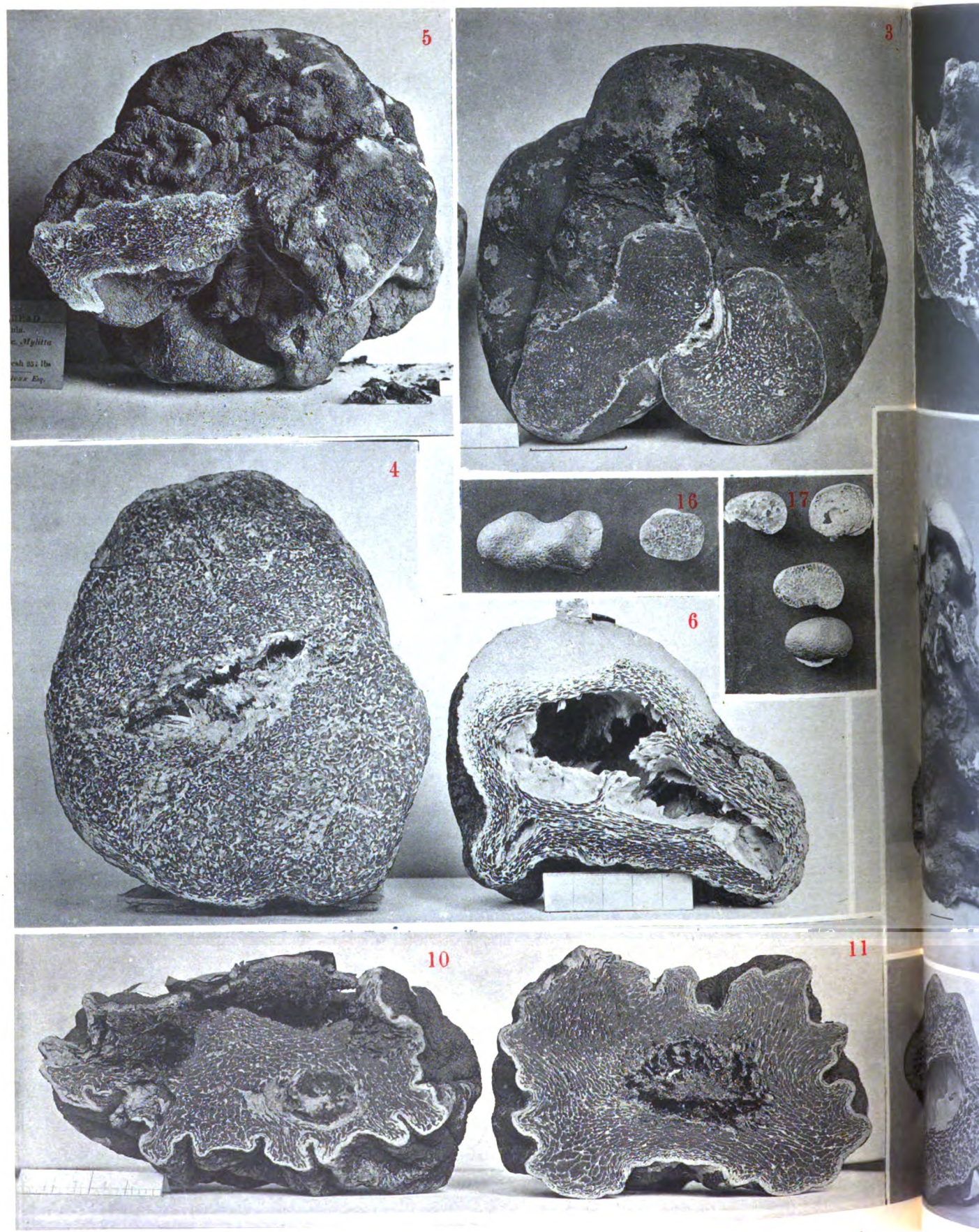
35

34

37

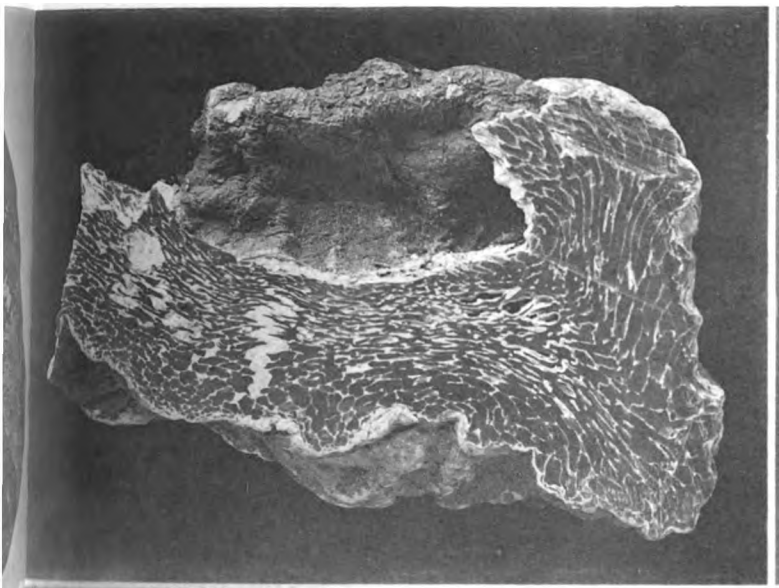
Digitized by Google

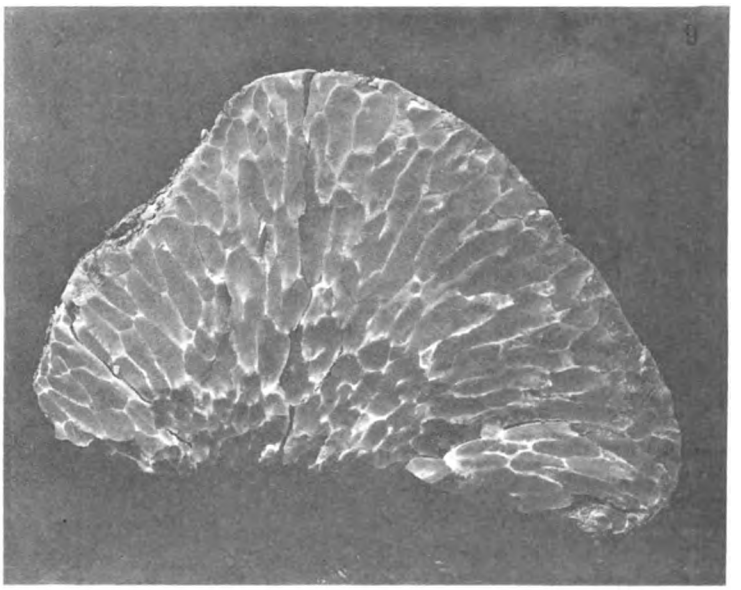
Digitized by Google

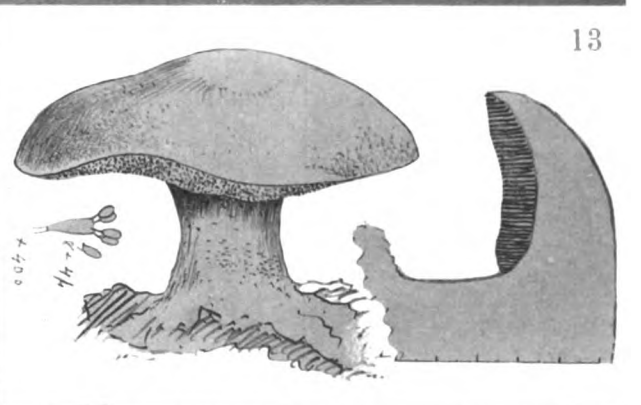


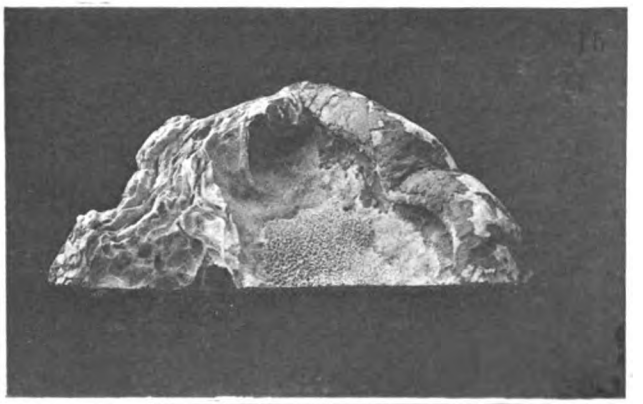
C. Bommer, phot

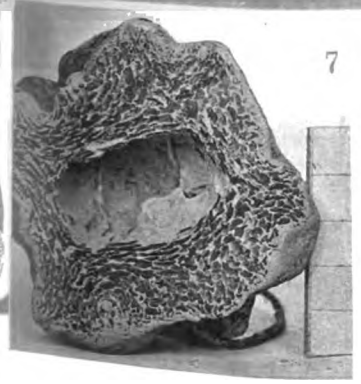
Digitized by Google

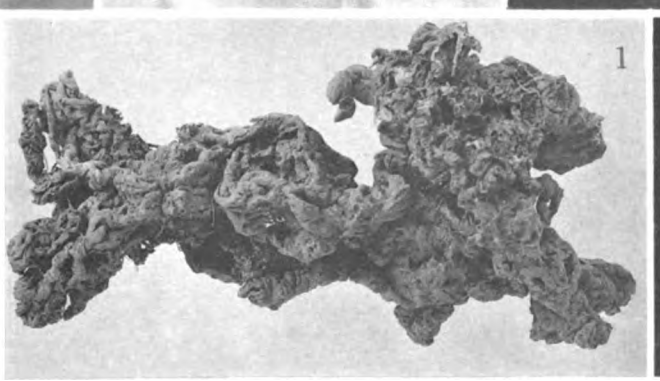












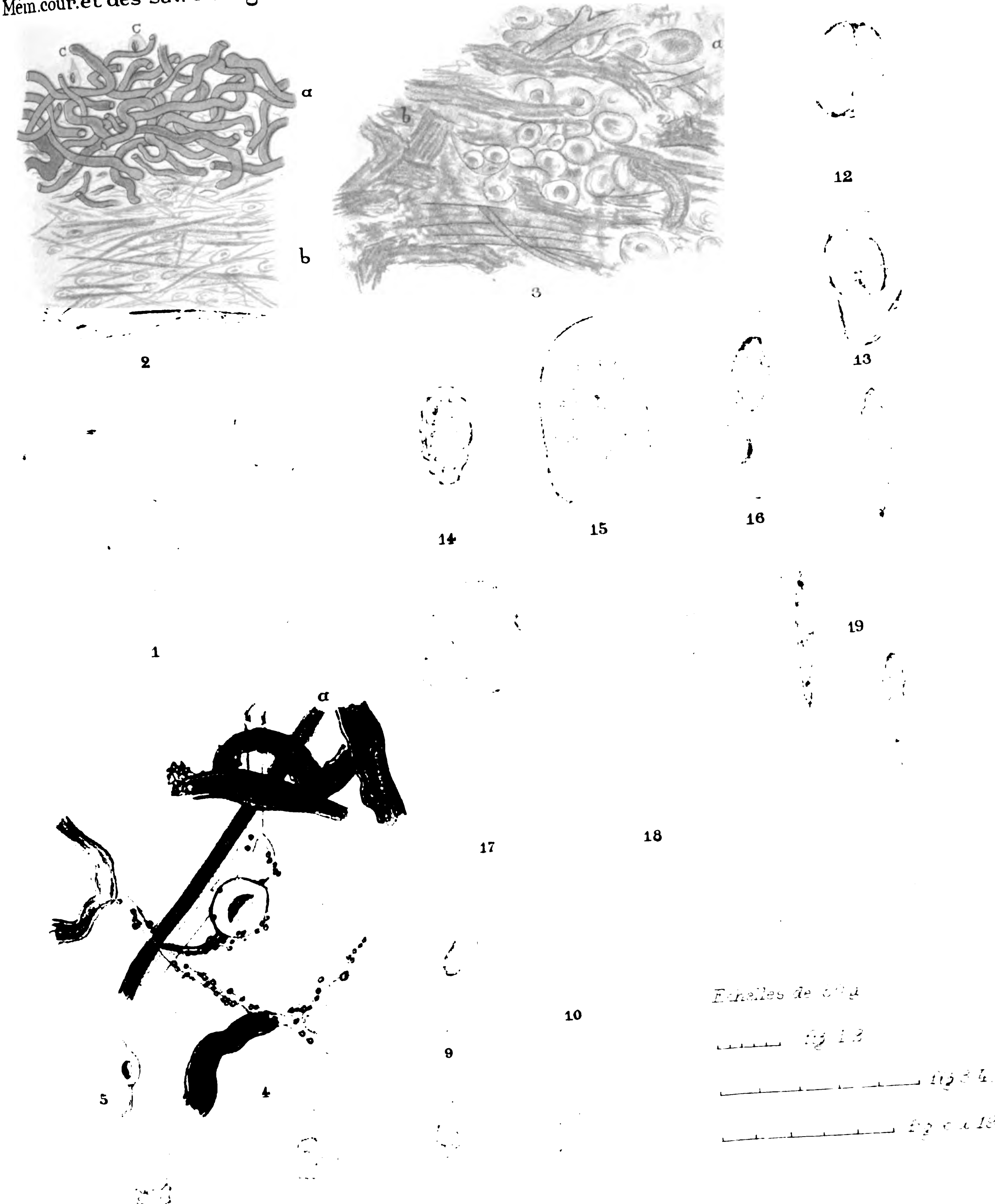
Impression photocollographique de Wilh Otto, Dusseldorf-Bruxelles

Digitized by Google

Digitized by Google

Mém. cour. et des sav. étrangers. Tome LIV

Pl. VI



C. Bommer ad nat. del

Lith F. Siele Louvain

Digitized by Google

Digitized by Google

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE

DE LA PHAGOCYTOSE

PAR

le Dr C. DE BRUYNE

ASSISTANT A L'UNIVERSITÉ, PROFESSEUR A L'ÉCOLE NORMALE DE L'ÉTAT, A GAND

(Travail du Laboratoire d'histologie normale de l'Université.)

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 7 avril 1894.)

Digitized by Google

Digitized by Google

CONTRIBUTION

A L'ÉTUDE

DE LA PHAGOCYTOSE

INTRODUCTION.

Les phénomènes décrits dans les pages suivantes sont du domaine de recherches que l'on ne peut généralement exécuter sur le vivant, à cause de l'épaisseur, de l'opacité ou de la profondeur des tissus au sein desquels ils ont lieu. Il faut, le plus souvent, s'en tenir aux données que peut fournir un examen microscopique après fixation et coloration préalables, pour en déduire la marche des processus physiologiques : cette méthode a néanmoins produit des résultats admirables que des observations sur le vivant sont venues confirmer dans certains cas (maturation de l'œuf, division cellulaire mitosique, par exemple). Il n'en est pas moins vrai que l'observation et la surveillance pas à pas des phénomènes dans toutes leurs phases *pendant la vie,* peuvent apporter un élément précieux, un contrôle parfois décisif dans les questions qui font l'objet de controverses les plus flagrantes; menées de front avec l'examen et l'interprétation de préparations histologiques permanentes, elles doivent conduire à la solution des problèmes les plus ardus de la science biologique. Aussi nous croyons que, sous ce rapport, les résultats de nos expériences pourront constituer une contribution utile à l'étude de la phagocytose.

Digitized by Google

HISTORIQUE.

Il y a trois phases nettement distinctes dans le phénomène de la phagocytose : *a*) migration des phagocytes; *b*) incorporation de substances étrangères solides; *c*) excrétion. Nous croyons utile de séparer dans cet exposé bibliographique les recherches déjà entreprises (*sur l'animal vivant*) dans la direction de chacune d'elles.

1° *Migration des cellules.* — Nous n'allons pas nous perdre dans les détails au sujet des observations faites sur la locomotion des organismes unicellulaires, leurs attractions et répulsions vis-à-vis des agents physiques ou chimiques; nous ne citons également que pour mémoire et dans le but d'être complet, la progression des spermatozoïdes étudiée dans tout l'immense groupe des Cryptogames et chez un très grand nombre de formes animales. Étendant et perfectionnant le mode d'observation de la circulation sanguine dans la membrane interdigitale de la patte postérieure de Grenouille (Harvey, 1619), et dans le poumon du même animal (Malpighi, 1661), différents auteurs ont pu assister *de visu* à la progression des leucocytes dans les tissus et à leur sortie des vaisseaux : proclamées par Waller, elles furent contrôlées tout d'abord par Cohnhein dans ses ingénieuses recherches sur le mésentère de la Grenouille; plus tard, Stricker et Sanderson les entreprirent sur le mésentère de petits Mammifères éventrés après anesthésie. Lieberkühn, observant le sang d'Anodonte, a assisté aux mouvements et aux transformations des cellules qu'il prenait pour des Amibes vivant à l'intérieur de l'animal. Metschnikoff, qui a créé la théorie de la phagocytose, a publié un grand nombre de données concernant la migration des cellules : il l'a constatée et poursuivie en effet chez les larves d'Échinodermes, chez des Mollusques transparents, chez les Daphnies, dans la nageoire caudale des Urodèles larvaires, etc. De même Pouchet (59), dans les nageoires caudales de Palaemon, et Griesbach (22), dans les branchies d'Écrevisse, ont pu étudier les déplacements des globules blancs du sang. D'autres encore ont choisi la langue de Grenouille, les branchies transparentes d'invertébrés

Digitized by Google

embryonnaires, les embryons transparents de poissons, etc. Au cours de ses admirables recherches concernant le développement postembryonnaire des Muscides, Kowalewsky (37) a eu l'occasion d'observer les mouvements de cellules mésodermiques. Il choisit comme objet les stades évolutifs de *Musca vomitoria* et plaça les chrysalides extraites de leur cocon, dans du blanc d'œuf où il les observa pendant plus de vingt-quatre heures. La vésicule céphalique est transparente et il a pu voir, à travers sa paroi, les déplacements des phagocytes entre les tissus des organes en voie de régression. Durham (13 et 14) a pu assister au passage de leucocytes à travers l'épithélium de branchies amputées à des Échinodermes. Les nombreuses et si intéressantes recherches sur les leucocytes et autres éléments anatomiques isolés d'un organisme et examinés en chambre humide ne rentrent pas dans la catégorie des faits observés par nous : les conditions physiologiques étaient absolument changées dans ces cas, et des facteurs physico-chimiques nouveaux devaient nécessairement provoquer des altérations dans les processus anatomo-physiologiques.

2° *Incorporation de substances solides.* — Quiconque a étudié les mœurs et les phases évolutives des organismes inférieurs, a pu se rendre compte, par des observations au microscope, des phénomènes de préhension chez les êtres unicellulaires et il serait trop long d'exposer ici les divers moyens mis en action par eux à cet effet. Quant à l'absorption de substances solides ou semi-liquides par les éléments organiques d'animaux pluricellulaires, c'est encore Metschnikoff (52) qui a fourni le plus grand nombre d'observations. Ainsi chez les Cœlentérés il a vu les cellules épithéliales endodermiques pousser des prolongements protoplasmiques vers des granulations solides, les saisir et se les incorporer ; chez les Éponges, il a constaté, *de visu*, également l'englobement de substances pulvérulentes et chez les larves transparentes d'Étoiles de mer la préhension et la destruction consécutive des cellules larvaires par des cellules mésodermiques. Dans ses admirables recherches concernant les maladies infectieuses des Daphnies, le savant russe a pu poursuivre au microscope et à travers les téguments transparents de ces Crustacés la captation de spores de *Monospora* par des phagocytes typiques. En 1862 déjà Haeckel (28) avait vu les leucocytes du mollusque *Thetys* avaler

Digitized by Google

des granulations d'indigo; il y a quelques années H. Griesbach contesta ces résultats et déclara que les cellules sanguines des Mollusques ne saisissent pas les substances solides; mais Metschnikoff (53) a victorieusement réfuté les théories de ce dernier auteur en s'adressant à des Mollusques, tels que les *Phylliroë,* dont les téguments transparents permettent l'observation microscopique sur le vivant. De plus, par une série d'expériences et d'observations continues sur les nageoires caudales d'Amphibiens urodèles larvaires (après traumatisme, brûlures, cautérisations, injections de substances en poudre et de bactéridies), il a apporté des documents de la dernière importance au sujet de la théorie phagocytaire. Après lui, et souvent sous son habile direction, toute une jeune école est venue confirmer par les expériences les plus variées, la conception géniale du maître.

Procédant comme nous l'avons vu plus haut, Kowalewsky a vu l'englobement de cellules adipeuses par les leucocytes de *Musca vomitoria* pendant le stade de chrysalide.

3° *Expulsion de substances solides du corps de l'organisme.* — Chez les Mycétozoaires, les résidus de la digestion et les corps indigestes, nocifs ou inutiles, sont expulsés de très diverses façons. Le phénomène se passe pendant les stades de motilité, et surtout, le plus souvent du moins, au moment où l'organisme, se préparant à la reproduction, s'entoure d'une enveloppe protectrice; il a été observé et décrit dans tous ses détails par des spécialistes très nombreux et nous renvoyons à ce sujet à leurs travaux, de même que pour toutes observations concernant cet intéressant chapitre chez les êtres unicellulaires, animaux et végétaux. Ces études expérimentales ont beaucoup moins souvent été entreprises chez les Métazoaires, à cause des difficultés pratiques qu'elles présentent. Nous connaissons à ce sujet principalement les travaux de Metschnikoff et de ses élèves qui, chez les Éponges, par exemple, ont vu des cellules mobiles chargées de substances solides passer à travers l'épithélium, grâce à leurs propriétés amiboïdes et les expulser de l'organisme en se perdant ainsi elles-mêmes à la surface du corps. Durham a longuement décrit le même phénomène observé et poursuivi dans les branchies des Échinodermes, et il considère dans ce cas particulier les leucocytes

Digitized by Google

comme des organes excréteurs; cette expulsion se ferait même sur toute la surface du corps des Échinides irréguliers (*Spatangus* et *Amphidotus*).

Ainsi qu'il appert des quelques lignes qui précèdent, le nombre des observations faites dans les mêmes conditions que les nôtres est excessivement restreint. Elles sont relatives à une des questions les plus importantes de la biologie, au sujet de laquelle l'histologie normale et pathologique a fourni des preuves d'une valeur incontestable. Nous estimons néanmoins que celles-ci ne peuvent que gagner à la publication de résultats obtenus dans les conditions physiologiques semblables à celles dans lesquelles nous avons opéré.

MATÉRIAUX DE RECHERCHE.

Nos recherches ont porté sur la phagocytose dans les branchies, les palpes, le manteau, les tentacules marginaux (quand ils existaient) et les téguments du corps des Mollusques suivants : *Mytilus edulis, Ostrea edulis, Unio pictorum, Anodonta cygnaea :* nous nous sommes procuré ces matériaux dans les conditions les plus normales et nous les avons maintenus dans cet état tant que nous en avions besoin pour nos observations. C'est ainsi que les Unios et les Anodontes étaient conservées dans des vases où une eau courante, suffisamment oxygénée, arrivait régulièrement; les Moules recevaient dans des conditions presque identiques une eau saumâtre, et les huitres nous arrivaient directement de chez le fournisseur au moment où elles allaient être soumises à examen. Les résultats ont été constants; c'est assez dire que nous ne songeons aucunement à les attribuer à un état pathologique produit par l'absence des conditions physiologiques normales [1].

[1] Depuis l'époque où notre travail a été envoyé à l'Académie, nous avons eu l'occasion d'étendre nos expériences à d'autres animaux, notammen à *Mya arenaria*, à *Cyclas cornea* et à *Tellina tenuis*. Ces organismes, fraîchement capturés, ont été immédiatement soumis à examen. Nous nous sommes également adressé à des jeunes Moules arrachées aux brise-lames de notre côte et qui, par conséquent, de même que les Lamellibranches que nous venons de nommer, ne pouvaient être soupçonnées de maladies du chef de culture et de captivité prolongées.

Digitized by Google

MÉTHODES.

Voici comment il a été procédé. Un fragment de branchies d'environ un demi-centimètre de surface, enlevé par trois coups de ciseaux (parfois une branchie entière), est porté rapidement sur le porte-objet où au préalable a été déposée une gouttelette d'eau recueillie dans la cavité palléale. Avec un pinceau très mou, nous brossons légèrement sa surface à laquelle, *de visu*, nous enlevons ainsi une substance visqueuse d'un blanc grisâtre (composée en grande partie de mucus, de cellules sanguines, parties de cellules, protozoaires, cils vibratils tombés, etc.). Après avoir laissé écouler l'eau impure, nous rinçons légèrement la préparation avec du nouveau liquide de la même provenance et nous appliquons le couvre-objet en ayant bien soin de n'y exercer aucune pression, si ce n'est dans des cas déterminés. La méthode est la même quand il s'agit d'examiner les palpes, le manteau et ses tentacules, la peau du corps, etc. Un jour *clair* peut parfois suffire pour faire les observations; mais nous nous sommes servi très souvent de la lumière artificielle dans le but de renforcer la netteté des images. La durée des observations a beaucoup varié selon les circonstances; il nous est arrivé de poursuivre la phagocytose sur un même objet et en un même point pendant six heures consécutives.

Avant l'examen les objets ont parfois été soumis à des conditions expérimentales, afin de fournir des données nouvelles. C'est ainsi que des Anodontes et des Moules ont été plongées pendant un, deux ou trois jours dans des solutions, de divers degrés de concentration, mais toujours faibles de bleu de méthylène; d'autres, auxquelles on avait troué ou non les valves, reçurent dans le pied, le corps ou le manteau une injection d'eau tenant en suspension du carmin pulvérisé, ou séjournèrent pendant un laps de temps variable dans un bassin à eau carminée.

A l'effet de confirmer nos résultats dans notre propre esprit, nous avons souvent eu recours à des fixateurs énergiques dont nous avons encore accentué l'action rapide en les chauffant. C'est ainsi que lors d'une observation importante, nous enlevions rapidement le couvre-objet et plongions la

Digitized by Google

préparation dans le sublimé corrosif ou dans la liqueur de Hermann bouillants. Procédant ensuite comme à l'ordinaire, nous obtenions des coupes montées en préparations définitives qui nous permirent de contrôler les résultats à la genèse desquels nous avions assisté *de visu*. Ce sont là des documents qui, à nos yeux, revêtent un caractère de sincérité absolue et acquièrent une valeur irrécusable. Les préparations que nous avons obtenues d'après le même principe en les fixant par l'acide osmique à 1 % ou ses vapeurs, les colorant *in toto* par le vert de méthyle et les montant enfin dans la glycérine, conservent moins longtemps leur valeur démonstrative; elles ne nous en ont pas moins été très précieuses dans nos essais de vérification, car elles concordent absolument avec celles que nous a fournies la méthode des coupes.

Toujours en vue d'un contrôle minutieux, nous avons fait des préparations définitives, sans avoir soumis les objets à un examen préalable, en prenant le matériel au hasard sur un animal vivant et le fixant instantanément avec les précautions d'usage; de plus, nous avons examiné des préparations faites jadis dans de tout autres conditions de fixation et de conservation et qui avaient dû servir à d'autres recherches. Nous avons eu la satisfaction de rencontrer partout la confirmation pleine et entière de nos interprétations.

La méthode des dissociations ne se prête guère au sujet qui nous occupe; aussi n'y avons-nous eu recours qu'à de rares exceptions et seulement dans le but de retrouver et de reconnaître certains éléments sur la nature desquels nous avions quelque doute.

Pour obtenir la fixation du bleu de méthylène dans les tissus des animaux qui avaient séjourné dans ses solutions, nous avons traité par de l'alcool absolu saturé de tannin : cette dernière substance forme avec la matière colorante en question une combinaison bleue stable qui se maintient presque complètement malgré le passage des coupes dans les divers réactifs dont chacun, peut-être, suffirait à l'extraire des tissus. Nous avons complètement réussi et nos préparations définitives révèlent fidèlement où se fait la fixation de la matière colorante.

Nous avons soumis à l'examen de notre savant professeur, M. Van Bambeke, et des naturalistes que nous rencontrons tous les jours dans notre salle

Digitized by Google

de laboratoire, les préparations *in vivo* ainsi que les définitives : ils n'ont fait qu'approuver notre manière de voir. Aussi est-ce avec la plus entière confiance que nous livrons ces pages à la publicité, quoique convaincu à l'avance qu'elles provoqueront chez le lecteur beaucoup d'étonnement, comme elles en ont provoqué chez nous-même au début.

FAITS OBSERVÉS.

Dans une note parue l'an passé à pareille époque (12), nous avons publié les premiers résultats de nos recherches concernant la phagocytose observée à l'état vivant dans l'épithélium branchial des Mollusques lamellibranches : il y fut annoncé que nous reviendrions plus longuement sur la question, après que nous aurions considérablement étendu nos investigations et que nous aurions réussi à pénétrer d'une façon plus intime ce phénomène si intéressant. Nous sommes à même de présenter aujourd'hui un cycle complet d'observations; c'est ce que nous nous proposons de faire dans les lignes qui vont suivre.

Les branchies, les palpes buccaux, le manteau, le pied, etc., donc toute la surface des Acéphales examinés (sauf la face externe des lobes palléaux) est recouverte d'un épithélium vibratile entremêlé çà et là de cellules caliciformes isolées, sécrétant une matière muqueuse, et parfois de cellules glandulaires associées fournissant leur produit par boules. Cet épithélium s'étend *d'une façon ininterrompue* sur toutes les parties externes et se continue avec les couches épithéliales recouvrant les orifices naturels et les cavités qui y débouchent. Il repose sur une membrane basale constituée par du tissu conjonctif dense qui se raréfie plus profondément, pour devenir très lâche et former un lacis dont les trabécules plus ou moins puissants s'entre-croisent dans tous les sens et déterminent ainsi les lacunes dans lesquelles le sang circule librement. Tous ces détails apparaissent avec une netteté parfaite dans des préparations fraîches, examinées dans de bonnes conditions d'éclairage et d'agrandissement.

Les particularités que nous venons d'exposer concernant l'épithélium ne sont pas neuves; mais nous les rappelons ici, d'abord parce qu'elles ne con-

Digitized by Google

cordent pas en tous points avec les idées émises par certains naturalistes, et ensuite pour que, quand plus loin nous exposerons nos résultats principaux, le lecteur ne soit pas porté à confondre les cavités observées par nous avec les solutions de continuité épithéliale décrites par d'autres.

En 1855, Leydig (45) a signalé dans le pied de *Cyclas cornea* des fentes lacunaires (*pori aquiferi*) résultant de l'écartement des cellules épithéliales. L'auteur a fait cette constatation sur le vivant et il admet l'entrée de l'eau dans les tissus du pied, destinée à produire l'érection de l'organe. Un grand nombre de naturalistes ont accepté les vues de Leydig et ont produit des arguments nouveaux dans le débat si long et si intéressant sur le mélange de l'eau au sang des Lamellibranches. Dans deux travaux parus successivement en 1883 et 1891 (22 et 23), Griesbach se prononce pour l'existence de ces fentes lacunaires; la même année, Kollmann (36) abonde dans cette manière de voir, ajoutant qu'il ne peut y avoir le moindre doute; Alfred Nalepa (54), de son côté, annonce qu'il a réussi à injecter les fentes intercellulaires. L'année d'après paraît à Iéna une dissertation inaugurale de R. Hanitsch (27), dans laquelle sont décrites et figurées chez *Cyclas cornea* des voies intercellulaires (Intercellulargänge). Par ces espaces s'établirait la communication des lacunes sanguines avec le milieu ambiant. Ces fentes, d'après Hanitsch, peuvent parfois être bifurquées, et sur ce point il se rencontre avec Leydig. Sarrasin, C.-F. et P.-B. (65), constatent l'existence de lacunes intercellulaires qui permettent une communication du sang avec l'eau, mais le tout se réduirait néanmoins à un échange osmotique continuel entre ces deux liquides. Dans un travail hongrois, Apathy (2) dessine de ces fentes lacunaires et les signale également dans une note allemande parue en 1887 (1). Il dit les avoir injectées d'encre de Chine.

La théorie des fentes lacunaires et de l'entrée de l'eau dans le sang des Lamellibranches a été vivement combattue par toute une phalange d'observateurs. Von Ihering (31), le premier, en nia l'existence et déclara que les prétendus *pori aquiferi* de Leydig étaient tout simplement des replis épithéliaux. Carrière (4) les regarde comme étant des ouvertures destinées à l'évacuation du produit sécrété par des glandes muqueuses très développées, et dans un travail paru quatre ans plus tard, il n'admet point la communication

Digitized by Google

entre le sang et l'eau. Nous n'avons pas eu l'occasion de prendre connaissance des travaux de Barrois, Fleischmann, Ray-Lankester, Roule et Cattie, qui tous ont conclu à l'intégrité épithéliale, et c'est le travail de Schiemenz (69) qui nous a paru avoir définitivement résolu la question. Il a nettement démontré que les *pori aquiferi* de Leydig ne sont que des lacunes dues à l'évagination de la membrane basilaire pouvant parfois s'élever entre les cellules épithéliales jusqu'aux deux tiers de leur hauteur; elles sont fermées en pointe du côté de la surface. Cette opinion est assez généralement admise et l'épithélium externe des Acéphales peut être considéré comme un tissu continu ne présentant ni fentes ni cavités béantes. Nous nous rallions en tous points aux vues de Schiemenz, mais avec quelques réserves sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Ainsi que nous le disions plus haut, l'on peut aisément observer les tissus profonds dans une préparation fraîche de tégument de Lamellibranches : on y distingue les cellules sanguines et on peut assister aux mouvements divers qu'elles exécutent ou dont elles sont le siège : émission et retrait de pseudopodes, reptation, englobement d'objets solides, enroulement en boules, glissement, déplacement des enclaves et inclusions, mouvement brownien des particules protoplasmiques, etc. C'est dans des conditions identiques que Pouchet, chez *Palæmon*, et Griesbach, chez l'Écrevisse et chez la Moule aussi, ont pu étudier les propriétés vitales des éléments sanguins.

Le sang des Mollusques en général et des Lamellibranches en particulier a fait l'objet d'un grand nombre de recherches. En 1854 déjà, Lieberkühn, le premier, a observé les mouvements des globules d'Anodonte, qu'il considérait comme des Amibes vivant dans les tissus de l'organisme. Metschnikoff décrit deux espèces de cellules sanguines : a) *leucocytes granuleux*, b) *leucocytes hyalins* (sans granulations ou n'en renfermant qu'un très petit nombre). Il nie l'existence de globules géants à noyau lobé ou à noyaux multiples. De son côté, Apathy (1 et 2) aussi admet chez les Najades deux sortes de leucocytes, dont les uns seraient caractérisés par la possession de prolongements, tandis que les autres n'en auraient point, et on les rencontrerait chez ces Mollusques dans la proportion de cinq des premiers pour un

Digitized by Google

des seconds. A son tour, Griesbach distingue les leucocytes remplis de grosses granulations et ceux qui n'en renferment pas, le nombre relatif de ceux de la première catégorie pouvant varier. La classification de Griesbach se confond donc assez intimement avec celle de Metschnikoff. Pour Cuénot, les globules du sang des Pulmonés, qu'il nomme généralement *amibocytes*, sont extrêmement simples : ils sont tous semblables ou à peu près et ne se différencient guère que par une plus ou moins grande quantité de protoplasme.

A l'état frais, nous constatons très bien qu'il y a des différences marquées entre les cellules sanguines, et nous y reconnaissons les deux espèces signalées par Metschnikoff et Griesbach, mais nous ne pouvons admettre sans réserves la distinction établie par Apathy. Ces deux sortes de leucocytes, en effet, émettent des pseudopodes, dont les uns sont d'une très grande ténuité, dont les autres, au contraire, constituent de véritables lobopodes. Semper (66), qui a étudié le sang obtenu par ponction, croit que les pseudopodes se produisent sous l'influence de l'air; Keferstein (35) n'admet pas cette manière de voir, parce que les pseudopodes existent dans le sang très frais, alors que l'air n'a pas encore pu exercer un effet suffisant. De l'avis de W. Flemming (21), il n'y aurait dans le sang en circulation que des lobopodes, les fins prolongements ne se produisant que sur le globule sorti des vaisseaux ou des lacunes. Nous nous rallions à la manière de voir du savant professeur de Kiel. Les résultats obtenus par la plupart de nos prédécesseurs, au sujet des pseudopodes, sont dus particulièrement à ce que les observations ont été faites sur des matériaux fixés ou bien sur du sang extravasé; dans ce dernier cas, les globules, inquiétés et mécaniquement excités par la ponction, le contact avec les instruments, porte-objets, air atmosphérique, etc., se présentent dans les premiers moments sous une forme sphérique, les prolongements rentrés, et ce n'est qu'après quelque temps qu'ils recommencent à en émettre. Loin de nous cependant l'idée de nier, pour ces conditions anormales, une part d'influence sur la production de ces appendices. Dans le cas de préparations fixées, il est impossible que les réactifs n'aient déterminé chez les leucocytes, si éminemment irritables, une rentrée spontanée des pseudopodes : il suffit de songer aux difficultés que rencontre celui qui veut obtenir à l'état fixé un rhizopodaire avec ses prolongements étendus. A l'état frais, au

Digitized by Google

contraire, les leucocytes observés dans des conditions physiologiques mettent au jour le jeu alternant de la poussée et du retrait de leurs prolongements. C'est ainsi que nous avons vu s'en produire de fins, toujours complètement hyalins, nombreux et étendus dans toutes les directions; quelques-uns étaient même bifurqués; les lobopodes, au contraire, sont en très petit nombre et charrient vers leur région axiale une traînée parfois considérable de granulations.

Entre les deux catégories de leucocytes que nous admettons donc avec Metschnikoff et Griesbach, nous distinguons une forme de transition *à fines granulations* et à pseudopodes relativement puissants et peu nombreux.

Les granulations des leucocytes granuleux sont à proprement parler des boules hyalines, de dimensions pouvant varier chez un même animal, voire même dans une même cellule, du simple au quadruple et plus : elles logent elles-mêmes parfois des sphères hyalines d'une réfringence un peu différente. Chez l'Huître, les leucocytes granuleux (leucocytes à boules) sont caractérisés par le fait que toutes leurs enclaves ont à peu près même diamètre et remplissent complètement la cellule. Ainsi que Flemming, nous constatons que l'acide osmique les noircit. Le Dr Fr. Janssens, de Louvain, a signalé la présence de ces enclaves dans les leucocytes des Acéphales et les considère, ainsi que Griesbach, comme étant produites par la cellule elle-même.

Une quatrième espèce de leucocytes, que seul le dernier auteur a signalée jusqu'à présent, se rencontre en assez grande abondance dans le sang des Lamellibranches : ce sont des leucocytes charriant des *inclusions* de natures diverses et qui leur donnent parfois des dimensions colossales [1]. Nous aurons l'occasion d'en reparler plus longuement; disons dès maintenant qu'avec Janssens nous les considérons comme des *phagocytes* ayant englobé des substances solides rencontrées sur leur passage. Il arrive que deux ou plusieurs d'entre eux s'associent et se fusionnent pour véhiculer une grande inclusion; on peut aussi suivre au microscope leurs pérégrinations à travers les lacunes et dans les tissus. Ce sont des *plasmodes* ou *polycaryocytes;* ils feront également l'objet d'une étude plus approfondie.

Metschnikoff nie l'existence de *leucocytes à noyau polymorphe* chez les

[1] Notre communication préliminaire parut à peu près à la même époque.

Digitized by Google

Mollusques lamellibranches et jusqu'à présent il n'y a aucun travail qui, sous ce rapport, soit en désaccord avec le savant russe. Dans les préparations fraîches, il est le plus souvent impossible d'en reconnaître dans les branchies ou dans les palpes, parce que le noyau n'est pas toujours excessivement distinct; mais dans les dissociations de tissus frais (branchies, palpes, foie), fixés et colorés consécutivement, et particulièrement dans les coupes, nous avons eu l'occasion d'en rencontrer plusieurs et de reconnaître également qu'ils jouent le rôle de phagocytes. Dans les figures 4, 5 et 6, planche II, sont représentés trois de ces *mégacaryocytes*, rencontrés dans le parenchyme du manteau d'*Unio pictorum*. Sans vouloir entrer dans les détails concernant la structure intime de ces éléments, nous dirons qu'ils diffèrent assez bien les uns des autres pour ce qui regarde l'aspect de leur protoplasme. Celui-ci est tantôt très sombre sur toute son étendue, ou plus foncé en certains points qu'en d'autres; tantôt il est assez clair et parsemé de granulations variables dans leurs dimensions. Ici le noyau est recourbé (noyau en boudin), là il revêt une forme noueuse, d'autres fois encore il est très allongé, ne présentant qu'en un ou deux points de sa surface une saillie plus ou moins prononcée; il est toujours relativement volumineux. Quant aux inclusions, nous y reviendrons à propos du rôle joué par les leucocytes à noyau bourgeonnant [1].

Il nous reste à parler de *leucocytes dont le protoplasme est réticulé* d'une manière tout à fait caractéristique : il en est représenté un certain nombre, planche III, figures 26 à 32. Dans les préparations provenant de dissociations des branchies et du foie d'Anodonte, la structure réticulée de ces éléments est très manifeste et les mailles sont assez régulièrement distribuées et très semblables entre elles. Les trabécules semblent se continuer à la surface avec la membrane cellulaire. Le noyau et les inclusions dérangent le plus souvent dans leur voisinage immédiat la régularité des mailles qui peuvent dans certains cas se déformer par pression mutuelle. Les prépara-

[1] Dans nos coupes d'organes de *Paludina vivipara*, nous trouvons à maints niveaux des mégacaryocytes typiques; leur noyau atteint parfois des dimensions considérables et le protoplasme renferme toujours des inclusions identiques à celles des mégacaryocytes des Lamellibranches.

Digitized by Google

tions en coupes fournissent des détails confirmatifs, mais le plus souvent, dans ce cas, les mailles en imposent pour des vacuoles serrées les unes contre les autres. Nous devons ajouter ici que, dans du sang obtenu par ponction du cœur, un grand nombre de leucocytes étaient « *vacuolisés* », ce qui nous porte à admettre que l'*aspect* de ces éléments organiques peut parfois varier.

W. Flemming (21) a rencontré quelquefois dans le sang des Lamellibranches des éléments particuliers à forme inconstante et en quantité variable : ce sont, dit-il, de petits corps le plus souvent pâles, sans prolongements, avec ou sans noyau distinct. Il n'oserait certifier qu'ils appartiennent au sang. Sont-ce les homologues de corpuscules arrondis, quelquefois mais rarement nucléés, que nous observons dans les coupes de manteau d'Anodonte fixé au $HgCl_2$? C'est là seulement que nous en avons vu. Ils se rencontraient par places, assez régulièrement rangés à la file, immédiatement sous l'épithélium, et avaient là sensiblement tous mêmes dimensions; plus profondément dans les tissus, au contraire, leur diamètre était variable et pouvait diminuer de moitié. N'ayant pas eu l'occasion de les étudier d'une façon spéciale, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Il y a donc à distinguer, chez les Mollusques lamellibranches examinés par nous, les catégories suivantes de leucocytes :

a) Les leucocytes grossièrement granuleux;
b) Les leucocytes finement granuleux;
c) Les leucocytes hyalins;
d) Les phagocytes;
e) Les plasmodes;
f) Les mégacaryocytes;
g) Les leucocytes réticulés (ou vacuolisés).

Un examen attentif permet de considérer ces différents éléments comme n'étant que des stades divers du leucocyte : tant dans les préparations à frais que dans les coupes, on constate qu'il existe entre eux des états nom-

Digitized by Google

breux et probants de transition. On en rencontre qu'il est parfois difficile de classer parmi les finement ou les grossièrement granuleux et il n'est pas rare d'avoir affaire à un leucocyte hyalin renfermant un seul ou un très petit nombre de granulations (pl. I, fig. 1 et 3), toutes grosses ou toutes fines, ou bien encore de l'une et de l'autre variété. Les globules sanguins des Pulmonés ont, d'après Cuénot, une propriété commune : c'est leur tendance à la phagocytose. Chez les Lamellibranches, on peut assister sur le vivant à l'incorporation active d'une granulation, d'une fibrille, etc., par un leucocyte qui, ce faisant, devient phagocyte, entraînant ce lest dans sa progression. Il se fait parfois que deux cellules sanguines soient tellement rapprochées qu'elles semblent être fusionnées : on les voit, dans l'examen sur le vivant, se séparer bientôt (c'était un pseudoplasmode), ou présenter un point de contact et de fusion intime; d'autres fois, ils s'associent franchement à deux ou plusieurs pour entourer une inclusion très étendue : les préparations définitives bien réussies peuvent donner des images très nettes de plasmodes vrais résultant de l'union de deux ou plusieurs leucocytes. Nos dissociations de foie d'Anodonte, recueilli à frais, nous ont fourni plusieurs exemples de leucocytes multinucléés. Quant aux mégacaryocytes, il y a également des degrés bien marqués : il en est de très grands, d'autres qui ne dépassent que légèrement les dimensions du leucocyte ordinaire et dont le protoplasme n'a subi aucun changement appréciable; seul, le noyau, dans ce dernier cas, a plus ou moins augmenté en dimensions. Leur rôle est avant tout phagocytaire, et au fur et à mesure que le mégacaryocyte progresse, il digère dans son protoplasme les substances solides englobées et le charge ainsi d'éléments nouveaux qui lui communiquent un autre aspect et des propriétés microchimiques nouvelles. Les leucocytes réticulés (ou vacuolisés), nous ne croyons pas pouvoir en douter, descendent pour des motifs analogues de leucocytes typiques : nous ne nous en sommes pas occupé d'une façon spéciale.

Quand sur un fragment de branchie, de palpe, de manteau ou de pied fraîchement amputé à un des Mollusques acéphales cités plus haut, on examine la limite de séparation de l'épithélium d'avec les tissus sous-jacents, on peut souvent observer les mouvements amiboïdes de cellules migratrices

Digitized by Google

se frayant un passage vers la surface libre du corps. A condition de se servir de grossissements convenablement choisis (nous avons obtenu les meilleurs résultats avec l'oculaire 4 et l'objectif F de Zeiss), on peut étudier ce phénomène dans tous ses détails. Les objets qui s'y prêtent cependant le mieux sont les branchies et les palpes, à cause de la hauteur qu'y atteignent les cellules épithéliales et ensuite parce que ces organes aplatis n'ont qu'une très faible épaisseur. Les cellules migratrices que l'on voit se déplacer dans les lacunes sanguines à la façon de petites Amibes, poussent un ou plusieurs pseudopodes (fins ou épais) qui semblent se mouler sur les cellules et sur les fibres voisines, cherchant à se faire un passage. Ce manège, dont aucun détail n'échappe à l'œil de l'observateur, peut durer plus ou moins longtemps; les pseudopodes peuvent rentrer pour reparaître aux mêmes points de la surface ou en d'autres, et là encore se produisent les mêmes mouvements. Quelquefois la cellule quitte la place et progresse en rampant, se moulant sur la membrane basale pour s'arrêter en un autre point et y recommencer, nous dirons, les mêmes tentatives; ou bien elle disparaît dans les lacunes et on la perd de vue. Un pseudopode ayant pénétré dans l'épithélium entraîne plus ou moins rapidement le corps protoplasmique ainsi que le noyau lesquels, dans ce cas, peuvent s'étirer et s'étrangler au point de ne plus former qu'un mince fil au niveau du passage; les cellules épithéliales sont écartées, comprimées, parfois déformées sur toute la partie de leur corps qui supporte la pression, le reste de la cellule ne subissant aucune altération et les cils vibratiles continuant à battre normalement. L'élément envahissant le territoire épithélial continue sa progression, et il n'est pas rare de le voir s'écarter de sa direction primitive et obliquer dans un sens ou dans un autre. Il arrive que le mouvement ressemble à un glissement, d'autres fois le protoplasme ondule à la façon de vagues, mais il ne peut certainement point être question ici d'une progression passive; l'émission des pseudopodes se continue d'une façon active, quoiqu'il faille admettre que la pression exercée par les cellules épithéliales écartées puisse contribuer dans une certaine mesure à modifier la forme du protoplasme leucocytaire.

La pénétration de leucocytes peut se faire dans des points parfois très

Digitized by Google

voisins, et les trajets suivis peuvent se maintenir longtemps parallèles entre eux et aux axes des cellules épithéliales. Il arrive aussi que des leucocytes s'engagent dans une voie produite par d'autres et se glissent à la suite de ceux qui s'y trouvent déjà; de là parfois une accumulation assez grande et à toutes les hauteurs de l'épithélium. Sous ce rapport, l'aspect de l'épithélium branchial et palpaire de l'Huître est réellement remarquable : les leucocytes à boules peuvent dans certaines circonstances envahir le tissu épithélial en nombre tel, qu'aussi bien dans les préparations fraîches à plat que dans les coupes, l'épithélium disparaît presque entièrement à la vue, tant il est farci de leucocytes le pénétrant à toutes les hauteurs. Ray Lankester (60) a décrit ces leucocytes à boules comme étant des éléments épithéliaux ayant acquis des propriétés glandulaires et servant, chez l'Huître de Marennes, à l'expulsion du corps de l'animal d'une substance nocive. Nous préparons en ce moment un travail où nous étudierons cette question d'une manière spéciale. Disons dès maintenant que l'on peut aisément s'assurer que le savant anglais a fait erreur ici, en constatant que les tissus profonds renferment les mêmes éléments en nombre très considérable, ce qui ne serait pas le cas s'il s'agissait de cellules épithéliales. L'accumulation intraépithéliale de leucocytes peut encore se produire quand quelques-uns, entrés par des points différents, se rencontrent pendant leurs migrations, et il en résulte des écartements parfois très étendus de cellules épithéliales. Parmi les cellules envahissantes, on reconnaît souvent des phagocytes charriant des inclusions très grandes (pl. III, fig. 1, 2, 3 et 4) : ils poussent leurs prolongements lobiformes dans les voies ouvertes par des leucocytes à fins prolongements, ou se frayent eux-mêmes un passage par écartement des éléments épithéliaux. Il nous est maintes fois arrivé d'en voir plusieurs à la file, déterminant ainsi, de même que les autres cellules migratrices, ce que Renaut a nommé des *thèques intraépithéliales*.

Pendant leur progression à travers l'épithélium, les éléments sanguins peuvent laisser les cellules intactes, bornant leur rôle à un simple écartement, et arriver à la surface libre où ils conservent assez longtemps leurs propriétés amiboïdes; ils finissent néanmoins par être entraînés, grâce aux battements des cils vibratiles. D'autres fois, au contraire, ils entament le

Digitized by Google

corps cellulaire qui porte bientôt les signes non équivoques d'un commencement d'érosion : les bords de la blessure ainsi produite sont irréguliers. On ne constate pas que la cellule envahissante enlève des parties solides de l'élément épithélial et nous sommes porté à croire qu'il pourrait bien s'agir d'une digestion à la surface. On assiste donc au creusement d'une cavité aux dépens du tissu épithélial; celle-ci peut s'étendre sur un ou plusieurs territoires cellulaires et on poursuit aisément son accroissement progressif. La cellule migratrice s'y meut d'une façon très active et on se rend facilement compte de tous ses détails histologiques (la nature de ses pseudopodes, de son protoplasme et de ses inclusions, de son noyau, etc.). On constate ainsi que ce trou peut être creusé par les différentes espèces de leucocytes et on y rencontre même les méga- et les polycaryocytes déjà décrits antérieurement : ceux-ci n'y sont naturellement représentés qu'en minime quantité. De même que pour les leucocytes qui ne font qu'écarter et déprimer les cellules épithéliales, il peut se faire que ceux qui rongent ces éléments se rencontrent pendant leur marche dévastatrice. Ceci se produit lorsque les cloisons séparant deux cavités voisines disparaissent par l'action dissolvante des phagocytes : du coup, les deux cavités n'en forment plus qu'une et il s'y meut deux phagocytes qui continuent leur œuvre l'un indépendamment de l'autre. De la même façon encore peuvent venir se joindre à cette caverne secondaire une ou plusieurs cavités primitives creusées chacune par un seul ou par un petit nombre de phagocytes : il en résulte une brèche parfois énorme, s'étendant sur un nombre plus ou moins grand de territoires cellulaires et peuplée par plusieurs phagocytes (pl. I, fig. 1). Les limites cellulaires et le noyau semblent résister le plus longtemps et se maintiennent parfois sous forme de franges et de bribes pendant dans la cavité. Cette brèche constitue dans l'épithélium un espace très clair dont l'observation est fort aisée : ici la dévastation peut se poursuivre très bien et aucun mouvement de phagocyte n'échappe à l'œil de l'observateur.

Cependant la cavité augmente, ses limites érodées s'étendent et peuvent envahir successivement les cellules environnantes dans toutes les directions. C'est ainsi que bientôt, du côté de la surface libre des cellules, il ne reste

Digitized by Google

plus qu'un mince liséré de protoplasme qui diminue progressivement d'importance. Malgré cela, les cils vibratiles n'ont rien perdu de l'énergie et de la régularité de leurs mouvements alors que les cellules dont ils ne sont, somme toute, que des dépendances, ont presque complètement disparu [1].

[1] Cette particularité mériterait que nous nous y arrêtions si elle offrait plus de rapports avec le sujet principal de ce travail. Nous nous contenterons d'ajouter quelques détails en note. Depuis les travaux de Friedreich, de Marchi (51), d'Engelmann (18) et d'autres, on admet généralement, et nous avons eu l'occasion de nous en convaincre nous-même, que les cils vibratiles sont en continuité avec un système de filaments intracellulaires qui, semble-t-il, peut parfois se poursuivre jusque dans la partie basale de la cellule. Nussbaum (47) partage cette manière de voir pour les cellules ciliées du rein des Plagiostomes, et Eimer (16) pour l'épithélium branchial d'Anodonte; ce dernier auteur décrit et figure dans les cellules épithéliales des branchies de l'Axolotl une continuité avec le réticulum nucléaire. Ainsi que le suppose Schwalbe (60) pour les éléments épithéliaux des branchies de *Perophora* et comme le décrit Kupffer pour les cellules des glandes salivaires de *Periplaneta*, Eimer reconnaît dans les cellules ectodermiques de *Cyanaea* et d'*Aurelia* une continuité de leur flagellum avec une fibrille nerveuse.

Quant à l'origine, au siège du mouvement, il y a des divergences très sensibles dans les opinions. Nussbaum croit, comme Engelmann, que toujours le battement des cils est dû à des contractions du protoplasme cellulaire qui se communiquent au système filamentaire sur lequel reposent les cils. Pour Hertwig (24), l'action en commun des cils est réglée par transmission d'excitations reçues par le corps protoplasmique, et cette transmission se ferait, surtout d'après Verworn (68), par l'intermédiaire de l'ectoplasme chez les organismes unicellulaires. Schwalbe estime que les cils sont mécaniquement excitables, et ce indépendamment d'une intervention cellulaire, ou bien qu'il y a une excitation réflexe arrivant aux cils par l'intermédiaire d'une fibrille nerveuse : il va de soi que cette dernière interprétation est aussi celle d'Eimer et de Kupffer.

Nous ne nous proposons pas de discuter ici ces différentes opinions, car la délicatesse du sujet exige une étude spéciale à laquelle nous ne nous sommes point livré; mais le fait de la persistance des vibrations régulières et isochrones, alors que de la cellule il ne reste plus guère qu'une mince bordure protoplasmique, rapproché des résultats obtenus ou rapportés par d'autres (Sabatier (54), Nuel et Fredericq (55), Schiefferdecker et Kessel (58), etc.), tend au moins à infirmer quelques-unes d'entre elles. Ajoutons que dans nos dissociations de branchies de Lamellibranches, nous avons vu à maintes reprises sur des cellules, en partie dilacérées ou simplement représentées par un étroit fragment de protoplasme, portant encore la garniture ciliaire, dont le corps et le noyau (s'il existait encore) étaient déjà teintés par le vert de méthyle acide, le mouvement vibratile se continuer activement dans le liquide ambiant, porteur lui-même du réactif; nos coupes d'épithéliums vibratiles, obtenues au microtome à glace, offraient encore pendant longtemps le spectacle des battements. En présence de ces faits, on serait tenté de reconnaître à ces appendices, dans une certaine mesure et dans certains cas, une indépendance relative. Mais encore une fois, nous n'essayerons point de résoudre le problème et ne fournissons ces données qu'à titre de renseignements, laissant à d'autres le soin de les tirer au clair.

Digitized by Google

L'érosion se continue surtout du côté de la surface libre et bientôt un orifice se produit sous l'action dissolvante d'un leucocyte qui s'y glisse à la façon d'une Amibe et arrive ainsi entre les cils vibratiles où il continue à ramper pendant un temps plus ou moins long. De semblables sorties se sont produites un grand nombre de fois sous nos yeux, ce qui nous a permis de tenir note de toutes les particularités qui les accompagnent. C'est ainsi que nous avons vu un second phagocyte suivre le premier par la voie déjà ouverte, de même qu'un troisième et un quatrième, etc.; tous se maintenaient pendant quelque temps à la surface de l'épithélium d'où, à un moment donné, ils furent balayés par le battement des cils vibratiles et allèrent se joindre au mucus et à d'autres produits de déchet encombrant le milieu ambiant. Nos observations répétées sur un grand nombre d'exemplaires de chacune des quatre espèces de Mollusques citées : *Unio, Anodonte, Mytilus* et *Ostrea,* ont fourni des résultats en tous points concordants et confirmatifs des détails exposés ci-dessus [1]. A notre sentiment, il serait inutile et sans intérêt pour le lecteur de donner ici séparément et par le menu les observations faites chaque jour pendant plusieurs mois; il nous suffira de dire que des différences individuelles peuvent se présenter parfois, mais que ces différences elles-mêmes constituent uniquement des phases du phénomène qui confirment l'observateur dans les conclusions suggérées par les premières expériences.

Il est une objection que l'on pourrait faire à la méthode employée dans l'expérience précédente : c'est qu'en coupant un fragment d'une branchie ou d'un autre organe, on y change complètement les conditions physiologiques pour tous les éléments entrant dans sa constitution; c'est qu'en procédant ainsi, on anéantit du coup la circulation et on abandonne les globules du sang à des influences nouvelles qui, à la rigueur, pourraient intervenir pour une part dans les causes du phénomène que nous venons de décrire. Nous pouvons répondre tout d'abord qu'alors même que les conditions sont changées, elles ne peuvent pas avoir opéré avec une rapidité telle, que sur un fragment à examiner, porté immédiatement et lestement sous le micro-

[1] Il en a été de même pour les recherches poursuivies, depuis le dépôt du présent travail, chez *Cyclas cornea* et *Tellina tenuis*.

Digitized by Google

scope, la désorganisation fût déjà avancée au point où nous l'avons trouvée dans certains cas, c'est-à-dire au moment où la bordure protoplasmique allait déjà céder pour livrer passage aux phagocytes, tandis qu'à d'autres niveaux elle ne faisait que débuter ou avait atteint des hauteurs diverses dans l'épithélium. Il y a également des arguments puissants qui sont fournis par les figures, comme celle, par exemple, de la planche II, n° 2, et qui représente une coupe de palpe d'Anodonte fixée instantanément au moment de l'amputation, c'est-à-dire avant que le procédé opératoire ait pu déterminer le moindre trouble physiologique. Mais la réponse péremptoire est fournie par la répétition de l'expérience sur l'animal simplement privé de sa coquille [1]. Voici le procédé : la coquille est cassée avec précaution en un de ses points, puis on la détache de proche en proche de toute la surface extérieure du manteau; à la hauteur de l'insertion des muscles adducteurs, elle est épargnée sur tel exemplaire ou également détachée sur tel autre (le résultat n'en est pas altéré). Sur l'animal ainsi dépouillé, on ouvre la chambre palléale en écartant les bords du manteau; plaçant ensuite l'animal par la face ventrale sur le porte-objet et relevant un lobe du manteau, on met à nu, en même temps qu'elles s'étalent, les branchies. On couvre, et l'examen peut se faire comme dans le cas d'un fragment amputé. Nous pouvons, sans crainte de contradiction, prétendre avoir conservé ainsi les conditions physiologiques dans toute leur intégrité et certainement beaucoup mieux que l'expérimentateur qui observe le mouvement des cellules migratrices dans le mésentère ou dans le poumon d'une Grenouille éventrée. Avec ce nouveau procédé, dont nous ne nous sommes servi qu'à titre de contrôle, nous avons toujours obtenu des résultats absolument confirmatifs.

Dans la planche I, nous avons reproduit par le dessin l'aspect que peuvent présenter les tissus épithéliaux des branchies et des palpes au moment où ils sont le siège d'une dévastation partielle de la part des phagocytes. La figure 1 représente le bord libre d'un filament branchial étudié tout au début de nos recherches. La cavité irrégulière présente à ses limites des hachures, des érosions, des déchirures qui donnent à l'ensemble un aspect tout parti-

[1] L'expérience réussit le mieux avec la Moule, dont les dimensions rendent le maniement moins difficile.

Digitized by Google

culier. Çà et là se voient encore des cloisons incomplètement enlevées, dont les débris restent suspendus dans la lumière de la cavité. Celle-ci envahit des territoires cellulaires nombreux dans les trois directions et loge sept phagocytes, différant entre eux quant aux pseudopodes, aux enclaves du protoplasme et à la structure de celui-ci même. Nous renvoyons pour ces détails au chapitre relatif aux leucocytes. La communication de cette cavité avec les lacunes sanguines, observée *in vivo,* n'a été figurée qu'une seule fois (pl. I, fig. 3); dans la figure n° 1 de la planche III, nous avons représenté une large communication, d'après une coupe, après fixation et coloration. Étant données les explications relatives au début et au processus du phénomène, nous n'aurons pas besoin d'insister longuement pour faire comprendre que cette communication ne reste pas toujours béante et par suite très évidente. Ainsi qu'il a été exposé, en effet, les phagocytes peuvent se glisser d'abord par les interstices les plus étroits, puis, arrivés entre les cellules épithéliales qu'ils dépriment et écartent simplement, ne commencer leur action destructive que plus tard, quand ils ont déjà atteint un certain niveau de l'épaisseur épithéliale; la cavité déterminée par leur passage disparaît par occlusion : les éléments épithéliaux, débarrassés en cet endroit de la pression momentanée, reviennent à leur position primitive. Il se peut également que la brèche de communication fût si profondément située qu'elle nous ait échappé complètement dans plusieurs cas. Un dessinateur de profession, mais qui n'a pas l'éducation scientifique nécessaire à l'interprétation, a tracé la figure 2. Là aussi il n'y a point de solution de continuité du tissu épithélial du côté de la membrane basale. Le dessin ne rend qu'un plan unique et il est probable que son auteur n'a point aperçu les rapports de la cavité avec les lacunes voisines. Ici l'érosion est poussée beaucoup plus loin que dans la figure précédente : du côté de la surface vibratile, en effet, il ne reste des cellules épithéliales qu'une étroite bande de protoplasme surmontée des cils encore énergiquement mobiles. Le creusement irrégulier est surtout manifeste du côté profond où l'on voit se dresser des restes cellulaires massifs et déchiquetés sur les bords. Quatre phagocytes y sont figurés : trois d'entre eux renferment dans leur protoplasme finement granuleux ou hyalin des masses réfringentes hyalines et sphériques

Digitized by Google

ou ovalaires; le quatrième ne contient que des granulations. Tous sont surpris pendant leur reptation amiboïde, reconnaissable à la présence de pseudopodes fins ou obtus. Quant à la cavité représentée dans la figure n° 3, elle renferme une cellule épithéliale encore conservée en grande partie; le noyau se trouve intact au milieu d'un fragment de protoplasme dont une bribe pend librement vers la profondeur, une autre se continuant avec le bord cellulaire libre qui n'a pas encore subi l'attaque du phagocyte. En dehors des trois qui s'y trouvent déjà, un quatrième se présente pour y pénétrer : en cet endroit, on voit nettement que la membrane basale a été interrompue et que le passage est ouvert au nouvel arrivant. Pour le reste, la figure confirme complètement les détails fournis par les deux précédentes. Enfin, nous avons fait rendre par le dessin les aspects successifs qu'affecte l'épithélium à l'endroit où les phagocytes l'ont entamé. A l'effet d'écarter toute cause d'erreur, due à l'entraînement et à la suggestion qu'aurait pu produire chez nous le phénomène si intéressant, nous avons confié la besogne à l'artiste-dessinateur attaché au service du laboratoire, après lui avoir donné les instructions suivantes : 1° en *quelques secondes* de temps et à une demi-heure d'intervalle, nous rendre deux fois *en croquis* l'aspect général, en respectant surtout les dimensions de la cavité, la forme et la position relative des leucocytes; 2° achever le dessin sans se préoccuper autrement des détails et en ne s'inspirant que des figures déjà confectionnées antérieurement sous notre direction. C'est dans de pareilles conditions que les figures 4 et 5 de la planche I ont été dessinées : elles représentent deux états successifs de l'épithélium vibratile examiné au sommet d'un filament branchial de Moule. Le n° 4 reproduit l'état des choses constaté à 9 heures 15 minutes du matin. Le nombre des phagocytes est de six, dont un différant assez sensiblement des autres; ainsi que nous le verrons plus loin, c'est une cellule sanguine charriant une inclusion d'une nature particulière et qui provient probablement de la glande digestive. Les pseudopodes sont tous très épais et leur direction indique suffisamment le sens des déplacements. La cavité est très grande et ses limites affectent l'aspect de celles décrites antérieurement. Nulle part elles n'atteignent jusqu'à la surface libre; elles sont également encore assez distantes de la membrane basale séparant l'épithélium des tissus sous-jacents.

Digitized by Google

Ainsi qu'il était convenu, la figure n° 5 esquisse l'état de l'épithélium trente minutes plus tard (9 h. 45 m.). Un rapide coup d'œil fait saisir immédiatement les progrès de la dévastation phagocytaire : la cavité a reculé ses bords sur tout le pourtour; ils se sont rapprochés considérablement de la surface épithéliale; en un point *a*, il semble même qu'il y ait contact; — le nombre de leucocytes a augmenté : il y en a sept au lieu de six; — la bande épithéliale a également diminué vers le sommet de l'axe parenchymateux; enfin, tous les leucocytes occupent une autre position relative. Si nous avions rendu par le dessin le phénomène à un même laps de temps plus tard, il est probable que nous eussions eu à reproduire un trou dans le liséré épithélial et que nous n'eussions plus retrouvé les sept phagocytes. Mais nous avons jugé que les deux dessins pouvaient suffire pour faire comprendre la marche du phénomène.

Nous disions plus haut que les branchies et les palpes conviennent surtout pour l'examen de la phagocytose pendant la vie de l'animal; il n'en est pas moins vrai qu'on peut l'observer également sur le bord du manteau et dans les téguments recouvrant toutes les autres parties du corps. Pour cela, il faut faire une excision peu profonde parallèlement à la surface; mais dans ce cas les tissus sont tellement éloignés de leurs conditions normales, que le phénomène et son observation perdent de leur *valeur démonstrative*. Ajoutons à cela que le fragment amputé étant rarement aplati, le couvre-objet presse la surface même, écrase plus ou moins l'épithélium et exerce une action qui doit nécessairement déranger la progression des cellules sanguines sur ce territoire. Néanmoins, malgré ces conditions désavantageuses qui ne se rencontrent pas pour les *bords libres* des filaments branchiaux et palpaires, on peut voir les phagocytes entrer dans l'épithélium et y organiser les dévastations typiques que nous avons décrites plus haut. Mais ici, et surtout dans l'épithélium qui recouvre le pied et le corps, on constate la sortie de leucocytes à boules qui, le plus souvent, le quittent isolément, après avoir franchi ce tissu par simple *écartement* des éléments. Examinés à un grossissement moins puissant, les téguments de toute la surface du corps semblent hérissés de petites houppes granuleuses; situées entre les cils vibratiles, elles sont continuellement ballottées dans l'eau que ceux-ci agitent : le fort agrandisse-

Digitized by Google

ment fait reconnaître en elles les leucocytes à boules (granulations grossières) sortant de l'épithélium et déjà à moitié dégagés.

Ce dernier mode de migration se fait dans des proportions considérables et doit faire supposer qu'il y a une néoformation leucocytaire très énergique à l'intérieur du corps. C'est là une question dont nous n'avons pas eu le temps de nous occuper spécialement au cours de nos recherches et que nous signalons à ceux de nos lecteurs que le sujet pourrait tenter. Cuénot décrit chez les Pulmonés une division directe des éléments sanguins ; il ne nous est jamais arrivé d'en rencontrer des traces chez les Acéphales, mais çà et là nous avons trouvé des figures mitosiques dans des leucocytes en diapédèse dans les épithéliums. Quant au phénomène de la phagocytose proprement dite (creusement de cavités intraépithéliales), il n'est pas très fréquent dans les téguments autres que ceux qui recouvrent les branchies et les palpes ; dans ces derniers, au contraire, il se présente assez souvent, mais avec des degrés de fréquence et d'importance très variables. Chez des exemplaires de Moules, d'Anodontes et d'Huitres, il n'y avait qu'un champ phagocytaire sur une vingtaine de filaments, tandis que chez d'autres (surtout des Moules et des Anodontes) chaque filament était creusé dans son épithélium apical. Nous ne sommes pas parvenu à connaître les causes de ces différences (âge, faim, excès ou manque d'oxygène, états pathologiques, etc.). Dans tous les cas, on constate toujours vers le sommet de l'axe conjonctif des filaments, une accumulation de cellules sanguines qui semblent prêtes à percer l'épithélium où toujours il s'en rencontre déjà isolées ou groupées dans les nids intercellulaires. Semblable constatation a été faite par Hamman (28) et par Durham (14) dans les branchies des Échinodermes. Nous aurons l'occasion de nous en occuper plus amplement dans le paragraphe traitant de la signification physiologique du phénomène.

Il a déjà été question antérieurement des doutes que nous avaient suggérés nos premiers résultats : ce phénomène, assez contraire aux idées généralement reçues, cette destruction d'éléments par d'autres appartenant au même organisme, méritait bien qu'on appliquât tous les modes de recherches pour arriver à le connaître dans son processus et dans sa signification. Les méthodes énergiques et rapides ont eu nos préférences parce qu'elles nous

Digitized by Google

permettaient de surprendre les faits et de les fixer d'une manière définitive dans leurs diverses phases. C'est ainsi qu'après avoiruivi pendant un temps plus ou moins long des phagocytes ayant envahi un endroit, nous avons fait usage comme fixateurs des liqueurs bouillantes de Flemming et d'Hermann, de sublimé corrosif à 2 % également à chaud, ou d'acide osmique; les objets furent enrobés dans la paraffine ou dans la celloïdine et nous fournirent les coupes minces qui devaient nous conduire à l'interprétation des faits. Les préparations obtenues après fixation par les liqueurs osmiques ont été colorées à la safranine : elles nous ont donné les meilleurs résultats. La figure 3 de la planche II représente une coupe de manteau d'*Unio,* obtenue suivant cette méthode. On y distingue nettement les leucocytes dont le parenchyme conjonctif est parsemé, caractérisés par les boules isolées ou agglutinées qu'ils charrient; on les retrouve avec les mêmes caractères encore dans l'épithélium où ils ont été surpris par le fixateur au moment où ils le franchissaient par écartement simple des éléments. On les reconnaît bien vite comme correspondant à ceux que l'on peut observer pendant la vie progressant entre les cellules épithéliales. Une préparation de l'espèce, faite dans les conditions exposées ci-dessus, constitue un contrôle irréfutable de l'observation sur le vivant. Quelques-uns de ces éléments charrient des substances solides qui ont noirci par l'action de l'acide osmique, mais ce n'est point là une exception et surtout il n'y a point là de quoi vouloir les distinguer des cellules sanguines. Plusieurs de celles-ci, en effet, dans le tissu interstitiel des organes les plus divers, peuvent véhiculer des granulations, des points, des bâtonnets, etc., colorés en noir ou en gris par les liqueurs osmiques, tels par exemple, les leucocytes représentés dans les figures 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 11 de la planche II. J'en ai même rencontré tantôt dans un épithélium tégumentaire, tantôt dans les lacunes sanguines dont les dimensions dépassaient absolument les normales et dont le noyau était devenu polymorphe : exemple, les figures 4, 5 et 6. La figure 1 de la même planche représente le sommet d'un filament branchial de Moule fixé par la liqueur d'Hermann, après que j'y eusse observé la phagocytose pendant une heure au moins. Le résultat est en tous points probant : la cavité y est très nette, ses limites sont irrégulières, témoignant d'une érosion

Digitized by Google

typique; le tissu a perdu sa continuité vers la partie profonde et il y a manifestement communication entre cette cavité et les lacunes de l'axe conjonctif du filament. Les leucocytes y sont au nombre de cinq et leur forme indique nettement qu'ils ont été fixés pendant leur progression amiboïde. Le dessinateur, sur mes indications, n'a figuré qu'un seul plan : il aurait aussi pu rendre les anfractuosités profondes dont l'examen microscopique permet de reconnaître l'existence et qui témoignent une fois de plus du mode de genèse de ces cavités. Après une fixation à l'acide osmique, nous avons coloré des filaments *in toto* au vert de méthyle. Quoique les préparations ainsi obtenues n'aient pas la netteté que fournissent les méthodes de Flemming et d'Hermann, elles ont néanmoins une grande valeur démonstrative *immédiate,* en ce sens qu'elles permettent le contrôle d'une observation faite sur le vivant au moment où les détails sont encore présents à l'esprit avec toute leur netteté. Aussi nous sommes-nous servi à diverses reprises de cette méthode; elle a toujours fourni la confirmation complète de nos constatations sur le vivant. Les fixations au sublimé bouillant ont été, dans les mêmes conditions, d'une grande utilité; nous en reparlerons dans un alinéa suivant où il y a lieu de nous arrêter à la nature des éléments amiboïdes rencontrés dans les cavités intraépithéliales.

Une des premières objections que nous aient présentées les personnes auxquelles nous avons communiqué nos résultats au début, objection que nous avions prévue, du reste, et qui, *a priori,* s'impose à l'esprit, est relative à la nature des éléments amiboïdes qui creusent le tissu épithélial pour atteindre la surface libre. Ne sont-ce pas des parasites envahissant le corps de l'animal et y déterminant des troubles aussi graves que ceux à la genèse desquels nous venons d'assister? Nous avons acquis la certitude que ces éléments appartiennent au sang du Mollusque et qu'ils constituent des cellules migratrices parcourant les divers tissus comme chez tous les animaux pluricellulaires. Il a déjà été établi une distinction entre les diverses espèces de leucocytes; nous avons insisté à cette occasion sur leurs *caractères différentiels* et sur leur *origine commune :* ils ne constitueraient que des phases diverses d'un même élément, le leucocyte. Ici encore l'occasion nous a été

Digitized by Google

fournie de vérifier le bien fondé de cette affirmation. Nous ne croyons pas nécessaire de nous y attarder davantage. Voici les divers motifs qui nous autorisent à affirmer que les artisans de la destruction intraépithéliale sont des leucocytes, non des parasites.

A. Sur le vivant :

1. Le creusement débute à la limite séparant l'épithélium d'avec le tissu lacunaire ou bien à un certain niveau de l'épithélium, jamais à la surface libre.

2. Il progresse vers cette surface et finit par la mise en liberté de l'élément envahisseur.

3. Les cellules à boules et autres qui glissent entre les éléments épithéliaux et parviennent à la surface, ont absolument les caractères des leucocytes (avec ou sans enclaves) dans les lacunes.

4. Les corps amaebiformes des grandes cavités leur sont en tous points semblables.

5. On peut assister à l'entrée des éléments dans l'épithélium : ils viennent des profondeurs et pénètrent d'une façon manifeste.

6. Durham a observé un phénomène analogue sur les branchies amputées d'Échinodermes et considère les cellules comme de nature sanguine.

B. Après fixation :

1. En comparant, dans une coupe de contrôle, les éléments renfermés dans les cavités avec ceux du sang, on constate qu'il y a identité parfaite.

2. Dans aucun cas, nous n'avons rencontré à l'intérieur du corps un parasite quelconque de nature rhizopodaire.

3. Jamais l'épithélium n'accuse à sa périphérie une détérioration débutante, ainsi que cela serait le cas s'il s'agissait d'un parasite venant de l'extérieur; très souvent, au contraire, il y a des solutions de continuité du côté de la membrane basale (fig. 3, pl. I; fig. 1, pl. II et fig. 1, pl. III) indiquant une érosion commencée ou déjà fort avancée.

Digitized by Google

4. Hamman (28) atteste que chez les Échinides, des cellules de l'espèce encombrent le tissu conjonctif avant leur sortie à travers l'épithélium.

Aux arguments qui viennent d'être exposés, nous pouvons ajouter ceux qui résultent des recherches et expériences suivantes :

I. — Coupes au microtome à glace d'objets examinés d'abord sur le vivant.

Toujours dans un but de contrôle et évitant d'employer des méthodes qui eussent pu produire des altérations artificielles, nous avons eu recours à une congélation rapide pour fixer des fragments de branchies et de palpes examinés d'abord *intra vitam*. A cet effet, les objets furent portés rapidement sur le congélateur du microtome à glace et débités ensuite en tranches les plus minces possible. Nous avons très aisément retrouvé les cavités intraépithéliales et les éléments migrateurs surpris pendant leur œuvre de destruction. Ayant affaire ici à des coupes, nous pouvions mieux juger que sur l'objet entier. Dans ce cas, en effet, le plan de la coupe passait parfois à travers la cavité et celle-ci se présentait alors béante et non plus, comme sur le vivant, recouverte du côté de l'observateur par du tissu intact avoisinant. L'examen de ces coupes dans l'eau nous fit reconnaître immédiatement la nature leucocytaire des phagocytes en question et nous permit de nous rendre compte à nouveau du creusement des cellules épithéliales de proche en proche sur toute ou partie de leur étendue. Souvent, au niveau de la membrane basale, une brèche était restée après le passage des leucocytes émigrés : il nous a paru dans ces conditions que cette brèche était parfois bien minime, même difficilement reconnaissable, se réduisant à une simple fente ou à un déplacement de fibres conjonctives. Il est probable que c'est grâce à cette circonstance que sur le vivant on ne peut que rarement découvrir la communication des lacunes sanguines avec les cavités intraépithéliales et reconnaître ainsi la voie suivie par les phagocytes envahisseurs.

Lors de l'examen d'une coupe faite au microtome à glace à travers le

Digitized by Google

bord du manteau amputé à une Anodonte (qui avait séjourné dans le bleu de méthylène) et observé au préalable pendant la vie, un phagocyte énorme, chargé de volumineuses inclusions, se mouvait encore dans une brèche épithéliale qu'il occupait entièrement à lui tout seul (pl. III, fig. 33) [1]. La cavité avait été entamée par le rasoir et se présentait béante à l'observation. Malgré la congélation, les cils vibratiles continuaient encore énergiquement leurs mouvements isochrones. Nous n'insistons pas sur ce dernier détail et voulons nous borner à le signaler en passant.

II. — Dissociation de téguments soumis antérieurement à une observation pendant la vie.

Des parties de palpes, de branchies, de manteau, etc., ont été dissociées à diverses reprises, après un examen préalable en place et sur le vivant. A l'effet de bien reconnaître les éléments et leurs rapports mutuels, nous avons traité nos préparations, ainsi obtenues, successivement par des vapeurs d'acide osmique et du vert de méthyle acide ou par ce dernier réactif seulement. Certes, cette méthode ne pouvait fournir le moyen de déterminer d'une façon certaine quels éléments avaient produit les dévastations intra-épithéliales, mais elle devait permettre de reconnaître la nature de tous les éléments histologiques renfermés dans l'épithélium et les tissus profonds au moment précis où la phagocytose avait été vue sur le vivant. Aussi avons-nous attaché une importance relative aux résultats qu'elle nous a donnés.

En dehors des leucocytes ordinaires, sur le caractère desquels il sera bien inutile de revenir encore ici, il se rencontre un nombre considérable de phagocytes dont le protoplasme charrie à côté du noyau coloré au vert de méthyle un amas sphérique, jaunâtre, véhiculant lui-même des granulations foncées. Dans un examen sur le vivant, on reconnaît aussi de ces éléments d'une façon presque constante dans les cavités intraépithéliales et dans les voies intercellulaires. La nature de ces inclusions nous a intrigué pendant longtemps. Fr. Janssens (33) signale, entre les cellules épithéliales, des leu-

[1] Pour de plus amples détails, voir l'explication de la planche III.

Digitized by Google

cocytes charriant des sphérules colorées en brun ou en noir qui, d'après lui, pourraient bien provenir de l'organe de Bojanus, où les leucocytes les auraient enrobées à la façon d'Amibes. Cette inclusion ne nous paraît pas se réduire à de simples sphérules, mais se compose dans sa totalité d'une substance fondamentale homogène, presque hyaline, dans laquelle flotte un amas jaunâtre. Celui-ci peut affecter des aspects assez différents : il est le plus souvent finement granuleux (fig. 29, 30 et 31 de la pl. III), les granulations foncées citées plus haut n'en étant que de plus grossières; il arrive aussi que le contenu jaunâtre soit constitué de deux (fig. 32, pl. III) ou de plusieurs sphérules ayant sensiblement même structure, mais dont les dimensions peuvent varier dans d'assez fortes proportions. Ajoutons encore que la pression mutuelle peut souvent entraîner des déformations. A l'effet de contrôler l'hypothèse du Dr Janssens, relativement à l'origine des inclusions, nous avons soumis à dissociation sur le frais des fragments d'organe de Bojanus (Moule et Anodonte). Les préparations renfermaient un très grand nombre de sphères hyalines servant de substratum à des granulations colorées et diversement groupées : la teinte dominante était le brun jaunâtre, tirant parfois sur le vert. Çà et là ces sphères avec leur contenu, qui flottaient librement dans nos préparations, étaient enclavées dans des cellules que nous reconnaissions le plus souvent comme étant de nature épithéliale. Certes il y a de grandes ressemblances entre ces éléments et ceux que l'on rencontre dans les dissociations de téguments; mais l'étude du foie dissocié fait découvrir dans cet organe des sphères du même genre dont les éléments colorés se rapprochent encore davantage de ceux des tissus branchiaux et palpaires. Il est vrai que parmi ceux-ci il existe de grandes différences et, nous fondant sur ce que nous ont appris les coupes d'organes fixés et colorés, nous croyons pouvoir admettre que parmi les inclusions colorées des phagocytes rencontrés dans les téguments, quelques-uns sont originaires du foie, les autres de l'organe de Bojanus.

Digitized by Google

III. — Coupes d'organes amputés à des Lamellibranches sans avoir été étudiés au préalable sur l'animal vivant.

Nous avions eu recours à un très grand nombre de fixateurs et de colorants, et bien des préparations dont nous nous sommes servi avaient été confectionnées longtemps avant que notre attention ne se fût fixée sur la question qui nous occupe en ce moment. La figure 2 de la planche II représente un fragment de coupe d'un palpe d'Anodonte; l'objet a été fixé par la liqueur d'Hermann, dont l'acide osmique a été réduit plus tard par le vinaigre de bois; coloration à la safranine. La cavité intraépithéliale est considérable et gorgée de phagocytes qui sont tous caractérisés par une inclusion d'un gris foncé (en fait, sa couleur est brun noirâtre) servant de support à des granulations brunes ou noires. Dans le dessin, plusieurs de ces inclusions ne sont pas accompagnées d'un noyau de leucocyte; il est probable que le rasoir a entamé les phagocytes en dehors du noyau qui se retrouverait probablement sur une coupe voisine. Les inclusions en question correspondent bien à celles observées sur le vivant, dans les préparations fraîches et dissociées ou fixées et coupées. Elles sont isolées ou en très petit nombre dans un même phagocyte et ont le plus souvent de très grandes dimensions. Les coupes de manteau et de branchies d'Anodonte fixées au sublimé ou à l'alcool et colorées à l'hématoxyline nous ont fourni des données encore plus probantes, si possible. Les inclusions avaient conservé leur aspect, leurs formes et pour ainsi dire leurs teintes, et tranchaient avec la dernière évidence sur le corps du phagocyte et son noyau, de même que sur les tissus environnants. Les figures 1, 2, 3 et 4 de la planche III, dessinées au crayon, ont été copiées de préparations du bord palléal d'Anodonte, région postérieure; il suffira ici de renvoyer à l'explication de la planche. Il est une particularité très intéressante présentée par les figures 1, *p* et 4 : il s'agit d'inclusions enrobées par deux leucocytes associés qui forment ainsi un plasmode. Celle de la figure 2 est typique : boule hyaline servant de substratum à deux amas colorés sphériques.

Dans les nombreuses préparations d'organes internes, tels que le foie,

Digitized by Google

l'intestin, l'organe de Bojanus, etc., on rencontre dans l'épithélium, dans le tissu conjonctif et dans les lacunes des leucocytes véhiculant des inclusions pareilles à celles qui viennent d'être décrites; nous aurons, du reste, à revenir plus tard encore à cette particularité sur laquelle nous n'insistons pas davantage pour le moment.

IV. — Cultures d'Anodontes dans des solutions faibles de bleu de méthylène.

En employant cette méthode, nous nous proposions de colorer *in vivo* les tissus des Mollusques pour mieux reconnaître encore les éléments histologiques, lors de nos observations sur la phagocytose. Les animaux séjournèrent dans les réservoirs pendant un, deux ou trois jours, et les liquides oxygénés furent renouvelés deux fois toutes les vingt-quatre heures. L'eau tenant en solution le bleu de méthylène pénètre dans le corps des Mollusques par la voie buccale en même temps que les aliments solides. Cette couleur d'aniline passe à travers la paroi du tube digestif, va se mélanger au sang (ou s'y dissoudre) et, emportée par le torrent circulatoire, va baigner tous les organes. C'est ainsi qu'on la retrouve partout quand on pratique une ponction : le résultat était donc quasi le même que s'il s'était agi d'une injection dans les tissus (voir V). Nous avons soumis les organes à observation :

a) A frais et *in situ;*

b) Après des coupes au microtome à glace;

c) Après fixation par l'alcool saturé de tannin.

Nous allons brièvement rendre compte des résultats obtenus dans chacune de ces conditions :

a) Au sortir de la solution de bleu de méthylène, les animaux sont teintés à un degré plus ou moins élevé : ce sont surtout les branchies et les palpes, le manteau beaucoup moins et le reste du corps fort peu. Au microscope, on reconnaît que la surface des branchies et des palpes est jonchée de phagocytes dont les inclusions sont toutes ou presque toutes colorées. Entre les cellules épithéliales, ou dans les cavités creusées à leurs dépens, se ren-

Digitized by Google

contrent comme toujours des leucocytes plus ou moins nombreux se frayant activement un passage vers la surface libre : leurs inclusions aussi ont presque toutes subi d'une manière plus ou moins prononcée l'action de la couleur d'aniline (fig. 10, pl. III). Ceux qui appartiennent à la variété hyaline (fig. 13) ont parfois le noyau légèrement teinté (dans le cas d'animaux qui ont séjourné très longtemps dans la solution) et les leucocytes à boules portent souvent le méthylène dans ces dernières (fig. 12). En fixant son attention sur le sang des lacunes, on distingue sans peine les éléments qui correspondent en tous points à ceux de l'épithélium et de la surface libre : cette méthode se montre ainsi on ne peut mieux appropriée au genre de recherches qui nous occupe en ce moment. Elle permet en effet de suivre sous le microscope avec une certitude entière les mouvements intérieurs et de relation des cellules sanguines; leurs inclusions, sauf à de rares exceptions, ont fixé la matière colorante, ce à l'exclusion de tout autre élément histologique; on leur donne ainsi une marque distinctive qui les fait trancher nettement sur le milieu au sein duquel elles évoluent, et en en choisissant une ou un petit nombre, on peut les poursuivre pendant longtemps sans courir le risque de les perdre de vue. En écrasant un palpe ou une branchie sous le microscope ou en dissociant leurs tissus, on peut également scruter la nature de ces éléments : les préparations de l'espèce sont on ne peut plus confirmatives de toutes les conclusions qui ont été formulées jusqu'à présent. Les amas colorés d'une façon intense et charriés par les leucocytes ne sont autre chose que les inclusions brun jaunâtre décrites chez les Lamellibranches normaux. Dans ses ingénieuses recherches sur la coloration des tissus végétaux vivants par les couleurs d'aniline, Pfeffer (58) a constaté que le bleu de méthylène pénétrant dans les cellules n'en colore point le protoplasme, mais simplement le suc cellulaire, ce qui proviendrait « de ce que ce dernier renferme des substances qui forment avec la couleur d'aniline une combinaison peu diffusible ». Appliquant ici le principe du professeur de Tübingen, il faudrait admettre que chez les Mollusques cultivés dans les solutions de bleu de méthylène, les inclusions de phagocytes se combinent à cette matière colorante en vertu d'une raison analogue. Mais il n'en est pas moins vrai que dans quelques

Digitized by Google

leucocytes, le noyau et même le protoplasme se teignent légèrement, de même que les enclaves sphériques (boules). Griesbach (23) croit que les leucocytes teints sur le vif par les couleurs d'aniline sont en voie de dégénérescence; nous ne pouvons point nous ranger à cet avis sans restriction : les leucocytes en dégénérescence se colorent certainement d'une façon plus ou moins intense, mais d'autres parfaitement sains peuvent absorber une minime quantité d'aniline, de même que les organismes unicellulaires que l'on étudie dans des conditions identiques. D'après Kowalewsky (39), qui a expérimenté sur les globules blancs de Grenouille, la matière colorante se répand d'abord d'une façon diffuse dans le protoplasme, puis se concentre en un amas granuleux central (Körnerhauf); une décoloration commence sur les bords; les résultats de Kowalewsky sont surtout en désaccord avec ceux de Griesbach, puisqu'il en découle que les jeunes leucocytes se colorent même plus rapidement que les adultes. Cuénot (8), qui a injecté à des Pulmonés terrestres et aquatiques du bleu de méthylène dissous au préalable dans du sang frais d'une espèce d'Hélix, a constaté que les leucocytes en absorbent et le précipitent même dans leur intérieur sous forme de cristaux; nous avons également rencontré dans l'épithélium branchial et palpaire (dans les cavités et dans les thèques intercellulaires), de même qu'à la surface, des leucocytes faiblement teintés et charriant un ou plusieurs cristaux de couleur d'aniline, le plus souvent renfermés dans une vacuole claire.

Il est extrêmement rare que les cellules épithéliales portent la moindre trace de matière colorante : ce n'est guère qu'après un très long séjour de l'animal dans la solution de bleu de méthylène, et encore faut-il qu'elle soit très foncée. Les leucocytes et surtout leurs enclaves et inclusions seules en contiennent généralement et c'est grâce à leur accumulation que les téguments affectent la teinte bleue. Cuénot a vu la peau se colorer *d'une façon diffuse* chez les Pulmonés aquatiques vivant dans une eau fortement teintée par une matière colorante quelconque. Il serait intéressant de constater s'il ne s'agit pas dans ce cas d'un phénomène identique à celui que nous décrivons ici.

Dissociant le foie et le rein des Acéphales bleuis artificiellement, nous retrouvons des leucocytes à noyau et à protoplasme plus ou moins faiblement

Digitized by Google

teintés; quelques-uns d'entre eux sont chargés d'inclusions colorées en bleu foncé et plongées dans un substratum hyalin (pl. III, fig. 20, 21, 22 et 23) qui parfois véhicule encore des amas brun jaunâtre (pl. III, fig. 24 et 25)[1]. Ils rappellent les phagocytes et leurs proies décrits dans les téguments et fournissent ainsi une indication de plus au sujet de l'origine de ces dernières. Quelquefois, çà et là, une boule isolée, colorée en bleu et entourée d'une bordure claire plus ou moins nette, rappelle un leucocyte tombé en dégénérescence au milieu des tissus. (Voir explication de la planche III.) On pourrait se demander s'il ne s'agit pas ici d'un cas identique à celui des leucocytes de Grenouille étudiés par Kowalewsky sur porte-objet et sous l'action du bleu de méthylène. Nous serions d'autant plus enclin à croire qu'il en est ainsi, que dans du sang obtenu par ponction du cœur d'Anodonte *bleuie,* nous avons rencontré un grand nombre de leucocytes réduits à une sphère hyaline renfermant un amas coloré en bleu et d'autres dont le noyau même était légèrement teinté; il en est souvent ainsi lors de l'examen de branchies ou de palpes buccaux : ici on peut parfois les voir s'engager et progresser entre les cellules épithéliales.

Remarquons qu'en général les teintes diffèrent parfois considérablement. La solution de bleu de méthylène est verte quand elle est vue sous une faible épaisseur (cette matière est polychroïque) et c'est à cela surtout qu'il faut attribuer l'aspect verdâtre que prennent souvent le noyau et les inclusions. De plus, les dernières peuvent probablement donner lieu avec cette substance à des combinaisons chimiques qui altèrent le ton de la coloration. Dans quelques leucocytes, le bleu avait fait place à une teinte franchement violette; on pourrait se demander si les inclusions même colorées ne subissent pas de la part du phagocyte une action digestive. Haeckel, le premier, en effet, ayant fait incorporer à des globules blancs des granules de tournesol bleu, les a vus rougir après quelque temps, ce qui lui a fait admettre que le leucocyte renferme un ferment digestif agissant en milieu acide. Griesbach (22), de son côté, a constaté que les leucocytes des Acéphales peuvent réduire des substances brunes (MnO et Mn_2O_3) sous forme

[1] La teinte de ces amas n'est pas rendue fidèlement par le dessin.

Digitized by Google

de fines particules, dans une solution aqueuse de permanganate de potassium. Ne s'agirait-il pas d'un phénomène analogue dans le cas de phagocytes renfermant des cristaux bleus signalé plus haut?

b) Le microtome à glace nous a de nouveau rendu de grands services dans cette longue étude. Il a fourni des coupes assez minces de tissus quasi vivants encore (la persistance des battements ciliaires en est une preuve) qui nous ont permis de retrouver les éléments teintés par le bleu de méthylène : seuls les leucocytes et les phagocytes avaient été atteints, à l'exclusion de tous les autres éléments tissulaires, et leurs caractères rappelaient en tous points la description que nous en avons donnée ci-dessus. La figure 33 de la planche III, à laquelle nous avons déjà renvoyé, donne une idée de la netteté des images obtenues dans ces conditions. Elle nous apprend tout d'abord que les éléments épithéliaux ne sont pas colorés du tout par la substance d'aniline; ensuite nous constatons que le phagocyte énorme renferme deux amas colorés en bleu et une cellule dégénérée qui elle-même renferme une sphère atteinte par le bleu de méthylène; enfin, nous voyons que le noyau aussi est faiblement teinté. Une préparation de l'espèce résultant d'une coupe d'organe surpris par la congélation en plein fonctionnement physiologique doit lever tous les doutes au sujet de la valeur de notre interprétation.

c) A l'effet d'éviter qu'au cours de manipulations préalables à subir par les objets que nous désirions fixer et débiter en coupes, le bleu de méthylène ne fût enlevé par les réactifs successifs, nous avons fait usage d'une solution saturée de tannin dans l'alcool absolu : il se forme ainsi avec le bleu de méthylène une combinaison tannique qui est restée partiellement insoluble. Enrobés à la paraffine, les objets ont fourni des préparations où, à la faveur de colorations électives, nous pouvions à nouveau, et cette fois d'une manière absolument certaine, scruter les diverses phases du phénomène de la phagocytose. Les coupes sont particulièrement démonstratives quand on les examine dans le xylol, au sortir de la paraffine : nous avons cru pouvoir nous contenter d'étudier dans ces conditions les branchies et les téguments du pied où seuls, encore une fois, les leucocytes (phagocytes) ou leur contenu sont teintés par la couleur d'aniline. Beaucoup de cellules sanguines ont été

Digitized by Google

surprises lors d'un mouvement amiboïde très prononcé pendant leur progression intraépithéliale et dans le cas de la variété à boules, chacune de celles-ci peut avoir acquis une teinte bleue très évidente. De même dans une cavité donnée, on peut rencontrer soit un seul, soit plusieurs phagocytes à inclusions colorées à côté d'autres qui n'en renferment d'aucune sorte.

De nombreuses coupes ont été confectionnées, après une fixation rapide au sublimé corrosif à 2 °/₀, d'organes colorés *in vivo* par le bleu de méthylène. Elles ne nous ont fourni aucun argument nouveau, mais elles nous ont permis d'étudier à l'état définitif et fixé les ravages causés dans les tissus épithéliaux par des cellules qui toutes portaient une marque distinctive due à la couleur d'aniline combinée au tannin.

Ayant opéré une injection intraveineuse de bleu de méthylène sur des chiens et des chats curarisés, Kowalewsky (39) avait obtenu une coloration répandue avec le sang dans la plupart des organes. Après 18 minutes, le sang n'en renfermait plus du tout et l'excrétion s'était faite par la bile, l'urine, le suc gastrique, les larmes et la salive. Mais les organes mis au jour bleuissaient notamment sur les surfaces des sections qu'on y opérait. Nous avons constaté quelque chose d'analogue sur les Anodontes *bleuies*. Un cas surtout a été typique sous ce rapport : l'animal avait séjourné pendant trois jours dans la solution de bleu de méthylène et à l'ouverture de sa coquille ne semblait que faiblement teinté; même les branchies l'étaient moins que de coutume. Quelques instants après, la coloration devenait intense successivement dans les branchies et les palpes, dans le manteau, le pied et finalement dans tous les téguments du corps. Quand on touchait un organe au moyen d'un objet effilé, immédiatement s'y produisait une accentuation de la couleur et les surfaces des coupes que nous y faisions bleuissaient pour ainsi dire instantanément. Il nous est avis que le sang du Mollusque en question véhicule de la matière colorante et afflue avec une grande rapidité des lacunes sur les surfaces de section, et qu'aux endroits irrités par le contact de l'air ou d'un corps solide, il se produit une sorte de congestion qui y amène avec le sang la matière colorante dissoute.

Digitized by Google

V. — Injection de vert de méthyle dissous au 1/10 000 dans l'eau.

Sur une Anodonte, privée d'une de ses coquilles sauf aux points de l'insertion des muscles adducteurs, nous avons opéré des injections, au moyen de la seringue de Pravaz, dans le foie, le pied, le manteau et, quelque peu au hasard, à différents autres niveaux. Déjà quatre heures après, dans le sang, obtenu par ponction de la cavité périviscérale, de nombreux leucocytes portaient des traces de la matière colorante. On pouvait remarquer différents degrés : 1° quelques-uns renfermaient des boules hyalines légèrement mais distinctement teintées en *vert* ou en *bleu* pâle; 2° d'autres, à côté d'inclusions encore restées jaunâtres, en contenaient d'atteintes par la couleur d'aniline; 3° d'autres encore étaient gorgés d'amas colorés, et enfin 4° çà et là se rencontrait une cellule sanguine charriant une inclusion unique inégalement colorée.

Dans les tissus branchiaux, les phagocytes colorés étaient encore rares; par contre, les téguments enlevés aux points où avaient eu lieu les injections étaient farcis de leucocytes teintés et rappelaient sous ce rapport les images obtenues chez les animaux qui avaient séjourné dans le liquide coloré. Une ponction du cœur ne nous a fourni aucun phagocyte vrai ni aucun leucocyte chargé de matière colorante : ce double fait tendrait à prouver que les cellules migratrices, chargées de produits d'usure ou d'autres inclusions, n'entrent plus dans le torrent circulatoire, tout au moins pendant leur période phagocytaire. Dans les tissus de l'organe de Bojanus, il y avait un nombre restreint de leucocytes colorés.

VI. — Injection d'eau tenant en suspension du carmin pulvérisé.

Les injections ont été faites tantôt dans les tissus palléaux, d'autres fois dans le pied et dans le foie. Après un délai de vingt-quatre heures, nous avons eu recours à l'observation directe *intra vitam* des branchies et aux dissociations à frais des branchies, des palpes et du foie. Dans tous ces

Digitized by Google

organes dissociés ou simplement écrasés, des leucocytes des diverses variétés se rencontraient en plus ou moins grande quantité, quelques-uns charriant parfois, à côté d'autres inclusions, des granules de carmin. Les belles expériences exécutées autrefois en chambre humide par von Recklinghausen relativement à l'incorporation de substances finement granuleuses par les leucocytes, expériences qui, à cette époque, eurent un immense retentissement, trouvent dans nos recherches une confirmation complète; mais celle-ci est surtout éclatante lors d'une observation sur les branchies pendant la vie : on y voit, en effet, et on peut poursuivre dans leur progression des leucocytes ayant englobé un ou des granules de carmin logés dans une vacuole (digestive?). Ce résultat rappelle ceux obtenus par Metschnikoff chez *Phlyllirhoe,* Mollusque transparent auquel il avait injecté du carmin en poudre. Nous avons rencontré çà et là des plasmodes résultant de leucocytes associés, tels que les décrit Cuénot, véhiculant du carmin. Aucun autre tissu ne renfermait du carmin dans ses cellules. Ce dernier auteur a constaté que chez des Mollusques injectés d'eau carminée, les phagocytes avaient englobé des granules de carmin et les avaient conservés pendant des mois entiers (85).

VII. — Cultures de Moules dans de l'eau tenant en suspension du carmin pulvérisé.

H. Griesbach n'a pas réussi à voir dans des expériences identiques des substances finement granuleuses (telles que du carmin, du charbon, de la craie, etc.) englobées par les globules du sang. Après un séjour de vingt-quatre heures dans ce milieu, nos Moules furent soumises aux différents genres de recherches précédemment indiqués. Dans les branchies examinées directement, nous retrouvons les cavités intraépithéliales; plusieurs de leurs phagocytes renferment des cristaux de carmin agités d'un mouvement brownien déjà signalé pour les petites enclaves du protoplasme; il en était de même pour quelques amibocytes examinés dans le tissu lacunaire à travers le revêtement tégumentaire. Les dissociations et les simples écrasements ont fourni des résultats en tous points concordants.

Digitized by Google

Nous nous croyons autorisé à conclure de ces nombreuses recherches, répétées comparativement chacune un grand nombre de fois, que les déformations et destructions intraépithéliales sont dues exclusivement à l'action, non d'organismes parasitaires, mais bien de cellules sanguines. Celles-ci se conduisent dans ce phénomène comme des phagocytes se frayant un passage à travers les téguments pour arriver à la surface libre et quitter définitivement le corps du Mollusque. Ajoutons enfin que les conditions dans lesquelles se sont faites nos observations peuvent avoir *favorisé*, mais non point *occasionné* le phénomène dont il s'agit. Quant à sa signification physiologique, elle fera l'objet d'un examen spécial dans un chapitre suivant.

Il est une question que l'on se pose inévitablement au cours d'expériences et de recherches du genre de celles que nous venons d'exposer en détail, à savoir comment se restaurent les dégâts ainsi produits par la phagocytose. On ne conçoit pas, en effet, que cet état se perpétue et que les téguments présentent ainsi des points faibles ou des solutions de continuité ouvrant la voie aux organismes inférieurs et aux autres causes de troubles graves. On s'attendrait à une multiplication assez rapide et énergique des cellules épithéliales voisines non atteintes par le phénomène : or, jamais, ni sur le vivant ni après fixation, nous n'avons rencontré des figures de division directe ou indirecte [1]. Y aurait-il peut-être lieu de supposer que dans le cas actuel puisse se réaliser l'hypothèse de N. Wagner (81), d'après laquelle des cellules sanguines arrivées ici par diapédèse se transformeraient par adaptation et reprendraient les fonctions réservées normalement aux éléments épithéliaux? Cet auteur décrit chez les larves d'Échinodermes une accumulation de cellules mésodermiques au niveau de l'ébauche du système aquifère et leurs transformations en éléments de ces ébauches; il a constaté de plus qu'à des endroits lésés elles peuvent se mettre en continuité organique avec les éléments des tissus blessés; mais il n'a pas réussi à voir

[1] Stöhr, dans un travail sur lequel nous aurons à revenir encore, décrit une restauration de l'épithélium intestinal détruit par phagocytose, par le fait de l'accroissement de la partie cellulaire restante qui renferme le noyau.

Digitized by Google

leur contribution directe à la régénération des éléments détruits [1]. D'après Ziegler, des cellules migratrices peuvent prendre part à la formation du tissu conjonctif. Beaucoup d'autres histologistes et pathologistes se sont occupés de cette même question et ont parfois émis des idées qui, à nos yeux, semblent pour le moins très hardies. H. Griesbach, à propos des troubles anatomiques que doivent produire les ponctions du cœur des Lamellibranches, dit qu'il serait intéressant de voir dans quelle mesure les animaux peuvent supporter des blessures et quel est le rôle dévolu aux leucocytes dans la restauration. Nous avancerons sans détour que cette question nous a laissé perplexe et que nous n'oserions nous prononcer; mais nous ajouterons que dans certaines circonstances, le phénomène de la phagocytose intraépithéliale s'est compliqué d'un détail qui pourrait bien conduire à la solution de la question. Très souvent, après une observation de plusieurs heures et au moment où la cavité avait atteint des dimensions parfois extraordinaires, celle-ci disparaissait brusquement : la première fois, nous croyions avoir déplacé par mégarde la préparation; toutefois, dans la suite, il fut toujours facile de constater qu'il n'en était rien, mais qu'il se passait un phénomène qui, à notre sentiment, rappelle le processus embryonnaire de la soudure ou concrescence des filaments branchiaux. Dans certains cas, en effet, les bords de la cavité semblent s'émousser, se gonfler en même temps qu'ils subissent une pression normale aux parois. Il se produit simultanément dans le filament branchial un mouvement d'ensemble (contraction? torsion?), les parois se rapprochent et font disparaître assez rapidement, à l'œil du moins, toute trace de solution de continuité. Il nous est avis qu'il pourrait s'agir ici d'une concrescence des éléments épithéliaux restés sains. Loin de nous l'idée de vouloir trancher la question d'une façon définitive : nous présentons cette dernière explication comme une simple hypothèse qui, à nos yeux cependant, trouve un argument puissant dans le processus embryonnaire rappelé.

[1] Lawdowsky admet pour les cellules migratrices un rôle dans la régénération des tissus, mais il ne croit pas qu'elles interviennent dans la réédification des épithéliums.

Digitized by Google

INTERPRÉTATION DES FAITS.

Si la pénétration de leucocytes dans les épithéliums n'a été que très rarement observée sur le vivant, les travaux d'anatomie, tant normale que pathologique, en font par contre très souvent mention. Il ne nous paraît pas opportun de faire une incursion sur le terrain de l'histologie pathologique, où nous pourrions faire ample moisson d'arguments, et nous n'irons chercher nos exemples que dans les travaux d'anatomie normale. Depuis longtemps déjà on a signalé dans différents épithéliums la présence de cellules particulières; mais, ainsi que le fait remarquer Stöhr (74), c'est Eberth qui, le premier, en a reconnu la nature leucocytaire; jusqu'alors on les avait considérées comme des éléments épithéliaux transformés. Nous n'examinerons pas ici la bibliographie de cette question, qu'on peut trouver, du reste, complète dans le travail de Stöhr, au moins jusqu'à l'époque où celui-ci fut publié; nous nous contenterons de rappeler brièvement les principaux résultats acquis. Il est généralement admis que les globules blancs peuvent quitter le sang en circulation (diapédèse) et se répandre dans *tous* les tissus de l'organisme. La force qu'ils peuvent mettre en jeu dans leur émigration, ainsi que le proclame Engelmann (*Hermann's Handbuch der Physiologie*), doit être considérable et se traduit très souvent par un écartement d'éléments histologiques de leur emplacement normal; conservés en chambre humide, Lawdowsky (42) a vu des leucocytes traverser de part en part un caillot de sang, et chaque naturaliste a eu l'occasion d'en voir portant dans leur intérieur des inclusions parfois puissantes et les véhiculant loin de l'endroit où ils les avaient incorporées. Il y a lieu de rappeler encore ici les beaux travaux de Salensky (66), de Kowalewsky (41) et de Julin (35). Ils arrivent tous à ce résultat que chez les Ascidiens se fait pendant la période larvaire une émigration considérable de cellules mésoblastiques qui traversent l'épithélium subtunical et vont jouer un rôle phagocytaire actif dans le manteau, ainsi que l'avaient déjà établi, du reste, les travaux de Della Valle, de Maurice, de Van Rees et de Metschnikoff.

Digitized by Google

Mais si l'on est universellement d'accord pour admettre l'émigration de leucocytes jusque dans et même à travers les tissus de revêtement, il n'en est pas de même en ce qui concerne la signification qu'il faut attacher au phénomène. Dans la paroi intestinale, où il a particulièrement été observé, son interprétation a donné lieu à un grand nombre de théories : Zawarykin (83), Schäfer (69) et nous-même (11) avons cru y voir les éléments chargés, en partie pour les uns, presque exclusivement pour les autres, de l'absorption de la graisse. Chez *Waldheimia*, Joubin (34) admet qu'ils vont absorber entre les cellules épithéliales des granules alimentaires, lesquels sont portés ensuite aux organes lymphoïdes et à toutes les parties du corps. D'autres, tels que Frey, Stöhr, Renaut, Poljak, List, etc., les considèrent comme des éléments dégénérés et destinés à se perdre à la surface. Enfin, pour d'autres encore, ce sont des phagocytes chargés de porter au dehors des substances solides ou même liquides nuisibles au fonctionnement régulier de l'organisme : telle est l'idée de Ruffer (64), de nous-même (10 et 11) et d'un très grand nombre d'autres. La présence de leucocytes jouant ce rôle a été signalée dans l'ovaire de *Lacerta agilis* par Strahl (79), et dans celui de Mammifères par Löwenthal (49). D'après Durham (13 et 14), dont les recherches ont été entreprises sur le vivant, ainsi qu'il a été rappelé dans l'historique, il se fait par leur intermédiaire une excrétion de substances étrangères introduites expérimentalement dans le corps d'*Asterias rubens :* elle se produit par le fait de cellules migrantes qui, chargées de ces substances, traversent l'épithélium des branchies auxquelles elles donnent, s'il s'agit de matières colorantes, une teinte parfois très prononcée. Quelques-uns considèrent les cellules pigmentaires de l'épiderme des Vertébrés comme des cellules migratrices expulsant du corps les résidus de globules rouges, et nous-même avons signalé à la surface de la peau des Poissons des phénomènes de phagocytose (10 et 11).

Dans les pages qui précèdent, nous avons décrit par le menu l'émigration de leucocytes jusque dans l'épithélium qui recouvre le corps des Lamellibranches; mais il a également été constaté que souvent leur passage était marqué par une destruction partielle de ce tissu : on a pu voir que ce phénomène s'observe très bien, au microscope, dans toutes ses phases et

Digitized by Google

pendant la vie de l'animal. Ainsi que nous le disions déjà plus haut, nous considérons ces résultats comme apportant une confirmation des observations histologiques faites avant nous sur ce terrain. Mais, paraphrasant l'exclamation : *so räthselhaft die physiologische Bedeutung dieses Vorganges ist, anatomisch lässt er sich ganz sicher constatiren* (Edinger), nous pourrions dire que si, anatomiquement, le phénomène peut s'*observer*, son interprétation physiologique ne laisse pas que de présenter de grandes difficultés. Les images que nous ont fournies les divers stades successifs de ces destructions épithéliales locales, rappellent des résultats obtenus par quelques auteurs. Sur une section faite chez le Lapin perpendiculairement à l'axe de l'appendice vermiculaire, Watney (82) a constaté et dessiné d'après nature sur les cellules épithéliales des déformations qu'il attribue à l'action de cellules lymphatiques : celles-ci auraient mangé (*eaten*) leurs victimes à certains niveaux. Mall (54) admet que les cellules immigrées peuvent déprimer les éléments épithéliaux. Stöhr a publié une série de travaux où il examine la question en cause et on constate que son interprétation, d'abord hésitante, s'accentue progressivement. En 1884 (74), il signale dans l'épithélium buccal de l'homme sain une émigration considérable de leucocytes provenant des amygdales et y déterminant, par *écartement* de ses constituants, des chambres irrégulières et très étendues; l'année d'après (75), il constate l'existence d'un phénomène identique dans la conjonctive palpébrale, mais l'attribue à une *érosion* produite par les leucocytes dans les cellules épithéliales. Dans le travail paru en 1889 (76) et auquel j'ai déjà renvoyé plus haut, il trouve un excellent objet, pour l'étude de cette question, dans la muqueuse du cæcum du Lapin : il y avait ici une infiltration très accentuée de leucocytes dans l'épithélium, où elle avait déterminé des troubles considérables, qui se traduisaient par l'existence de cavités très étendues, *creusées* aux dépens des corps cellulaires épithéliaux et ne laissant parfois, du côté libre, qu'une très mince bande protoplasmique. Celle-ci avait cédé à la pression en certains points et s'y était rompue, ouvrant ainsi le passage aux phagocytes qui, ainsi que les résidus épithéliaux, tombaient dans la lumière intestinale. A quelques mois de là, il revient sur le sujet dans un article (77) où il combat énergiquemen 'es idées de Retterer relativement à l'origine et à

Digitized by Google

l'évolution des amygdales. Il s'y étend encore sur la signification du phénomène et dit à ce sujet, à peu près textuellement, que l'épithélium buccal peut s'altérer à un très haut degré par le fait de l'émigration leucocytaire; que ce tissu peut ainsi se trouer et même disparaître sur de petites étendues, au point que le corps se trouve ainsi privé à ce niveau de sa couche protectrice épithéliale. Enfin, en 1891, dans son importante étude sur le développement des amygdales chez l'homme (78), il proclame que l'émigration des leucocytes à travers l'épithélium buccal débute déjà vers le huitième mois de la vie intra-utérine pour augmenter dans la suite. Quelque temps après le troisième travail de Stöhr, parut, dans la même revue, le mémoire de Justus Carrière (6) sur *Trichodina* vivant en parasite occasionnel à la surface de la peau et dans le canal latéral de *Cottus Gobio*. Cet auteur a constaté l'existence de destructions épithéliales très vastes : les leucocytes immigrés en ces endroits y creusent des cavités embrassant plusieurs territoires cellulaires et peuvent s'y accumuler en très grande quantité. Ce travail destructeur produit dans l'épithélium un épaississement spongieux, traversé çà et là par des cellules des couches profondes; sans quitter leurs implantations, ces dernières s'étirent pour conserver leurs rapports avec la couche supérieure (externe) : celle-ci reste continue et jamais les coupes n'y ont surpris un leucocyte pendant son passage. Carrière suppose qu'il doit y avoir des endroits spécialement organisés en vue de cette sortie, qui se fait certainement, attendu que le Protozoaire vient se nourrir de ces leucocytes à la surface. Sur ces entrefaites, R. Heidenhain avait publié son travail sur l'anatomie et la physiologie de la muqueuse de l'intestin grêle (30), où il parle d'une déformation et d'une dévastation d'éléments épithéliaux par des phagocytes. A la page 92 de son *Traité d'histologie pratique* (62), Renaut figure un épithélium fenêtré observé dans l'appendice iléo-cæcal de Lapin : les cellules épithéliales y sont percées par le fait de cellules migratrices « qui les » trouent de mille manières..., leur masse protoplasmique prend alors l'aspect » d'une cage formée de filaments rameux qui se rassemblent en haut autour » du plateau cuticulaire strié ; en bas, autour du noyau et du plateau basal. » Enfin les cellules lymphatiques ne sont pas arrêtées par la ligne des » plateaux : elles percent ces dernières après les avoir réduites, en fenêtrant

Digitized by Google

» les cellules épithéliales et en écartant leurs rameaux protoplasmiques, à » de minces pellicules tendues. » L'auteur considère les leucocytes *aberrants* comme perdus : mêlés au mucus et aux sécrétions diverses, ils ne tardent pas à mourir; mais il n'exclut pas l'idée de Zawarykin (84), d'après laquelle quelques-uns, par un trajet rétrograde, pourraient rentrer dans les voies ordinaires de la lymphe. Ce dernier anatomiste a spécialement étudié l'épithélium normal d'amygdale de Chien : il y décrit des cavités *creusées* par les leucocytes et les considère comme un attribut physiologique de l'organe lymphoïde. La forme générale est celle d'un flacon dont le goulot vient s'ouvrir à la surface libre. Il s'agit bien ici des solutions de continuité épithéliale décrites par Stöhr, qui, n'ayant probablement pas aperçu cette communication avec la cavité buccale, considère la sortie des leucocytes comme se faisant par soulèvement des couches épithéliales plates. Pour Zawarykin, au contraire, les globules blancs forment ce canal, comme le reste de la cavité, par *érosion* des éléments épithéliaux et se frayent ainsi un passage vers la surface de l'organe; quant aux soulèvements épithéliaux, que Stöhr ne décrit, du reste, que dans les replis de la surface, il croit qu'ils sont probablement le produit de plissements et de frottements auxquels sont soumises les préparations pendant les manipulations qu'elles ont à subir. La destruction peut atteindre, toujours d'après l'auteur russe, les couches profondes de l'épithélium et ouvrir ainsi une large voie aux leucocytes du tissu adénoïde sous-jacent. C'est dans ce travail qu'il suggère l'idée, rappelée par Renaut, d'après laquelle les leucocytes pourraient revenir de la surface et rentrer dans les tissus. Il ajoute encore que ces cavités, tout en n'étant pas des formations stables, sont parfois si nombreuses qu'entre deux quelconques d'entre elles il n'y aurait pas un espace suffisant pour en loger une troisième. De même que Stöhr et Zawarykin, Poljak (59) a constaté dans l'épithélium buccal, à la hauteur des amygdales, une infiltration très intense, accompagnée d'une destruction qui peut intéresser ce tissu jusqu'à la surface libre. Nous-même (10 et 11) avons signalé dans l'épiderme de Poissons osseux, dans leur épithélium intestinal et dans celui d'Amphibiens et de Mammifères, des désorganisations produites par des leucocytes immigrés.

Digitized by Google

Cet aperçu historique concorde, dans ses grandes lignes, avec nos conclusions; l'émigration de leucocytes à travers les épithéliums avec destruction d'éléments épithéliaux, observée par nous sur le vivant, est ainsi confirmée par de nombreux travaux. Nous avons, à diverses reprises, fait entendre qu'il s'agit, à notre avis, dans les téguments des Acéphales, d'une phagocytose s'accusant par un simple écartement des cellules ou l'apparition et l'accroissement subséquent d'une cavité creusée aux dépens des cellules épithéliales. Ces résultats sont contraires aux vues de H. Griesbach (23) concernant les propriétés phagocytaires des globules du sang des Mollusques, d'une part, et leur progression, d'autre part. Cet auteur, en effet, de même que Cattaneo (7), révoque en doute, partiellement du moins, les conclusions tirées généralement d'expériences faites sur les leucocytes en chambre humide, sur la platine chauffante, dans les liqueurs indifférentes, etc., et d'autres moyens artificiels qui « nicht einmal im Stande sind uns ohne Abtödtung der Zelle die normale Gestalt, geschweige denn die dadurch bedingten ursprünglichen Bewegungen vorzuführen ». Ses remarques nous semblent très fondées quand il dit que dans ces conditions non physiologiques, beaucoup de phénomènes sont de nature purement physico-chimique relevant des lois de l'adhésion, ainsi que de celles de la diffusion et de l'absorption des gaz et des liquides, etc. Mais, de plus, il semble très sceptique au sujet de la migration des leucocytes dans les tissus animaux et croit qu'il est nécessaire de faire à ce sujet des recherches et expériences nouvelles; il formule également des réserves concernant la phagocytose qu'il voudrait voir soumise à revision, à condition qu'on ne fasse pas usage des méthodes employées jusqu'à présent. Nos expériences ne sont point atteintes par les critiques exposées dans le travail de l'anatomiste allemand, parce qu'elles ont été exécutées dans des conditions que l'on peut considérer comme normales. Lui aussi, il est vrai, a examiné par transparence les leucocytes dans les vaisseaux des Lamellibranches sur des parties amputées à des branchies, palpes, manteau et annexes de *Lima;* mais, comme nous l'avons déjà rappelé, il a rencontré dans les battements des cils un obstacle qu'il dit insurmontable : ils gêneraient notablement l'examen et rendraient le champ d'observation peu ou point distinct; — plus loin cependant, il ajoute que l'exercice et la patience

Digitized by Google

permettent d'obtenir des résultats satisfaisants. Sabatier (65) aussi a vu dans des fragments de branchies (non protégés par le couvre-objet) le mouvement des leucocytes, mais il ne fait aucune réflexion quant à leur mode de progression ou leurs propriétés phagocytaires. Contrairement à l'avis de H. Griesbach, ce mode opératoire nous a paru très pratique et fournissant des résultats excellents. Il permet, en effet, d'assister *de visu* aux pérégrinations des globules sanguins dans les lacunes sanguines et dans les tissus épithéliaux et autres, de constater leurs changements de forme, le nombre, l'aspect, la formation et le retrait de leurs pseudopodes, le mouvement brownien des granulations protoplasmiques et de minimes enclaves et inclusions qu'elles renferment, les déplacements du noyau, etc., en un mot, tous les détails; un examen pareil prouve à l'évidence que les conclusions généralement tirées des nombreuses expériences depuis celles de Lieberkühn, faites dans les meilleures conditions sur les leucocytes extravasés, sont fondées, et l'on pourrait dire que la théorie de la migration n'exigerait pas d'autres preuves. Quant à la question du phagocytisme, elle aussi peut trouver dans cette méthode une confirmation éclatante. Dans l'épithélium des branchies, des palpes, du manteau et même de toute la surface du corps des Acéphales, nous avons constaté que les leucocytes pouvaient ronger les cellules, les percer, les trouer, etc., bref, creuser des cavités aux dépens du corps des éléments épithéliaux : ceci est de la phagocytose prise sur le fait et dont les progrès se déroulent sous l'œil de l'observateur. Nous avons acquis à ce sujet des apaisements complets et considérons la géniale conception de Metschnikoff comme parfaitement établie.

Les préparations d'organes fixés nous ont fourni, par rapport à la phagocytose, des données précieuses. Antérieurement déjà, nous avions signalé dans les branchies des phénomènes de dégénérescence leucocytaire. Après emploi des liqueurs fixatrices d'Hermann ou de Flemming, et coloration à la safranine, nous avons constaté que le corps du leucocyte malade devient homogène, prenant une teinte grise claire ou sombre et servant de support à un ou plusieurs éléments le plus souvent fortement chromatiques, à rebords irréguliers, en anneau, en croissant, en demi-lune, en virgule, en bâtonnet, etc. (voir pl. II, fig. 12 à 24); ce sont là les résidus de noyaux de leucocytes,

Digitized by Google

tombés en chromatolyse. Les leucocytes en question se rencontrent un peu partout et rappellent ceux que nous avons déjà signalés ailleurs (10 et 11) dans l'intestin de Vertébrés, dans la peau de Poissons, etc., et au sujet desquels nous avons recueilli des données qui constitueront un travail à publier plus tard. Des globules sanguins peuvent en avoir incorporé de même que des mégacaryocytes (pl. II, fig. 4, 5, 6 et 8 et pl. III, fig. 33) et jouent ainsi le rôle de phagocytes. On rencontre ceux-ci en grand nombre, surtout vers la surface libre des épithéliums, isolés ou réunis à plusieurs dans les thèques intraépithéliales; souvent aussi ils s'y trouvent en société de phagocytes d'un autre aspect, dû spécialement à la nature de leurs inclusions; celles-ci sont régulièrement teintées en noir, noir grisâtre ou brunâtre et forment une masse unique ou multiple, à limites ondulées, bosselées ou irrégulièrement arrondies. Dans les préparations fixées au sublimé ou à l'alcool absolu, ces inclusions ont une teinte légèrement jaunâtre et sont logées dans un substratum homogène peu réfringent, l'ensemble rappelant, à ne pas s'y tromper, le contenu des phagocytes signalés plus haut lors de la description du creusement des cavités intraépithéliales. Nous avons retrouvé ces mêmes phagocytes (des deux variétés) dans divers organes et particulièrement dans le tissu interstitiel du foie et dans la paroi intestinale : leur abondance y est parfois très grande et le creusement intra-épithélial, dans ce dernier organe, peut rappeler celui des téguments. Ce dernier détail prouve que le phénomène de la phagocytose est très répandu dans le corps des Lamellibranches; mais s'il apporte des faits nouveaux, il n'en facilite guère l'explication.

Il résulte de tout ce que nous avons exposé, que chez les Lamellibranches des leucocytes quittent le corps en grand nombre par la surface totale des téguments et des muqueuses. Il ne s'agit point là d'un fait isolé, mais d'un phénomène qui se rencontre dans la totalité de l'immense groupe des Métazoaires : nous en avons déjà cité des exemples nombreux. Metschnikoff (52) a vu chez les Éponges des cellules mésoblastiques, chargées de granulations, percer l'épithélium et venir se perdre avec elles à la surface du corps. Durham (14 et 15), qui a fait sur les branchies amputées à des

Digitized by Google

Échinodermes des expériences se rapprochant beaucoup des nôtres, a constaté que de nombreux leucocytes quittent le corps en traversant l'épithélium, de préférence vers le sommet de l'organe. Il considère leur contenu comme provenant de l'activité physiologique de certains organes ou de substances étrangères introduites dans le corps. Cuénot (8), à son tour, décrit chez les Échinodermes des granulations jaunâtres rencontrées chez les Holothuries, les Oursins et les Crinoïdes dans les tissus lacunaires, dans la paroi du tube digestif, dans les glandes lymphatiques et dans les amibocytes; ces derniers, d'après l'auteur français, « les ont absorbées comme ils absorbent toutes les substances solides en leur qualité de phagocytes »; il est bien probable, ajoute-t-il, qu'ils finissent par les rejeter à nouveau dans les tissus. Quant à ce qui se passe chez les Ophiures et chez les Astérides, il croit que les produits de déchets sont excrétés *par osmose* à travers la paroi des branchies dermiques. De l'avis de Durham, au contraire, les phagocytes des Échinodermes ainsi chargés d'inclusions, arrivent au dehors dans un but d'épuration et rempliraient donc une fonction excrétoire. Cette interprétation, conforme en tous points aux conclusions de Metschnikoff relatives aux observations rappelées tantôt, trouve un appui dans un grand nombre de résultats obtenus par d'autres auteurs : citons pour mémoire la signification des cellules pigmentaires apportant à la surface de l'épiderme les débris de globules rouges dégénérés (Kölliker, List, Eisig, etc.) et se perdant dans la suite par les mues et les desquamations. Stöhr, dont, à raison de ses nombreuses recherches, l'opinion est très précieuse, attribue un rôle physiologique analogue à l'émigration des leucocytes dans l'épithélium buccal où leurs destructions épithéliales atteignent un degré voisin de celui décrit chez les Mollusques; ils auraient pour mission d'écarter, par ce processus, les matériaux du corps tombés en dégénérescence et pouvant à un moment donné constituer un obstacle au fonctionnement régulier des organes.

Nous ne pouvons que souscrire à ces conclusions et les appliquer au cas qui nous a occupé dans les pages précédentes : *chez les Lamellibranches, la sortie des leucocytes, tous ou presque tous porteurs d'inclusions que nous avons reconnues provenir d'éléments dégénérés, d'organes en activité*

Digitized by Google

physiologique ou de substances étrangères venues du dehors, constitue un phénomène normal qui, dans certaines conditions, peut s'exagérer et prendre des proportions très considérables. Il a pour but d'épurer les tissus et se réduit ainsi à une EXCRÉTION. Une expérience a fourni à Durham des résultats décisifs : à la suite d'injections de poudres insolubles faites à des Échinodermes, il a constaté vers l'extrémité des branchies une sortie de leucocytes véhiculant des granules de la matière injectée; au moment d'une excrétion très active, il a pu reconnaître à l'œil nu des houppes colorées qui se révélaient au microscope être composées uniquement de phagocytes gorgés de granules colorés. Ce résultat se rapproche de ceux que nous ont donnés nos injections de carmin et nos cultures de Lamellibranches dans de l'eau carminée et dans les solutions de bleu de méthylène : les leucocytes porteurs de ces matières colorantes se frayent un passage à travers l'épithélium et, quittant l'organisme, le débarrassent de substances pour le moins inutiles.

Gand, mars 1894.

Digitized by Google

APPENDICE [1]

Pendant le laps de temps écoulé entre le dépôt de ce travail et son impression, nous avons en maintes occasions repris nos recherches de contrôle dont nous désirons brièvement acter ici les résultats principaux.

A. Une Anodonte ayant séjourné pendant trois fois vingt-quatre heures dans une solution faible de bleu de méthylène, en fut retirée et placée pendant trois mois dans un bassin où un courant puissant et continu renouvelait l'eau constamment. Nous nous attendions à retrouver un animal aux tissus absolument dépourvus de matière colorante, grâce au jeu des phagocytes qui, à notre sentiment, en auraient expulsé jusqu'à la dernière trace. Quelle ne fut pas notre surprise de constater qu'il n'en était point ainsi : les branchies internes étaient encore fortement teintées dans leur tiers distal, les externes portant une traînée bleue dans la région basale; les palpes, le manteau et les téguments du tronc n'avaient qu'une coloration pâle et diffuse. Au microscope, nous pouvions nous assurer que la couleur d'aniline résidait uniquement dans les leucocytes et dans les phagocytes dont l'accumulation déterminait dans les branchies des bandes bleues visibles à l'œil nu et parallèles aux bords libres; il en fut de même pour les dissociations à frais du foie, du manteau, des palpes, etc. Certes, ainsi que nous le disions tantôt, il n'y avait pas là une coloration intense et uniforme des branchies et des palpes, d'une part, et des autres parties du corps du Mollusque, d'autre part, comme chez un animal examiné au moment où il vient d'être retiré de l'eau colorée; mais il n'en est pas moins vrai que d'abord nous ne pouvions comprendre comment, dans ce réservoir d'eau pure, l'organisme ne se fût pas débarrassé de la dernière molécule de méthylène, conformément aux conclusions que nous avions tirées des expériences et des observations précédentes. Aussi nous nous sommes livré à une étude approfondie et nous croyons avoir trouvé l'explication du phénomène en question et pouvoir concilier les résultats.

[1] Daté du 20 janvier 1895 et adopté par la Classe des sciences, sur les conclusions des rapports de MM. Plateau et Errera.

Digitized by Google

L'intensité de la sortie des leucocytes à travers les téguments du Mollusque s'accuse surtout par le nombre plus ou moins grand de thèques et de cavités intraépithéliales. Dans l'expérience en question, celles-ci étaient relativement peu nombreuses et assez peu étendues, quoique très nettes, ce qui tendrait à prouver que cette sortie était moins énergique et moins fréquente. Quand il s'agit d'un animal examiné immédiatement à sa sortie de la matière colorante, on comprend que l'ingestion continuelle qu'il en a faite exige de la part de l'organisme une réaction prononcée : il faut que sans cesse les balayeurs, comme Metschnikoff appelle les leucocytes, expulsent la substance qui, au moins inutile, pourrait par son accumulation devenir fatale. Au contraire, chez le Mollusque replacé dans une eau abondante et pure, la nécessité de l'expulsion ne s'impose pas avec cette intensité impérieuse et l'on comprend que le phénomène ne prenne pas les proportions considérables décrites plus haut. Nous avons eu l'occasion de constater qu'il en est absolument de même chez l'*Huitre de Marennes :* transportée dans un bassin où l'eau de mer ne contient pas la Diatomée verte appelée *Navicularia ostrearia,* dont elle se nourrit de préférence, elle conserve pendant longtemps encore sa coloration verte. La *marennine,* matière colorante de la Diatomée, de même que le bleu de méthylène de nos expériences, est incorporée par les leucocytes; pour l'expulser, ils percent l'épithélium tégumentaire, surtout au niveau des branchies et des palpes auxquels ils donnent la coloration particulière, foncée chez les Huitres des bassins de Marennes, faible chez celles qui depuis quelque temps déjà sont placées dans l'eau de mer ordinaire.

B. Nous avons déjà cité le travail de Cuénot (85) où il est dit que des grains de fécule et de carmin injectés à des Mollusques avaient été avalés par les phagocytes et y étaient restés pendant des mois sans subir aucune altération. Nous supposons que, ou bien la quantité injectée était minime et la réaction par le fait des leucocytes n'avait été que peu importante, ou bien les grains retrouvés, après des mois, par l'auteur français, n'étaient que les derniers représentants des matières injectées en grandes quantités; le cas serait identique à celui que nous venons de rapporter dans le dernier paragraphe. Mais, contrairement à ces matières injectées, le bleu de méthylène de notre dernière expérience avait subi, à n'en pas douter, des modifications

Digitized by Google

profondes : des leucocytes renfermaient des inclusions vertes, d'autres en charriaient de bleues et de vertes, d'autres encore en avaient uniquement de bleues. Le résultat était le même, sous ce rapport, dans les dissociations de n'importe quel organe. A la page 38, nous avons fait mention de cette particularité, et en dehors de combinaisons chimiques qui pourraient se passer entre la matière colorante et les diverses parties constituantes ou incluses des phagocytes, nous avons soulevé l'hypothèse d'une digestion. Dans ce dernier cas, les cellules sanguines mériteraient franchement le nom de *phagocytes*.

C. Le phénomène de l'immigration des leucocytes et de la destruction locale subséquente, décrite par Zawarykin (84), dans l'épithélium tonsillaire du chien, nous a paru si semblable à ce que nous avons *vu* se produire chez les Mollusques, que nous avons décidé d'entreprendre la même étude chez le même animal. Nous avons fait usage de trois procédés de fixation : sublimé 2 %, liqueur d'Hermann seule et enfin liqueur d'Hermann et vinaigre de bois. Nous pouvons pleinement confirmer les résultats de Zawarykin : les leucocytes pénètrent dans l'épithélium, y progressent isolément ou s'y accumulent et y déterminent par *écartement* ou par *érosion*, ou par les deux modes à la fois, des solutions irrégulières de continuité dont les dimensions peuvent parfois être considérables. De même que chez les Mollusques, de petites cavités ne sont bien souvent séparées que par une mince cloison, reste épithélial, qui cédera à la moindre poussée ou érosion : de là leur fusion; le même phénomène peut se produire successivement encore avec d'autres cavités voisines; c'est ce qui explique la production de ces énormes lacunes qui s'étendent parfois sur un très grand nombre de territoires cellulaires. Les leucocytes viennent du tissu adénoïde sous-jacent : il est rare que dans le cas de petites et même parfois de grandes lacunes, la voie suivie par eux reste béante, ou bien encore elle est trop irrégulière pour que dans une coupe on puisse la retrouver et la poursuivre; d'autres fois, toute limite entre le tissu adénoïde et l'épithélium a disparu et ce dernier est envahi au point de n'être plus représenté à ce niveau que par des bribes et fragments cellulaires perdus dans la masse des leucocytes envahisseurs. Du côté libre, les couches cellulaires paraissent être plus résistantes : elles semblent parfois bosselées sous la pression qu'elles supportent de bas en haut; d'autres fois, au contraire,

Digitized by Google

elles sont *creusées* d'un étroit canal dans lequel on reconnaît souvent un leucocyte surpris par le fixateur, dans sa progression vers la surface épithéliale. L'ensemble de la cavité avec le canal étroit ressemble assez bien à un flacon à long goulot. Cette description est absolument conforme à celle de Zawarykin. Nous n'y ajouterons que deux détails : 1° souvent l'épithélium a disparu sur une étendue relativement grande et dans toute son épaisseur : il s'agit probablement d'un soulèvement tel que celui décrit par Stöhr; 2° d'après ce dernier auteur, les leucocytes arrivant ainsi à la surface libre seraient simplement des cellules dégénérées; Zawarykin n'y voit que des globules blancs, sains, qui pourraient même rentrer plus tard. Quant à nous, nous en avons reconnu des deux espèces et, de plus, un grand nombre de phagocytes charriant des inclusions de natures diverses : cellules dégénérées, granulations graisseuses, etc. De tout cela il résulte qu'il y a un *parallélisme complet* entre les phénomènes observés, après fixation, par Zawarykin, et partiellement par Stöhr (et vérifiés par nous), et ceux que nous avons pu *voir intra vitam* dans les téguments de Mollusques. Nous en résumons les points principaux dans l'énumération suivante :

1. L'épithélium est envahi par les leucocytes venant des tissus sous-jacents; ils se dirigent vers la surface libre. Parmi eux il y a des leucocytes sains, d'autres en voie de dégénérescence, d'autres encore sont des phagocytes.

2. Ils sont *isolés* ou *groupés* et se frayent une voie soit par écartement, soit par érosion des cellules épithéliales.

3. Des cavités voisines sont parfois séparées par de très minces cloisons (résidus épithéliaux).

4. Celles-ci disparaissent sous la poussée ou sous l'action dissolvante des leucocytes : de là résultent les grandes lacunes intraépithéliales.

5. Souvent la communication de ces cavités avec les tissus profonds est invisible, ou bien parce qu'il n'en reste pas de traces, ou bien encore parce qu'elles sont trop irrégulières. Parfois cette communication est au contraire très nette, et même en beaucoup d'endroits toute limite de séparation a disparu.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

1. Apathy. — Studien zur Histologie der Najaden. (*Biol. Centralbl.*, Bd VII, 1887.)
2. Apathy. — Tanúlmány a Najadeak Szövettanárál. Budapest, 1885.
3. Arnstein. — Ueber Becherzellen und ihre Beziehung zur Fettresorption und Secretion. (*Virchow's Archiv*, Bd XXXIX, 1867.)
4. Carrière (Justus). — Die Drüsen im Fusse der Lamellibranchiaten. Würzburg, 1879.
5. Carrière (Justus). — Die Wasseraufnahme bei den Mollusken. (*Zoologischer Anzeiger*, VI^e Jahrg., 1883, n° 138.)
6. Carrière (Justus). — Trichodine sp.? (pediculus) als Blut- und Lymphkörperchen-fressender gelegentlicher Schmarotzer im Seitenkanal von Cottus Gobio. (*A. f. m. A.*, Bd XXXIII, 1889.)
7. Cattaneo. — Sulla morfologia delle cellule ameboidi dei Molluschi e Artropodi. (*Bollet. scientif.*, 1889.)
8. Cuénot. — Études morphologiques sur les Échinodermes. (*Archives de biologie*, t. XI, 1891.)
9. Cuénot. — Études physiologiques sur les Gastéropodes pulmonés. (*Archives de biologie*, t. XII, 1892.)
10. De Bruyne (C.). — Phagocytose. (*Handelingen van het III^e Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres*, 1891.)
11. De Bruyne (C.). — De la phagocytose et de l'absorption de la graisse. (*Ann. de la Soc. de méd. de Gand*, 1re, 2e et 3e communications préliminaires, 1891.)
12. De Bruyne (C.). — De la phagocytose observée sur le vivant dans les branchies des Mollusques lamellibranches. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, décembre 1892.)
13. Durham. — On Emigration of Amaeboid corpuscles in Starfish. (*Proceedings of the Royal Society*, XIV, 1888.)
14. Durham. — On wandering Cells in Echinoderms more especially with regard to excretory functions. (*Quarterly Journal of micr. sc.*, vol. XXXIII, part. 1, 1891.)
15. Ecker. — Icones physiol., t. III.
16. Eimer (Th.). — Weitere Nachrichten über den Bau des Zellkerns nebst Bemerkungen über Wimperepithelien. (*A. f. m. A.*, Bd XIV.)
17. Eisig (Hugo). — Monographie der Capitelliden des Golfes von Neapel und der angrenzenden Meeres-Abschnitte nebst Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie und Physiologie. Berlin, R. Friedländer, 1887.
18. Engelmann. — Ienaische Zeitschrift für Medicin, Bd IV.
19. Engelmann. — Hermann's Handbuch der Physiologie.

Digitized by Google

20. Engelmann. — Zur Anatomie und Physiologie der Flimmerzelle. (*Arch. f. d. ges. Physiologie*, Bd XXIII, 1880, 1 planche.)
21. Flemming. — Ueber die Blutzellen der Acephalen und Bemerkungen über deren Blutbahn. (*A. f. m. A.*, Bd XV.)
22. Griesbach (H.). — Ueber das Gefässsystem und die Wasseraufnahme bei Najaden und Mytiliden. (*Z. f. w. Z.*, Bd XXXVIII, 1883.)
23. Griesbach (H.). — Beiträge zur Kenntniss des Blutes. (*Archiv f. d. ges. Phys.*, Bd L, 1891.)
24. Griesbach (H.). — Beiträge zur Histologie des Blutes. (*A. f. m. A.*, Bd XLVII, erstes Heft, 1891.)
25. Grobben (Carl). — Die Pericardialdrüse der Lamellibranchiaten. (*Arch. Zool. Instit. Wien*, Bd VII, 1888.)
26. Grobben (Carl). — Die Pericardialdrüsen der chaetopoden Anneliden. (*Sitzungsb. der K. Acad. der Wissensch. Wien*, Bd XCVII, 1888.)
27. Haeckel (E.). — Le règne des Protistes. (Traduction française par Jules Soury. Paris, 1879.)
28. Hammann (O.). — Histologie der Echinodermen, Fischer, Iena.
29. Hanitsch (R.). — Die Wasseraufnahme bei Cyclas und Anodonta. (*Inaug. Dissert.* Iena, 1884.)
30. Heidenhain (R.). — Beiträge zur Histologie und Physiologie der Dünndarmschleimhaut. (*Pflüger's Archiv f. Phys.*, Bd XLIII, suppl. Heft, 1888.)
31. Hertwig (O.). — La cellule et les tissus. (Traduit de l'allemand par Ch. Julin, 1894.)
32. Jhering (von). — Ueber die Anatomie von Cyclas und die Homologie der Keimblätter bei den Mollusken. (*Zeitschr. f. w. Zool.*, Bd XXVI, 1876.)
33. Janssens (Fr.). — Les branchies des Acéphales. (*La Cellule*, t. IX, 1891.)
34. Joubin (L.). — Recherches sur l'anatomie de Waldheimia venosa. (*Mémoires de la Société zoologique de France*, 1892.)
35. Julin (Ch.). — Les Ascidiens des côtes du Boulonais. (*Bulletin scientifique de la France et de la Belgique*, t. XXIV, 1892.)
36. Keferstein. — Weichthiere. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreichs.
37. Kollmann. — Pori aquiferi und Intercellulargänge im Fusse der Lamellibranchiaten und Gasteropoden. (*Verh. Naturf. Gesellsch.* Basel, 1883.)
38. Kowalewsky (A.). — Beiträge zur nachembryonalen Entwickelung der Musciden. (*Zool. Anzeiger*, 1885, p. 98.)
39. Kowalewsky (A.). — Ueber das Verhalten der morphologischen Bestandtheile der Lymphe und des Blutes zu Methylenblau. (*A. Anz.*, 1888, nos 2 et 3.)
40. Kowalewsky (A.). — Ueber die Wirkung von Methylenblau auf die Säugethiere. (*Med. C.-Blatt.*, 1888.)
41. Kowalewsky (A.). — Einige Beiträge zur Bildung des Mantels der Ascidien. (*Mémoires de l'Acad. imp. des sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XXXVIII, 1892.)
42. Lawdowsky. — Mikroskopische Untersuchungen einiger Lebensvorgänge des Blutes. (*Virchow's Archiv*, Bd XCVI, 1884, 1re partie.)
43. Lawdowsky. — Mikroskopische Untersuchungen einiger Lebensvorgänge des Blutes. (*Virchow's Archiv*, Bd XCVII, 1884, 2e partie.)
44. Leydig. — Ueber Cyclas Cornea. (*Müller's Archiv f. An. u. Phys.*, 1855.)

Digitized by Google

45. Leydig. — Anatomie und Physiologie der Lungenschnecken. (*A. f. m. A.*, 1865.)
46. Leydig. — Die Pigmente der Hautdecke und der Iris. (*Verhandl. der phys. med. Gesellsch. Würzburg*, Bd XXII, 1888.)
47. Lieberkühn. — Ueber die Psorospermien. (*Müller's Archiv f. An. u. Phys.*, 1854.)
48. List. — Ueber die Herkunft des Pigments in der Oberhaut. (*Biolog. Centralbl.*, 1890.)
49. Löwenthal (Nat.). — Ueber die Rückbildung der Eizellen und das Vorkommen von Leucocyten im Keimepithel und in den Eischläuchen. (*Intern. Monatschr.*, V, 1889.)
50. Mac Mun. — Chromatology of the blood of some Invertebrates. (*Qu. Journ. of micr. science*, XXV, 1884.)
51. Marchi (P.). — Betrachtungen über Wimper-Epithel. (*A. f. m. A.*, Bd II, 1866.)
52. Metschnikoff (E.). — Ueber die intracellulare Verdauung bei Cœlenteraten. (*Zool. Anzeiger*, 1880.)
53. Metschnikoff (E.). — Leçons sur la pathologie comparée de l'inflammation. Paris, 1892.
54. Mall. — Die Blut- und Lymphwege im Dünndarme des Hundes. (*Abhandl. der K. sächs. Ges. der Wiss.*, Bd XIV, n° 3, 1887.)
55. Nalepa (A.). — Die Intercellularräume des Epithels und ihre physiologische Bedeutung bei den Pulmonaten. (*Sitzungsb. d. K. Akad. der Wissensch.*, Bd LXXXVIII, 1883.)
56. Nuel & Fredericq. — Éléments de physiologie humaine.
57. Nussbaum. — Ein Beitrag zur Lehre von der Flimmerbewegung. (*A. f. m. A.*, Bd XIV, 1877.)
58. Pfeffer (W.). — Ueber Aufnahme von Anilinfarben in lebende Zellen. (*Untersuch. aus dem botan. Instit. zu Tübingen*, Bd II.)
59. Poljak. — Dissertation inaugurale parue en langue russe. Saint-Pétersbourg, 1891. (Analyse dans les *Jahresberichte der Anatomie und Physiologie.*)
60. Pouchet. — Sur le sang des Crustacés. (*Journ. de l'Anat. et de la Physiol. de Robin*, 1882.)
61. Ray Lankester. — On green Oysters. (*Qu. J. of m. sc.*, vol. XXVI, 1886.)
62. Renaut. — Traité d'Histologie pratique, 1re partie, 1889.
63. Roule (L.). — Recherches histologiques sur les Mollusques lamellibranches. (*Journal de l'Anat. et de la Physiol.*, 1887.)
64. Ruffer (A.). — On the Phagocytes of the alimentary canal. (*Quarterly Journ. of micr. science*, vol. XXX, 1889-1890.)
65. Sabatier. — Études sur la Moule commune. (*Mémoires de l'Acad. des sciences et lettres de Montpellier*, 1877.)
66. Salensky. — Beiträge zur Embryonalentwickelung der Pyrosomen. (*Zoologische Jahrbücher*, t. V, 1891.)
67. Sarrasin (C.-F. & P.-B.). — Notiz über direkte Communication des Blutes mit dem umgebenden Medium. (*Arb. aus. d. Zool. Instit. Würzburg*, Bd VIII.)
68. Semper. — Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Pulmonaten. (*Zeitschr. f. wiss. Zool.*, Bd VIII.)
69. Schaefer. — On the part played by amœboid cells in the process of intestinal absorption. (*Internationale Monatschrift für Anatomie und Physiologie*, Bd II, 1885.)
70. Schiefferdecker (P.) & Kossel (A.). — Gewebelehre mit besonderer Berücksichtigung des menschlichen Körpers, 1891.
71. Schiemenz (P.). — Ueber die Wasseraufnahme bei Lamellibranchiaten und Gastropoden. (*Mittheil. aus der Zool. Station zu Neapel*, Bd VII.)

Digitized by Google

72. Schwalbe (G.). — Kleinere Mittheilungen zur Histologie wirbelloser Thiere. II. Eine Beobachtung über Flimmerbewegung. (*A. f. m. A.*, Bd V, 1869.)
73. Stepanoff. — Die Geschlechtsorgane und die Entwickelung von Cyclas. (*Archiv f. Naturg.*, XXI.)
74. Stöhr. — Ueber Mandeln und Balgdrüsen. (*Virchow's Archiv*, Bd XCVII, 1884.)
75. Stöhr. — Ueber den Bau der Conjunctiva Palpebrarum. (*Sitzungsb. der phys. medic. Gesellschaft Würzburg.* 1885.)
76. Stöhr. — Ueber die Lymphknötchen des Darmes. (*Arch. f. m. Anat.*, Bd XXXIII, 1889.)
77. Stöhr. — Ueber die Mandeln und deren Entwickelung. (*Correspond. Blatt für Schweizer Aerzte.* Jahrg. XX, 1890.)
78. Stöhr. — Die Entwickelung des adenoiden Gewebes, der Zungenbälge und der Mandeln des Menschen, 1891. Festschrift zur Feier des 50 jährigen Doctor-Jubiläums Herrn Dr K. Wilhelm von Nägeli in München und Herrn Geheimrath Professor Dr Albert von Kölliker in Würzburg gewidmet von der Universität, dem Eidg. Polytechnikum, der Thierarzneischule in Zürich.
79. Strahl. — Die Rückbildung reifer Eierstockseier am Ovarium von Lacerta agilis. (*Verhandl. der Anatom. Gesellsch. auf der 6en Versammlung in Wien*, 1892.)
80. Verworn. — Psycho-physiologische Protisten-Studien. Iena, 1889.
81. Wagner. — Ueber die Rolle der Leukocyten in plastischen Processen bei den Wirbellosen. (*Zool. Anz.*, 1885, p. 386.)
82. Watney. — The minute Anatomy of the alimentary Canal. (*Philosophical Transactions*, vol. CLXVI, 5 planches, 1876.)
83. Zawarykin. — Ueber die Fettresorption im Dünndarm. (*Pflügers' Archiv*, Bd XXXI, 1 Tafel, 1883.)
84. Zawarykin. — Ueber das Epithel der Tonsillen. (*Anat. Anz.*, 1889, n° 15.)
85. Cuénot. — Les organes phagocytaires chez quelques invertébrés. (*Archives de Zoologie expérimentale*, t. X.)

Digitized by Google

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

(Tous les dessins sont faits d'après le vivant.)

Fig. 1. *Branchie de Moule.* — La cavité *c* s'étend sur un grand nombre de territoires cellulaires; ses parois sont très irrégulières et présentent un grand nombre d'anfractuosités, de bribes ondulées, et bifurquées ou non. Il y a sept phagocytes y renfermés dont un complètement arrondi, un à deux lobopodes et deux à fins pseudopodes typiques. Le noyau est très peu distinct et le protoplasme de tous, sauf un, est grossièrement granuleux. Le dessin ne rend point la communication de la cavité intraépithéliale avec les lacunes sanguines; les éléments épithéliaux sont encore intacts sur une assez grande étendue du côté de la surface libre. (Zeiss. obj. D. — oc. 2, tube étiré.)

— 2. *Branchie de Moule.* — Il y a quatre phagocytes dans la cavité. Trois d'entre eux véhiculent de grandes inclusions très réfringentes; les pseudopodes sont fins sur un des phagocytes, les autres sont très peu amaebiformes. Du côté libre, il ne reste qu'une étroite bordure de protoplasme séparant la cavité de la surface de la branchie; du côté interne, il n'y a pas de communication avec les tissus profonds. (Zeiss. obj. D. — oc. 2, tube étiré.)

— 3. *Branchie d'Anodonte.* — Trois phagocytes à l'intérieur de la cavité intraépithéliale. Une cellule épithéliale suspendue au sein de la cavité est réduite à un mince trabécule protoplasmique renflé à la hauteur du noyau; celui-ci est intact. Il y a ici communication des lacunes sanguines avec la cavité intraépithéliale et le phagocyte *p* est représenté au moment où il pénètre dans celle-ci. (Zeiss. obj. D. — oc. 2, tube étiré.)

— 4, 5. Deux stades successifs d'une même cavité intraépithéliale *esquissés à trente minutes d'intervalle.* Par la comparaison des deux figures, on peut constater les progrès de la dévastation phagocytaire. Les limites de la cavité ont reculé dans la seconde figure et sont tout près d'atteindre la surface en *a*; il y a également un phagocyte de plus que dans le premier stade et la position relative de chacun d'eux a changé. Le contenu des cellules envahissantes varie et l'une d'elles charrie des inclusions d'origine hépatique. Sous le rapport des pseudopodes, il y a aussi de grandes différences. (Zeiss. obj. F. — oc. 4, tube étiré.)

— 6. Phagocyte renfermant une sphère hyaline qui sert de substratum à un amas de granulations jaune brunâtres. (Zeiss. obj. F. — oc. 4, tube étiré.)

Digitized by Google

PLANCHE II.

FIG. 1. *Branchie de Moule* fixée par la liqueur de Hermann bouillante après un examen sur le vif, coloration par la safranine. La cavité intraépithéliale renferme cinq leucocytes dont quatre sont munis de pseudopodes. Les parois de la cavité sont très irrégulières; il y a communication plus ou moins évidente avec les lacunes sanguines. Aucun des phagocytes ne renferme des inclusions provenant du foie ou de l'organe de Bojanus. (Zeiss. Apochromat. 3,0^{mm} Apert. 1,40 Homog. Immers. — oc. compens. 8, — tube étiré.)

— 2. *Palpe d'Anodonte* fixé (liqueur de Hermann et safranine) sans examen préalable sur le vif. Dévastation épithéliale considérable : la cavité aux bords échancrés renferme un très grand nombre de phagocytes semblables à ceux des tissus profonds. Les inclusions sont parfois au nombre de deux ou plusieurs dans un même phagocyte. Çà et là une inclusion non accompagnée d'un noyau leucocytaire : il s'agit d'un phagocyte entamé par la coupe en dehors de son noyau, ou bien d'un leucocyte dégénéré. (Zeiss. Apochromat. 3,0^{mm} Apert. 1,40 Homog. Immers. — oc. compens. 8, — tube étiré.)

— 3. Coupe de *manteau* (région siphonale) d'*Unio* (mêmes fixation et coloration). L'épithélium et les tissus sous-jacents sont farcis de phagocytes de diverses natures et qui rappellent, quelques-uns du moins, ceux de la figure précédente. (Zeiss. obj. D. — oc. 2.)

— 4, 5, 6. Trois leucocytes à noyau bourgeonnant; surtout les deux premiers sont caractéristiques. Chacun renferme des résidus d'éléments histologiques digérés. Épithélium et tissus profonds de manteau d'*Unio* (liqueur d'Hermann et safranine).

— 7, 8. Deux mégacaryocytes moins typiques. Épithélium et tissus profonds de manteau d'*Unio* (id.).

— 9, 10. Deux exemples de leucocytes à boules. Épithélium et tissus profonds de manteau d'*Unio* (id.).

— 11. Deux phagocytes renfermant chacun une inclusion sphérique qui charrie elle-même un ou plusieurs points ou grains. Épithélium et tissus profonds de manteau d'*Unio* (id.).

— 12 à 17. Diverses formes de leucocytes en dégénérescence : le protoplasme a pris une teinte grise uniforme et sert de substratum aux résidus caryocytiques qui peuvent affecter diverses formes. Épithélium et tissus profonds de manteau d'*Unio* (id.).

— 18 à 24. Diverses formes de leucocytes en dégénérescence provenant de l'épithélium vibratile des branchies.

— 25, 25'. Cinq leucocytes fixés dans les lacunes sanguines de branchies de Moule (liqueur de Flemming et safranine). Ils portent chacun un ou deux appendices produits probablement par l'action du réactif. Ils appartiennent tous à la variété granuleuse.

Digitized by Google

PLANCHE III.

Fig. 1. *Orifice branchial du manteau d'Anodonte.* (Amputation opérée sur un animal qui n'a pas été soumis à un examen préalable *intra vitam.*) — Sublimé 2 %, hématoxyline. L'épithélium présente une désorganisation assez avancée; ses cavités fusionnées renferment huit phagocytes à noyau très visible, sauf pour l'un d'eux. La limite entre les lacunes et l'épithélium a complètement disparu. A droite de la figure il y a un polycaryocyte *p* à deux noyaux; il charrie une boule hyaline servant de substruction à des sphères granuleuses.

— 2. Phagocyte typique renfermant une boule hyaline avec deux inclusions sphériques granuleuses. (Même provenance.)

— 3. Phagocyte provenant des tissus profonds du même organe.

— 4. Autre phagocyte à deux noyaux. (Même observation.)

— 5, 6, 7, 8, 9. Diverses formes de leucocytes provenant des branchies d'Anodonte (sublimé 2 %, hématoxyline). Le n° 8 surtout renferme des boules très grandes.

— 10. *Sommet de filament branchial d'Anodonte ayant séjourné deux jours dans la solution de bleu de méthylène* ($^1/_{10\,000}$). — Une des cavités intraépithéliales examinées sur le vivant : elle renferme huit leucocytes dont cinq à inclusions colorées par la couleur d'aniline. Dans le stroma conjonctif se voit un autre leucocyte charriant également une inclusion teinte en bleu. Un leucocyte se trouve encore engagé entre les cils vibratiles : il vient de quitter le tissu épithélial par écartement des cellules. Trois leucocytes ne portent aucune trace de bleu de méthylène.

— 11, 12, 13, 14, 15. Leucocytes diversement colorés, eux et leur contenu, par le bleu de méthylène. (Dissociation sur le frais de *branchie d'Anodonte.*)

— 16, 17, 18, 19. Sortie effectuée à travers le revêtement *épithélial branchial d'Anodonte* d'éléments teintés par le bleu de méthylène. En 16 on voit deux leucocytes encore partiellement engagés entre les cellules épithéliales des branchies. Cette sortie se fait ici par *glissement entre* les cellules épithéliales. N^{os} 17, 18 et 19, trois leucocytes après leur sortie; le dernier renferme une boule colorée logée dans un espace clair. Le leucocyte de droite de la figure 16 et celui des figures 17 et 18 paraissent ne plus être normaux et semblent appartenir à cette variété de cellules sanguines qui s'expulsent sans entraîner avec elles des produits d'usure ou des substances étrangères. Elles sont presque totalement colorées par le bleu de méthylène.

— 20, 21. Dissociation à frais de la *glande digestive* du même animal. Deux amas colorés (leucocytes?) entourés d'une zone claire; en 20 l'ensemble est supporté par une masse hyaline. Ne s'agirait-il pas d'une sphère hyaline primitivement renfermée dans un leucocyte auquel elle a été arrachée par la dissociation?

Digitized by Google

Fig. 22. Dissociation à frais du foie d'Anodonte *bleuie*. Cellule charriant deux amas colorés.

— 23. Phagocyte renfermant une sphère hyaline à deux amas colorés par le bleu de méthylène. (Même provenance.)

— 24, 25. Deux substratums renfermant des amas jaune brunâtres et d'autres teintés par le bleu de méthylène. (Même provenance.)

— 26, 27, 28. Leucocytes réticulés dessinés d'après une préparation dissociée de branchie d'Anodonte traitée par le vert de méthyle.

— 29, 30, 31, 32. Leucocytes réticulés renfermant des inclusions jaunes et dessinés d'après une préparation de foie dissocié. Vert de méthyle.

— 33. *Région postérieure et inférieure du manteau d'une Anodonte* ayant séjourné trois jours dans la solution de bleu de méthylène. Coupe au microtome à glace. Un très grand phagocyte occupe presque complètement la cavité intraépithéliale. Son noyau est teinté par la matière colorante. Il renferme trois inclusions dont une est constituée par un leucocyte contenant lui-même une inclusion bleue et qui, probablement dégénéré, avait été incorporé par le phagocyte. Les deux autres inclusions se réduisent à des amas sans structure ayant énergiquement fixé le bleu de méthylène et rappelant sous ce double rapport l'amas arrondi renfermé dans le leucocyte avalé.

N. B. Immédiatement après que la coupe eut été confectionnée, nous avons observé pendant assez longtemps l'énorme phagocyte; il se mouvait énergiquement dans la cavité qu'il s'était creusée aux dépens de six cellules épithéliales. Deux cellules latérales sont simplement comprimées et écartées de leur direction primitive. Le mouvement du phagocyte se réduisait à une simple rotation de tout le corps cellulaire, tandis que des courants internes du protoplasme se continuaient sans interruption.

Digitized by Google

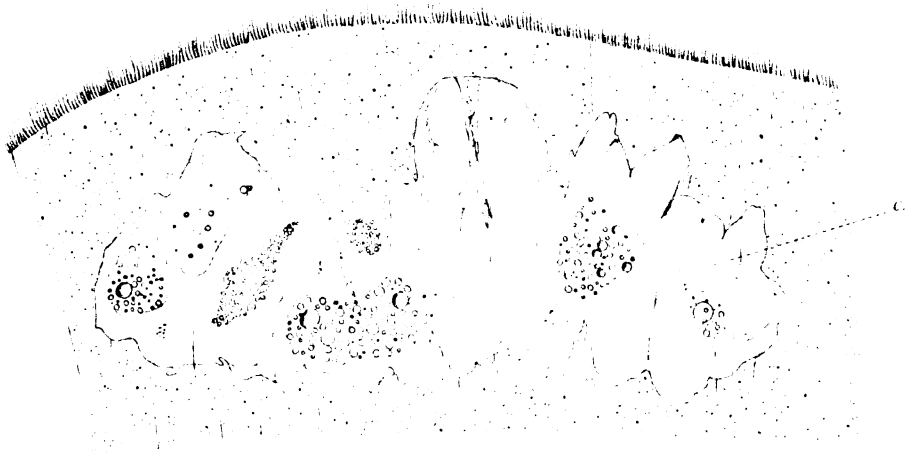


Fig 1

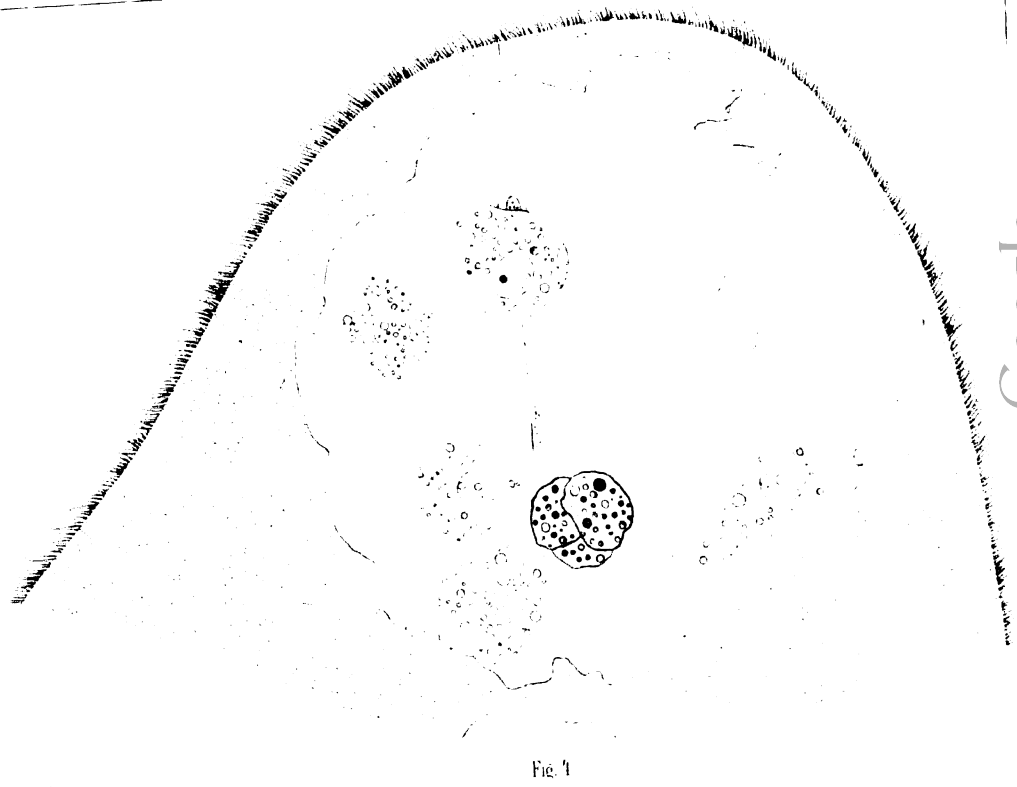


Fig. 4

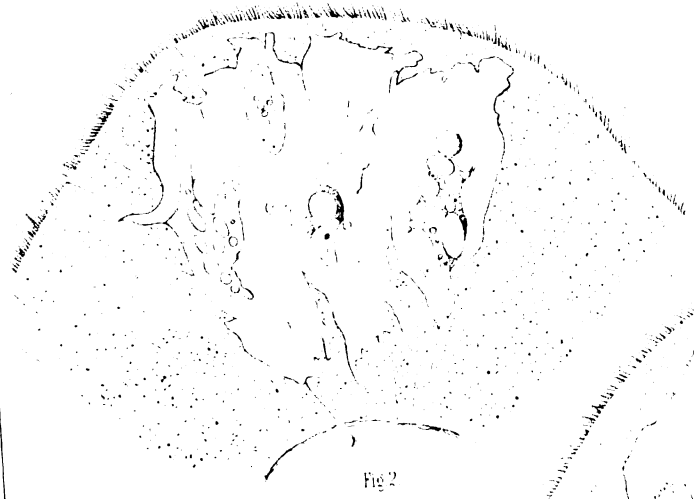


Fig 2

Fig 6

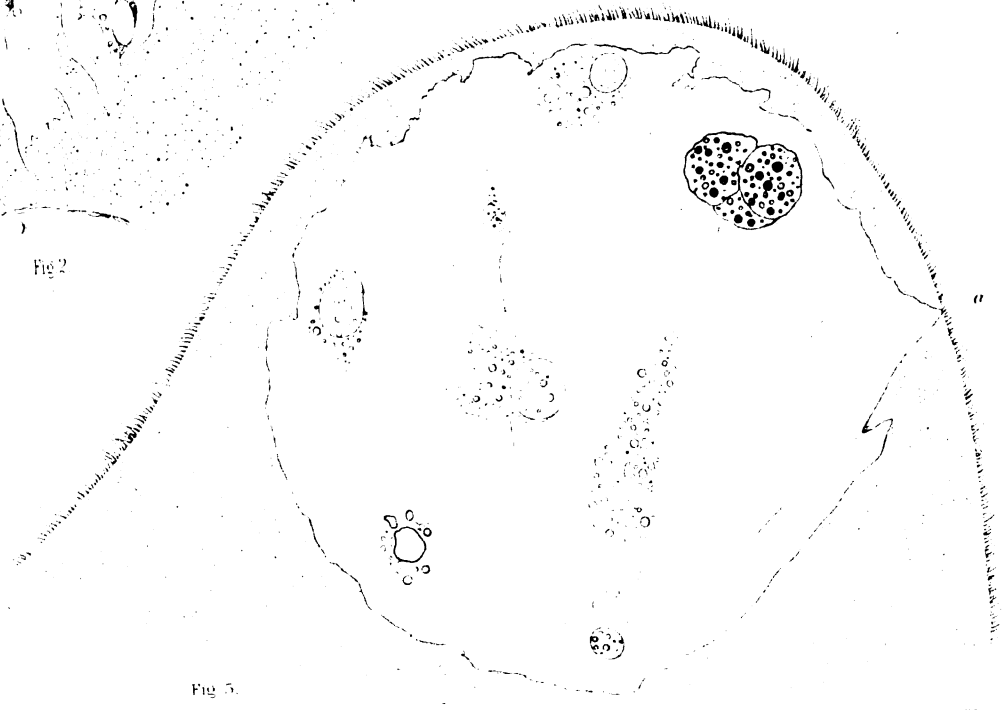


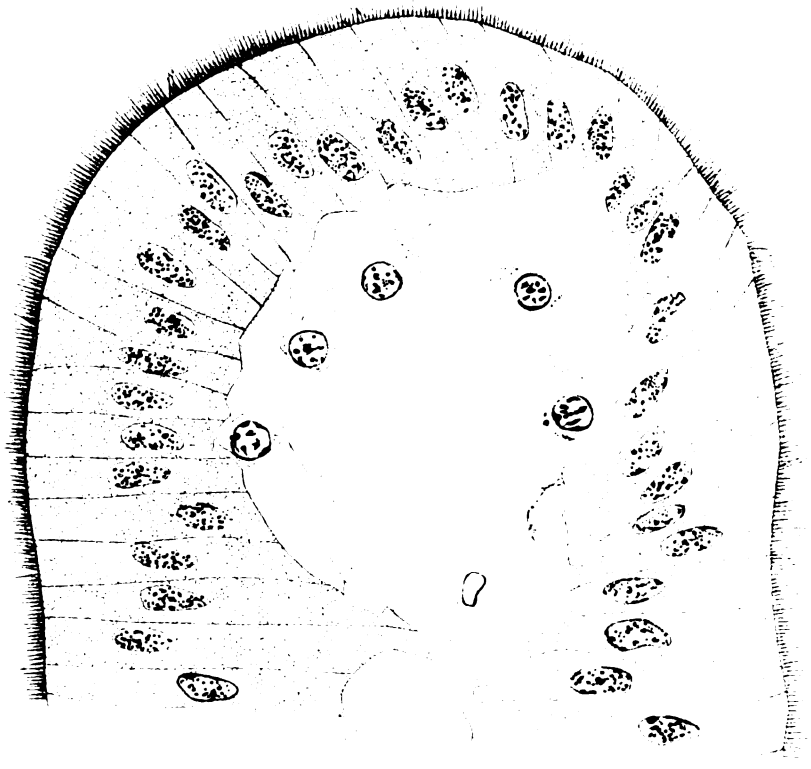
Fig 5.

Fig

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 1



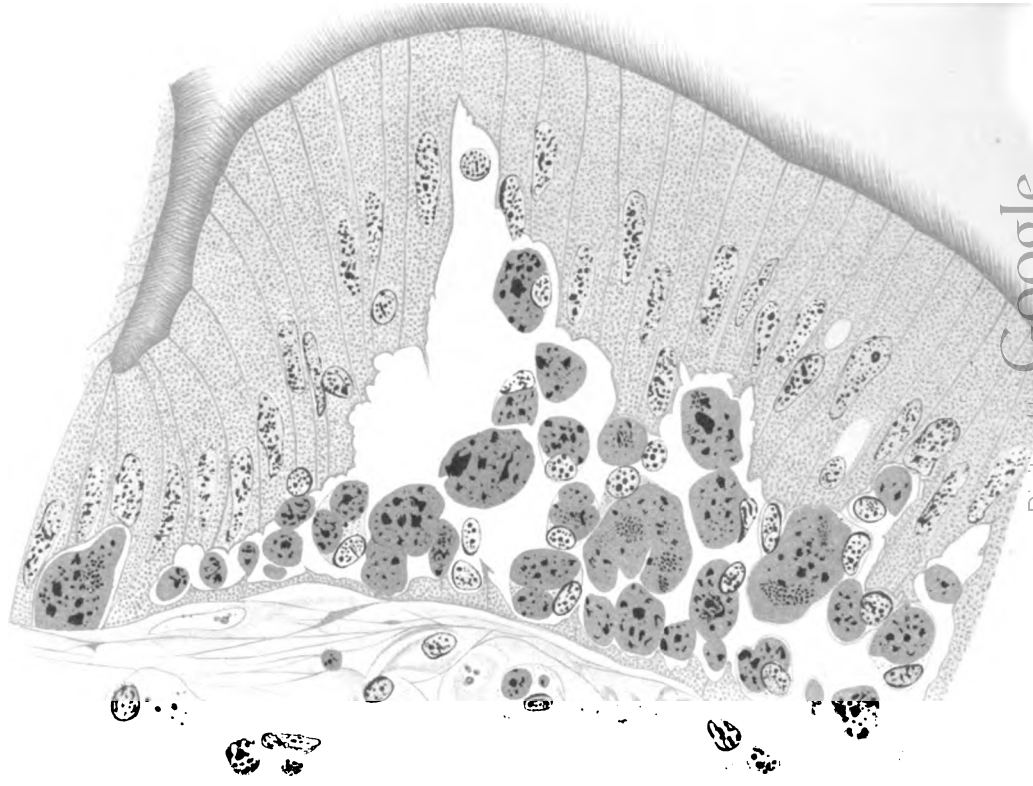


Fig 3.

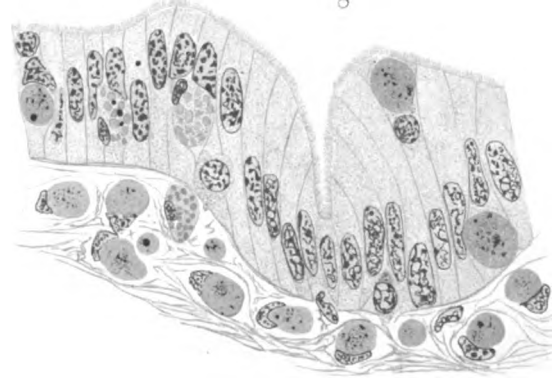


Fig 4.

Fig 5

Fig 6.

Fig 7

Fig 8

Fig 9.

Fig 10

Fig 11

Fig 12.

Fig 13

Fig 15

Fig 14

Fig 16.

Fig 17.

Fig 25.

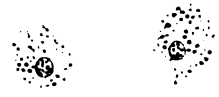


Fig 25'

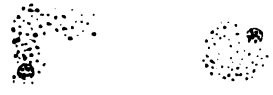


Fig 18.

Fig 19

Fig 20.

Fig 21.

Fig 22

Fig 23.

Fig 24.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig.1.

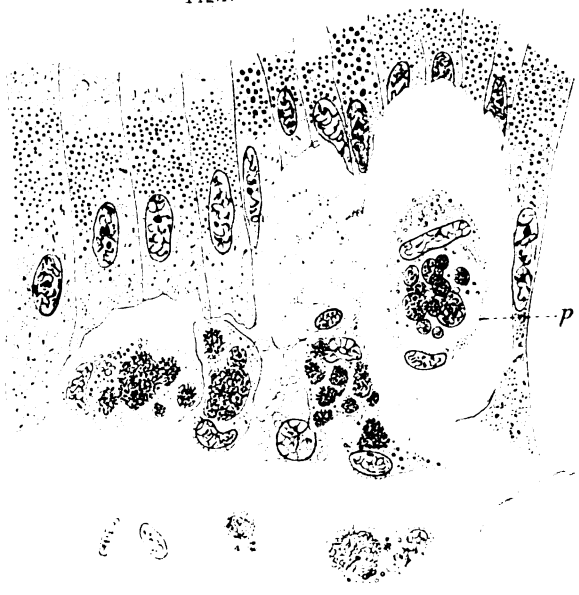


Fig.2.

Fig.3.

Fig.4.

Fig.33.

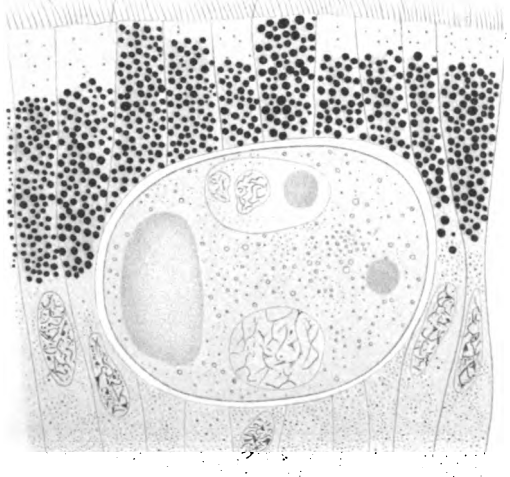


Fig.5.

Fig.7.

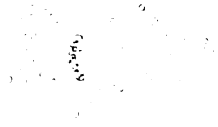


Fig.8.

Fig.9.

Fig.15.

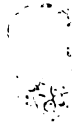


Fig.11.

Fig.13.

Fig.12.

Fig.16.

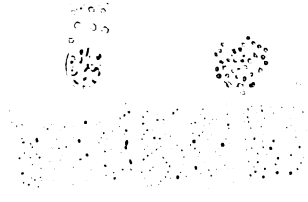


Fig.14.

Fig.6.

Fig.22.

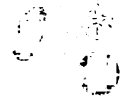


Fig.23.

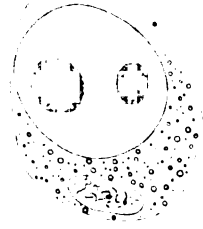


Fig.20.

Fig.21.

Fig.17.

Fig.29.

Fig.18.

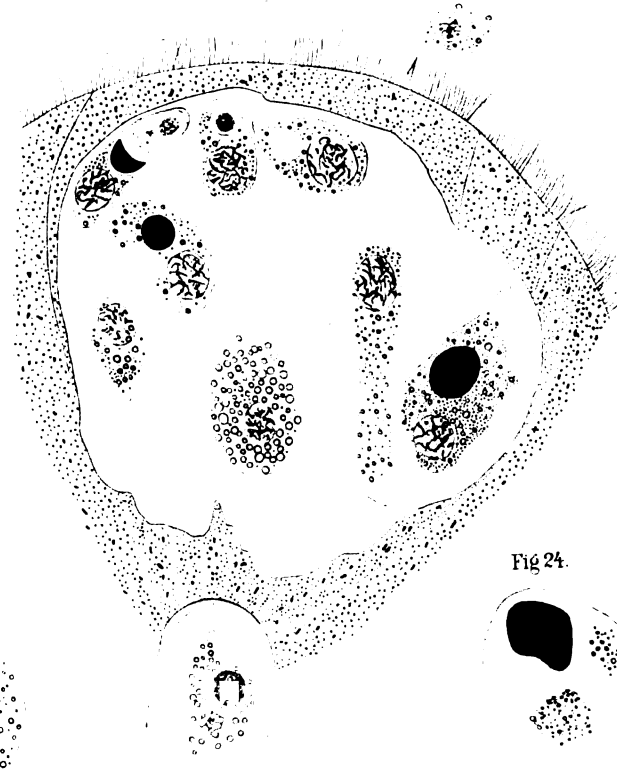


Fig.19.

Fig.28.

Fig.30.

Fig.24.

Fig.25.

Fig.26.

Fig.27.

Fig.31.

Fig.32.

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR UNE MÉTHODE SIMPLE

POUR CHERCHER

LA VARIATION DE L'ANGLE D'EXTINCTION

DANS

LES DIFFÉRENTES FACES D'UNE MÊME ZONE

APPLICATION A LA ZONE VERTICALE DE L'AXINITE

PAR

G. CESÀRO

CHARGÉ DU COURS DE MINÉRALOGIE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 7 juillet 1894.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR UNE MÉTHODE SIMPLE

POUR CHERCHER

LA VARIATION DE L'ANGLE D'EXTINCTION

DANS

LES DIFFÉRENTES FACES D'UNE MÊME ZONE

APPLICATION A LA ZONE VERTICALE DE L'AXINITE

On sait que lorsqu'un cristal se forme rapidement, les plans de clivage sont ceux qui ont le plus de tendance à se développer et que, si deux clivages coexistent, comme leur intersection est une ligne de facile développement, c'est suivant elle que le cristal tend à s'allonger. C'est ce qui arrive pour les microlites dans les roches; ainsi : le pyroxène et l'amphibole présentent des microlites allongés suivant la verticale, intersection des deux clivages m; les microlites feldspathiques sont allongés suivant l'intersection des clivages p et g^1, etc. Il suit de là qu'en négligeant les sections trop petites, on peut dire que les sections observées passent par la longueur du microlite, c'est-à-dire qu'elles appartiennent à la zone ayant pour axe la direction d'allongement; on a donc là une droite de repère; la mesure de l'angle d'extinction à partir de cette droite caractériserait le minéral, si cet angle ne variait pas très sensiblement d'une face à l'autre dans la même zone.

M. Michel-Lévy a résolu la question en faisant observer que, comme dans une roche les cristaux se trouvent orientés de toutes les façons possibles,

Digitized by Google

on peut admettre que toutes les orientations sont approximativement représentées dans une préparation d'une certaine étendue; il suit de là que certains angles correspondants à des *maxima* ou des *minima* se répètent un grand nombre de fois et deviennent caractéristiques pour l'espèce minérale. Ainsi, dans la zone verticale *mm*, l'angle d'extinction varie de 0° à 39° pour le pyroxène, de 0° à 15° pour l'amphibole; une plage donnant un angle d'extinction voisin de 15° pourrait donc appartenir à l'une ou à l'autre espèce; mais l'étude de la variation de l'angle d'extinction prouve que dans l'amphibole il y a environ 60 °/₀ de sections dont l'angle diffère de 15° d'environ 1°, tandis que dans le pyroxène il n'y a que quelques sections sur cent qui se trouvent dans ces conditions; de sorte que, si en observant une suite de sections dans une même préparation, on obtient beaucoup d'angles voisins de 15°, on peut en conclure que l'on a affaire à l'amphibole.

M. Michel-Lévy a cherché la formule donnant l'angle d'extinction dans les faces d'une même zone et l'a discutée dans un cas particulier important, celui où l'axe de zone se trouve dans un des trois plans principaux d'élasticité (*).

Dans ce Mémoire nous nous proposons d'exposer une méthode simple et élémentaire par laquelle on arrive à la formule donnant la variation de l'angle d'extinction ainsi qu'à la discussion sur l'existence des maxima ou minima lorsque l'axe de zone se trouve dans un des plans principaux d'élasticité.

Nous avons aussi appliqué la formule à l'axinite, minéral non encore étudié sous ce point de vue.

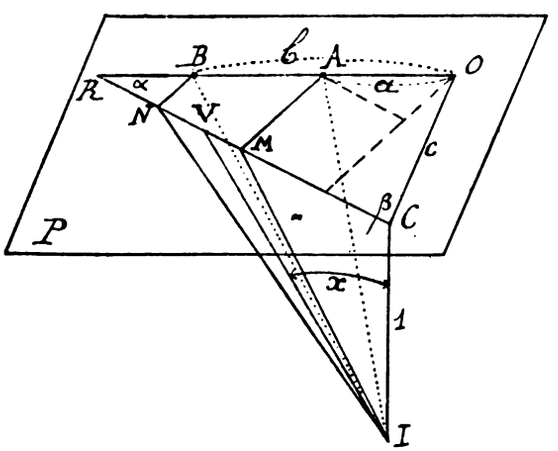


FIG. 1.

(*) Dans un autre Mémoire, nous traiterons probablement le cas général.

Digitized by Google

PROBLÈME. — *Étant donné la position de l'axe de zone relativement aux axes optiques, chercher l'angle que fait la direction d'extinction d'une face quelconque de la zone avec l'axe de celle-ci.*

Soit CI (fig. 1) l'axe de zone, P un plan mené perpendiculairement à cet axe à une distance 1 du centre du cristal, IA, IB les axes optiques, ICR un plan quelconque de la zone. Pour fixer la position de l'axe de zone, relativement aux axes optiques, nous prenons comme données la longueur CO $= c$ de la perpendiculaire menée du point C à la trace du plan des axes optiques, et les distances OA $= a$, OB $= b$ du pied de cette perpendiculaire aux traces de ces axes. Quant au plan ICR, il sera déterminé par l'angle β qu'il fait avec le plan ICO, *qui est le plan de la zone normal au plan des axes optiques* (*).

On sait que pour avoir les directions d'extinction de la face, il suffit de projeter les axes optiques sur celle-ci, puis de tracer les bissectrices des angles formés par ces projections. En menant AM, BN perpendiculaires à CR, on a en MI, NI les projections des axes optiques sur le plan ICR; puis, en traçant la bissectrice de l'angle NIM, IV sera la direction d'extinction, faisant avec l'axe de zone CI un angle x, qui est l'inconnue à calculer en fonction de a, b, c et β. Pour abréger, posons CV $=$ tg $x = \rho$ et désignons les inconnues CM, CN respectivement par m et n.

Une propriété connue de la bissectrice donne, dans le triangle IMN :

$$\frac{VM}{VN} = \frac{MI}{NI}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho - m}{n - \rho} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + n^2}}. \tag{1}$$

De cette équation on tire :

$$\rho = \frac{m\sqrt{1 + n^2} + n\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{1 + n^2} + \sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{(1 + m^2)(1 + n^2)} + mn - 1}{n + m}.$$

(*) Ou par l'angle α que sa trace fait avec celle du plan des axes optiques.

Digitized by Google

Or n et m se calculent facilement en fonction des données : dans le quadrilatère AOCM, qui a deux angles droits, on a évidemment

$$m = a \sin \beta + c \cos \beta;$$

de même

$$n = b \sin \beta + c \cos \beta;$$

puis, en remplaçant

$$(A) \quad \rho = \frac{\sqrt{\{1 + (a \sin \beta + c \cos \beta)^2\}\{1 + (b \sin \beta + c \cos \beta)^2\}} + (a \sin \beta + c \cos \beta)(b \sin \beta + c \cos \beta) - 1}{(a + b) \sin \beta + 2c \cos \beta}.$$

Recherche des maxima. — Pour chercher les maxima et les minima dont est susceptible l'angle d'extinction, il suffit d'égaler à zéro la dérivée de ρ par rapport à β (*).

En posant $\cot \beta = z$, on arrive à l'équation du troisième degré :

$$(B) \quad (a + b)(c^2 + 1) z^3 - 2c(c^2 - 2ab + 1) z^2 - (a + b)(2c^2 - ab - 1) z - c(a^2 + b^2 + 2) = 0.$$

Pour obtenir les *maxima* ou *minima* de l'angle d'extinction, on remplacera dans (A) les valeurs de β obtenues par la résolution de l'équation (B) (**).

Pour étudier la variation de l'angle d'extinction, on construira une courbe en prenant comme abscisses les valeurs attribuées à β, et comme ordonnées les valeurs de x qui résultent de l'équation (A).

Observation. — La formule (A) peut se mettre sous la forme suivante, plus commode pour le calcul :

$$(C) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{(a + b) \sin \beta + 2c \cos \beta}{1 - (a \sin \beta + c \cos \beta)(b \sin \beta + c \cos \beta)} \text{(***)}.$$

(*) Pour avoir ρ', il est plus simple d'employer l'équation (1) mise au préalable sous la forme $\rho^2 - 2 \frac{mn - 1}{m + n} \rho - 1 = 0$.

(**) Dans la résolution de cette équation, il ne faut pas perdre de vue que z peut avoir une valeur infinie correspondant à $\beta = 0$; par conséquent, lorsque certains coefficients s'annulent, il faut vérifier directement si la dérivée x' s'annule pour $\beta = 0$, pour voir si cette dernière valeur correspond à un maximum.

(***) Cette formule peut aussi se déduire directement de la figure 1, comme il suit : On a $2x = \widetilde{CIM} + \widetilde{CIN}$, ou, comme les deux derniers angles ont respectivement pour tangente $CM = m$ et $CN = n$,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{m + n}{1 - mn}.$$

En remplaçant m et n par les valeurs données ci-dessus, on arrive à la formule.

Digitized by Google

Discussion de la formule dans les cas où l'axe de zone se trouve dans un des plans principaux d'élasticité.

PREMIER CAS. — *L'axe de zone se trouve dans le plan perpendiculaire à l'axe d'élasticité moyenne, c'est-à-dire dans le plan des axes optiques.*

Dans ce cas : $c = 0$. En outre, si nous comptons l'angle, qui détermine dans la zone le plan que l'on considère, à partir du plan des axes optiques qui dans notre cas fait partie de la zone, il faudra remplacer (fig. 1) dans les formules β par $90^\circ - \alpha$.

En examinant la figure 1, on voit que la formule a été obtenue en prenant a et b positifs lorsqu'ils sont comptés tous les deux du même côté du point O; si ce point se trouve entre A et B, a et b seront de signes contraires; on peut d'ailleurs toujours désigner par b celle des deux distances OA et OB qui est la plus grande, c'est-à-dire supposer en valeur absolue $b > a$.

L'équation (B) devient dans notre cas :

$$(a + b)\, z^3 + (a + b)(ab + 1)\, z = 0,$$

z désignant dans cette équation $\operatorname{tg} \alpha$.

Comme $a + b \gtrless 0$ (*), on tire de l'équation ci-dessus :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{-(ab + 1)},$$

ou bien

$$\alpha_1 = 0, \quad \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{-ab}}.$$

L'équation (C) devient ici

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(a + b)\cos \alpha}{1 - ab \cos^2 \alpha}.$$

(*) Dans le cas $a + b = 0$, l'axe de zone coïnciderait avec une bissectrice et l'on aurait constamment $x = 0$.

Digitized by Google

En cherchant la dérivée seconde et en y remplaçant α par les valeurs obtenues ci-dessus, on obtient :

$$x_1'' = -\frac{(a+b)(ab+1)}{2(1+a^2)(1+b^2)}, \qquad x_2'' = \frac{(a+b)(ab+1)\sqrt{-ab}}{(a-b)^2}.$$

Prenons pour plan du tableau le plan des axes optiques IL, IL′ (fig. 2); donnons à l'axe de zone toutes les positions possibles depuis Iz jusqu'à Ix. Traçons IQ perpendiculaire à IL′ (*). Trois cas peuvent se présenter : l'axe de zone est dans l'angle zIL, dans l'angle LIQ ou dans l'angle QIx.

a) *L'axe de zone* IS_2 *se trouve dans l'angle* LIQ. La trace du plan des axes optiques sur un plan normal à IS_2 et distant du centre d'une longueur 1, est $O_2A_2B_2$. On voit que a et b sont de même signe et que par conséquent $\sqrt{-ab}$ et α_2 sont imaginaires. En outre, comme $x_1'' < 0$, pour $\alpha_1 = 0$, on a un *maximum;* enfin pour $\alpha = 90°$, on a $x = 0$. Il suit de ce qui précède que dans le cas considéré l'angle d'extinction part d'un maximum dans le plan des axes optiques, décroît au fur et à mesure que le plan de la zone s'éloigne du plan des axes optiques et devient nul lorsque le plan mobile devient normal au plan des axes (**).

b) *L'axe de zone* IS_1 *se trouve dans l'angle aigu des axes optiques.* Dans ce cas, a et b sont de signes contraires, et par conséquent $\sqrt{-ab}$ est réel; mais, comme l'angle B_1IA_1 est aigu, on a en valeur absolue $ab < 1$ et, par conséquent, la valeur de $\cos\alpha_2$ est encore imaginaire. La valeur de x_1'', dans laquelle on change a en $-a$, montre qu'il y a encore *maximum* (***)

(*) IQ est la trace sur le tableau de l'une des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse.

(**) La dérivée de x par rapport à α est :

$$x' = -\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sin\alpha\,(ab\cos^2\alpha + 1)}{(1+a^2\cos^2\alpha)(1+b^2\cos^2\alpha)}.$$

Il suit de là qu'au point $\alpha = 90°$ la tangente à la courbe $x = f(\alpha)$ fait avec l'axe des α un angle donné par $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a+b}{2}$.

(***) Voir la *Note* placée à la fin.

Digitized by Google

pour $\alpha = 0$, de sorte que la courbe est analogue à celle obtenue dans le cas a).

c) *L'axe de zone* IS_3 *se trouve dans l'angle* QIx. Dans ce cas, a et b sont encore de signes contraires; mais, en outre, comme l'angle A_3IB_3 est obtus, on a, en valeur absolue, $ab > 1$; α_2 devient donc réel et, comme $x''_2 < 0$, α_2 correspond à un *maximum*. Pour $\alpha_1 = 0$, x''_1 devient positif et l'on obtient un *minimum* (*).

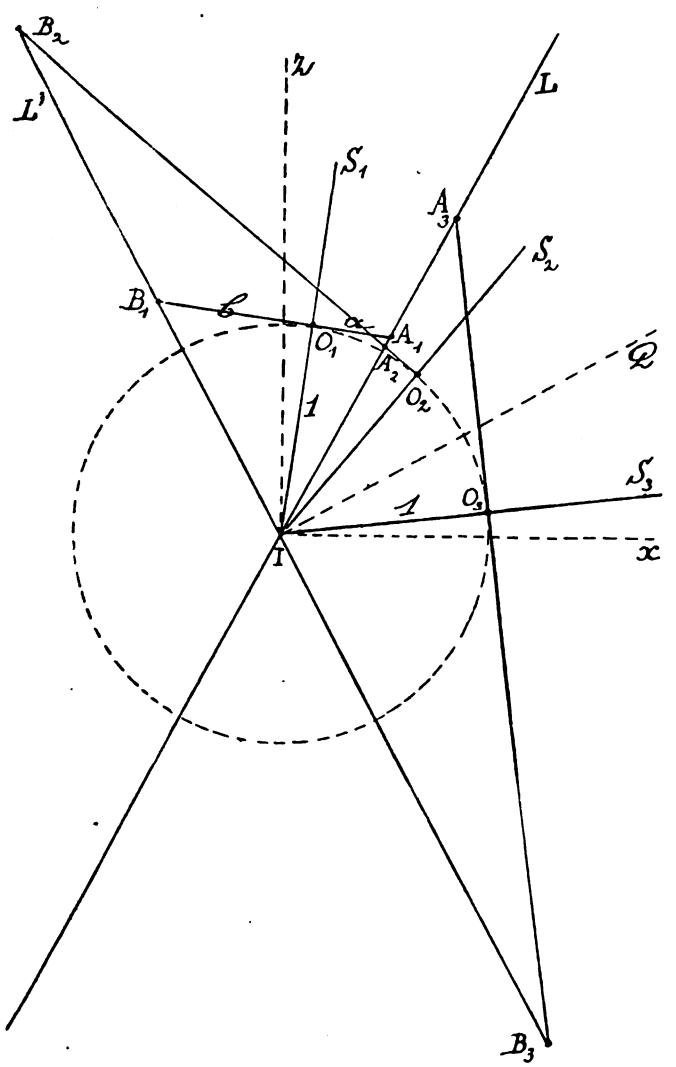


FIG. 2.

Observons que dans le cas examiné en dernier lieu, l'axe de zone se trouve dans l'angle aigu fait par les sections cycliques de l'ellipsoïde inverse.

La discussion précédente peut être résumée dans l'énoncé suivant :

« Lorsque l'axe de zone » est situé dans le plan » des axes optiques, l'an- » gle d'extinction des dif- » férentes faces de la zone » n'est en général suscep- » tible que d'un maxi- » mum, qui est obtenu lorsque le plan considéré coïncide avec le plan » des axes optiques; à partir de ce maximum, l'angle décroît jusqu'à

(*) Voir la *Note* placée à la fin.

Digitized by Google

» zéro, valeur qu'il atteint lorsque le plan devient normal au plan des » axes optiques. Seulement, si l'axe de zone est compris dans l'angle aigu » fait par les sections cycliques de l'ellipsoïde inverse, il y a minimum au » point de départ, dans le plan des axes optiques, puis l'angle d'extinction » augmente jusqu'à un maximum, atteint au moment où le plan fait avec le » plan des axes un angle donné par $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{-ab}}$, puis décroît jusqu'à zéro, » valeur qu'il atteint lorsque le plan devient normal au plan des axes » optiques. »

SECOND CAS. — *L'axe de zone se trouve dans un des deux plans principaux d'élasticité, qui ne contiennent pas les axes optiques.*

Soient IV l'axe de zone (fig. 3) situé dans le plan des xy; AI, LI, les axes

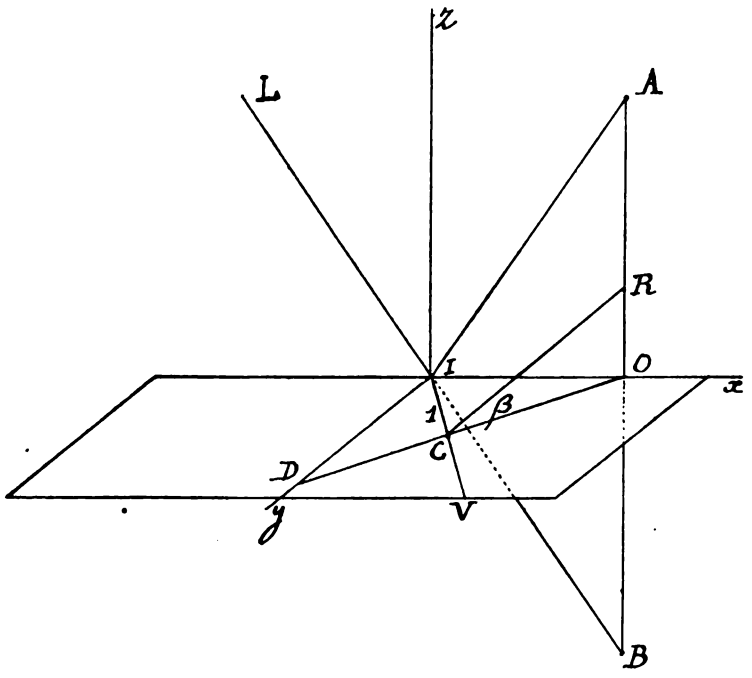


FIG. 3.

optiques; AOD, le plan normal à l'axe de zone, à une distance 1 du centre du cristal; A et B, les traces des axes optiques sur ce plan; ICR, un plan quelconque de la zone. Le plan de la zone normal au plan des axes optiques

Digitized by Google

est xy. En se reportant à la figure 1, on voit que $CO = c$, $AO = a$, $OB = -b$; le cas que nous examinons est donc caractérisé par $b = -a$.

L'équation (B) devient :

$$(2a^2 + c^2 + 1)z^2 + a^2 + 1 = 0;$$

ses racines sont imaginaires; mais comme $z = \cot\beta$ peût devenir infini, il faut vérifier directement si $\beta = 0$ annule x'.

L'équation (C)

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2c\cos\beta}{1 + a^2\sin^2\beta - c^2\cos^2\beta}$$

donne

$$x' = -c\sin\beta\,\frac{a^2 + 1 + (a^2 + c^2)\cos^2\beta}{(1 + a^2\sin^2\beta - c^2\cos^2\beta)^2 + 4c^2\cos^2\beta};$$

on voit que pour $\beta = 0$, $x' = 0$ et, comme x' est constamment négatif pour $\beta > 0$, il y aura un *maximum* de l'angle d'extinction dans le plan des xy, puis cet angle décroît jusqu'à zéro, valeur qu'il atteint lorsque le plan de la zone devient normal au plan des xy (*).

On voit donc que la variation de l'angle d'extinction est la même que dans les cas a) et b) examinés précédemment.

On peut résumer tous les cas examinés ci-dessus dans l'énoncé général qui suit :

« *Lorsque l'axe d'une zone se trouve dans un plan d'élasticité principal,* » *l'angle d'extinction de ses différentes faces passe par un* MAXIMUM *dans ce* » *plan et décroît jusqu'à zéro lorsqu'en partant de celui-ci on s'avance dans* » *la zone vers le plan qui lui est perpendiculaire.*

» *Il n'y a d'exception à cette règle que dans le cas où l'axe de zone,* » *situé dans le plan normal à l'axe moyen, se trouve compris dans l'angle* » *aigu des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse. Dans ce cas il y a* » MINIMUM *dans le plan d'élasticité, puis, avant de décroître jusqu'à zéro,* » *comme dans le cas précédent, l'angle d'extinction augmente d'abord* » *jusqu'à un* MAXIMUM. »

(*) En ce point, la tangente à la courbe fait avec l'axe des β un angle donné par $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{c}{a^2+1}$.

Digitized by Google

APPLICATIONS.

PYROXÈNE.

1. *Zone verticale* $h^1_{100}g^1_{010}$. — Le plan des axes optiques est g^1. Nous adoptons les données de M. Michel-Lévy (*).

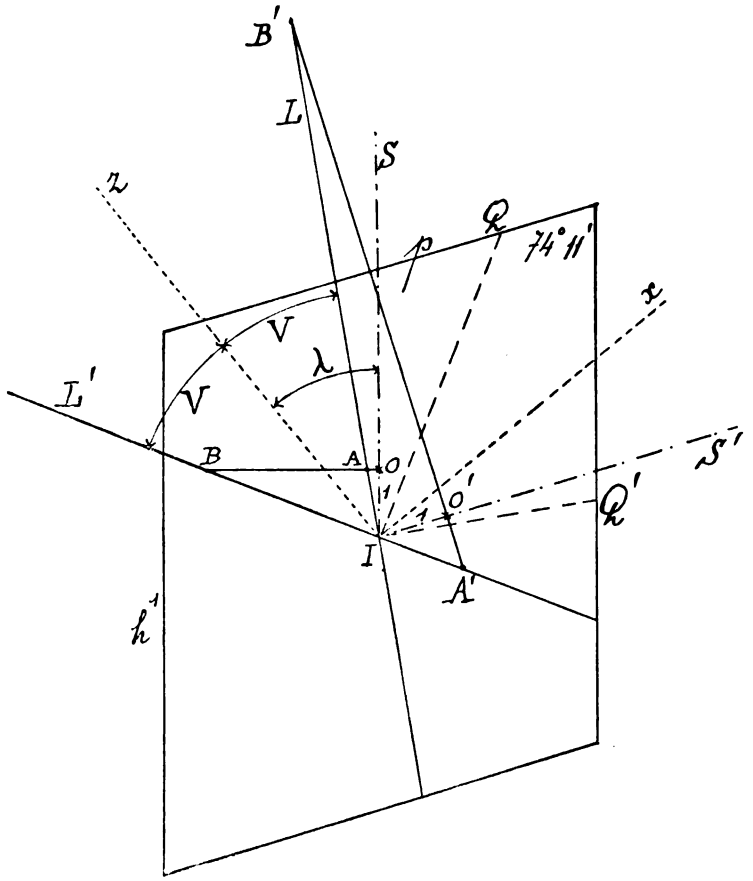


FIG. 4.

La bissectrice lz fait avec la verticale (fig. 4) un angle $\lambda = 38° 44'$; l'angle des axes optiques est $2V = 58° 59'$; en outre, $ph^1 = 74° 11'$.

(*) *Minéralogie micrographique*, par FOUQUÉ et MICHEL-LÉVY, p. 350.

Digitized by Google

L'axe de zone IS se trouve dans le cas a); les quantités a et b sont positives et l'on a :

$$OA = a = \operatorname{tg}(\lambda - V) = 0{,}16271105,$$
$$OB = b = \operatorname{tg}(\lambda + V) = 2{,}50334566.$$

L'angle d'extinction x est donné par la formule

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(a + b)\cos\alpha}{1 - ab\cos^2\alpha}.$$

En donnant à α une suite de valeurs depuis 0° jusqu'à 90°, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 5.

α = angle avec g^1	x	α	x
0°	38° 44′	50°	32° 3′
5°	38° 41′	60°	28° 1′
10°	38° 31′	70°	21° 53′
20°	37° 50′	80°	12° 33′
30°	36° 38′	85°	6° 34′
40°	34° 47′	90°	0°
45°	33° 33′		

2. *Zone* $p_{001}g^1_{010}$. — L'axe de zone IS′ (fig. 4), toujours situé dans le plan des axes optiques, se trouve dans l'angle aigu QIQ′ des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse; nous sommes donc dans le cas c) et il y aura un *minimum* dans le plan des axes, puis un *maximum* entre 0° et 90°.

En changeant a en $-a$, il vient :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(b - a)\cos\alpha}{1 + ab\cos^2\alpha};$$
$$a = \operatorname{tg} O'IA' = \operatorname{tg} 37° 35' 30'' = 0{,}769872\ (*),$$
$$b = \operatorname{tg} O'IB' = \operatorname{tg} 83° 25' 30'' = 8{,}675902.$$

(*) On a : $\widetilde{S'IL'} = 74° 11' + \lambda + V = 142° 24' 30''$ et, par conséquent, $S'IA' = 37° 35' 30''$; $B'IS' = 74° 11' + \lambda - V = 83° 25' 30''$.

Digitized by Google

Dans le plan des axes optiques, on a : $\alpha = 0$ et x minimum $= 22° 55'$ (*). Le maximum, déterminé par $\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}}$, correspond à $\alpha_2 = 67° 14' 11''$

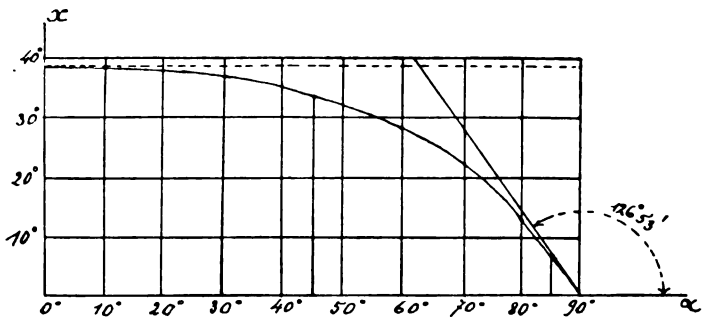


FIG. 5.

et est $x = 28° 24' 43''$. Pour $\alpha = 90°$, la tangente à la courbe fait avec l'axe des α un angle $\varphi = 104° 12'$ donné par $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b-a}{2}$.

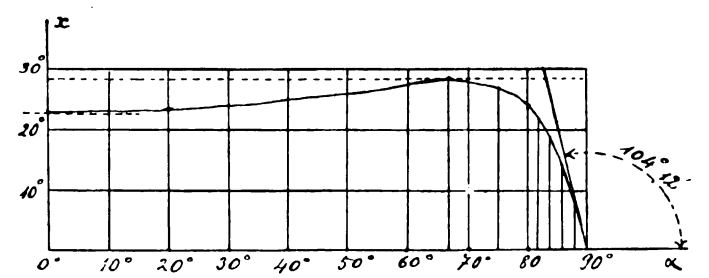


FIG. 6.

En donnant à α une suite de valeurs comprises entre 0° et 90°, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 6 (**) :

α = angle avec g'	x	α	x
0°	22° 55′	70°	28° 19′
10°	23° 5′	75°	27° 22′
20°	23° 34′	80°	24° 24′
30°	24° 22′	82°	22° 8′
40°	25° 27′	84°	18° 48′
45°	26° 5′	86°	14° 3′
50°	26° 45′	88°	7° 39′
60°	27° 59′	90°	0°
67° 14′ 11″	28° 24′ 43″		

(*) D'ailleurs la figure montre directement que $\widehat{xIS'} = \lambda + 74° 11' - 90° = 22° 55'$.

(**) Nous avons cru utile de dessiner exactement ces deux courbes parce qu'elles ne concordent pas complètement avec celles tracées par M. Michel-Lévy (*loc. cit.*, p. 351), par

Digitized by Google

Dans les exemples précédents, on a pu calculer immédiatement les quantités a, b, c; mais lorsque l'axe de zone a une position quelconque, il faut résoudre le problème suivant :

« Étant donnés les angles λ, μ, ν (ayant respectivement pour cosinus u, v, w) » que l'axe de zone fait avec » les axes d'élasticité, ainsi que » l'angle 2V des axes optiques, » calculer les quantités a, b, c » (définies p. 5 et fig. 1). »

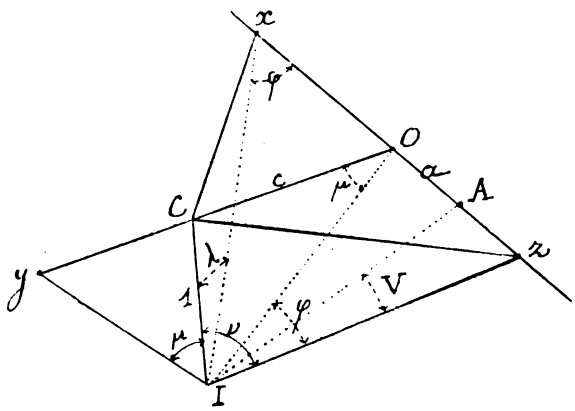


FIG. 7.

Soient (fig. 7) x, y, z les traces des axes d'élasticité sur le plan mené normalement à l'axe de zone CI à une distance 1 du centre du cristal; xz est la trace du plan des axes optiques et IA l'un de ces axes; nous prenons pour axe des z la bissectrice aiguë.

De ce que le triangle yIO est rectangle en I, on déduit $c = \cot\mu$.

Le triangle OIA donne

$$a = OI\,\mathrm{tg}\,(\varphi - V) = \frac{1}{\sin\mu}\,\mathrm{tg}\,(\varphi - V).$$

Il reste à calculer φ en fonction des données : le triangle rectangle xIz a pour côtés $Ix = \frac{1}{\cos\lambda}$ et $Iz = \frac{1}{\cos\nu}$, on en déduit $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{u}{w}$, puis, en remplaçant,

$$a = \frac{1}{\sin\mu}\cdot\frac{u - w\,\mathrm{tg}\,V}{w + u\,\mathrm{tg}\,V}.$$

un procédé graphique. Dans la figure 91, les ordonnées sont sensiblement trop petites; ainsi, pour $\alpha = 50°$, l'ordonnée est d'environ 29° au lieu de 32°; pour $\alpha = 60°$, elle est de 24° au lieu de 28°, etc.; aussi la tangente à la courbe au point extrême s'incline d'environ 45° sur l'horizontale au lieu de s'incliner de 53°. Dans la courbe relative à la zone pg^1 (fig. 92), la partie de droite comprise entre le maximum et le point extrême a aussi des ordonnées trop petites; ainsi pour $\alpha = 80°$, elle donne $x = 20°$ au lieu de 24°, etc.

Digitized by Google

Pour b, il suffit de remplacer $\varphi - V$ par $\varphi + V$. Les formules demandées sont donc :

$$(D)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sin\mu}\cdot\dfrac{u - w\,\mathrm{tg}\,V}{w + u\,\mathrm{tg}\,V} \\ b = \dfrac{1}{\sin\mu}\cdot\dfrac{u + w\,\mathrm{tg}\,V}{w - u\,\mathrm{tg}\,V} \\ c = \cot\mu. \end{cases}$$

Axinite. *Extinction dans la zone verticale.* — Lorsque l'axe de zone est orienté par rapport aux axes d'élasticité, les formules (D) donnent a, b et c; puis, par l'équation (B), on obtient les *maxima* ou *minima* et par (A) ou (C) la variation de l'angle d'extinction.

Le seul calcul qui différera d'un exemple à l'autre, c'est celui qu'il faut effectuer pour déduire λ, μ, ν des données des auteurs. Prenons comme exemple l'axinite et proposons-nous d'étudier une zone dont l'axe ne se trouve pas dans un plan principal d'élasticité, par exemple la zone verticale mt. Les données de M. Des Cloizeaux sont : V = 36° environ. Bissectrice aiguë z (fig. 8) (*) normale à i^1; plan des axes optiques x faisant un angle de 40° avec l'arête mi^1 et un angle de 24° 40′ avec l'arête pi^1.

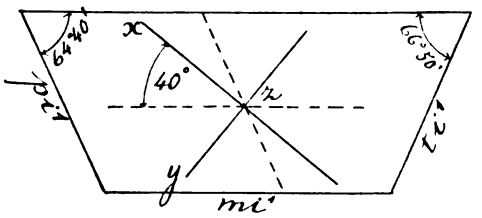


Fig. 8.

Considérons la projection stéréographique sur un plan normal à l'axe de la zone mt, et soit P (fig. 9) le pôle de cet axe. Le triangle mzt est déterminé par ses trois côtés :

$$mt = \alpha = 44°\,34'\ (**)$$
$$ti^1 = \beta = 30°\,32'$$
$$mi^1 = \gamma = 49°\,23';$$

on y calcule B = 41° 43′ 42″; z est le pôle de i^1 et Pz la projection de la bissectrice; le cercle NLN′, normal à Pz, contiendra les deux autres axes

(*) La figure 8 représente la forme ordinaire de la face i^1, limitée par p, f^1, t et m postérieure.

(**) Voir Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, t. I, pp. 515 et 516.

Digitized by Google

d'élasticité : pour avoir ces axes, comme PQ, normale au plan mz, représente l'arête mi^1, on portera $Lx = 40°$ et $xy = 90°$; Px, Py, Pz sont les angles λ, μ, ν à calculer.

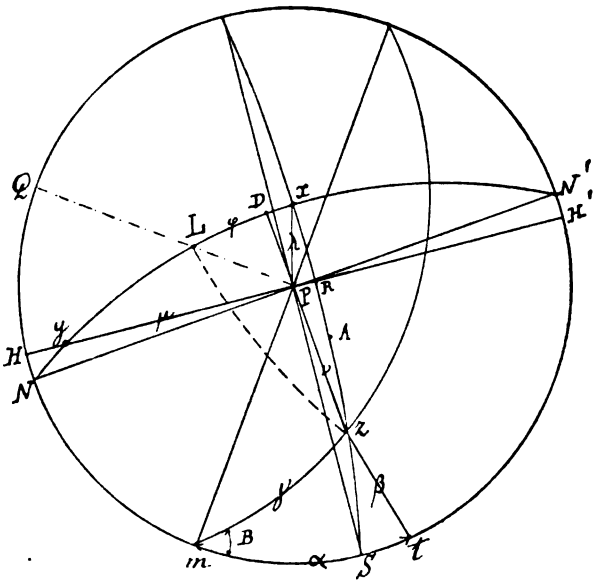


Fig. 9.

Le triangle Pzm donne

$$\cos\nu = \sin\gamma \sin B, \quad \nu = 59°\,39'\,9''.$$

Si nous désignons LD par φ, comme z est le pôle du cercle xy et L celui du cercle mz, si l'on trace l'arc de grand cercle Lz, on voit que $\widetilde{Dzm} = 90° + \varphi$; par conséquent φ peut être calculé dans le triangle Pzm; on obtient :

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos\gamma \operatorname{tg} B, \quad \varphi = 30°\,8'\,21''.$$

Le triangle Pxz, dans lequel $\widetilde{xzD} = 40° - \varphi$, donne

$$\cos\lambda = \sin\nu \cos(40° - \varphi), \quad \lambda = 31°\,45'\,49''.$$

Le triangle Pyz donne

$$\cos\mu = \sin\nu \sin(40° - \varphi), \quad \mu = 81°\,30'\,4'' \text{ (*)}.$$

Les angles β (fig. 1) sont comptés à partir du plan qui dans la zone est normal au plan des axes optiques, et il s'agit de déterminer ce plan qui sert d'origine. Son pôle est évidemment en S. Pour calculer $Sm = QH$, il suffit de calculer l'angle opposé à Ly dans le triangle LyP, dans lequel les côtés sont :

$$Ly = 50°, \quad \mu = 81°\,30'\,4'' \quad \text{et} \quad LP = 41°\,43'\,42'',$$

(*) Comme vérification, on trouve $u^2 + v^2 + w^2 = 1{,}0000005$.

Digitized by Google

cette dernière donnée étant tirée du triangle LPz, qui donne

$$\cos LP = \sin \nu \cos \varphi.$$

On trouve $Sm = 36^\circ\ 0'\ 41''$ (*).

Les formules (D) donnent

$$a = 0{,}43502, \quad b = -10{,}94204, \quad c = 0{,}149431 \ (**).$$

Le signe de b indique, comme le montre d'ailleurs la projection stéréographique, qu'un seul axe optique PA vient déboucher à la partie supérieure autour de la bissectrice aiguë. Le sens de l'extinction dans la face d'origine S, ayant pour projection HH', est visible dans l'épure; en effet, cette direction d'extinction est évidemment la droite ayant pour pôle le point R; pour l'observateur placé devant S, *la partie supérieure de la direction d'extinction* s'incline de *gauche à droite* par rapport à l'axe de zone P (***).

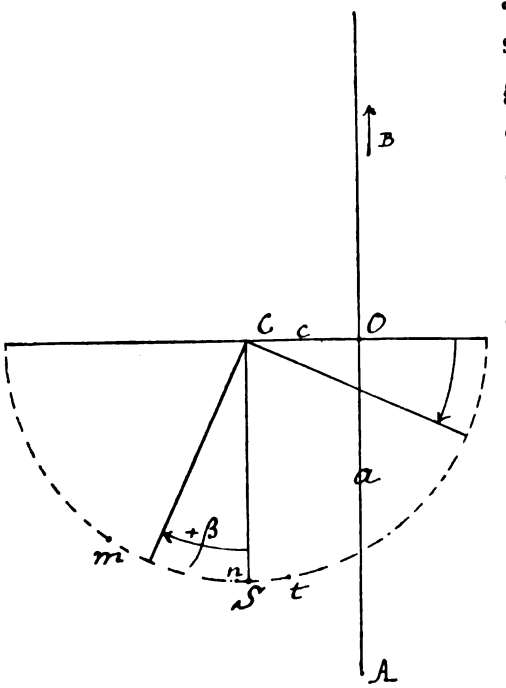


FIG. 10.

La formule (C) devient, en changeant b en $-b$,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(a-b)\sin\beta + 2c\cos\beta}{1 + (a\sin\beta + c\cos\beta)(b\sin\beta - c\cos\beta)}.$$

Pour $\beta = 0$, il vient $\operatorname{tg} x_0 = c$; c'est donc à l'angle d'extinction, compté de *gauche à droite* à partir de l'axe de zone, qu'il faut attribuer le signe +. Sur un plan normal à l'axe de zone à une distance 1 du centre, on a la disposition indiquée par la figure 10 (IV).

(*) La face S est voisine de h^1 donnée par $mh^1 = 35^\circ\ 20'$.

(**) Ces chiffres ont été obtenus en prenant pour valeur de l'angle auxiliaire, déterminé par $tg\ \omega = \frac{w}{u}$, $\omega = 30^\circ\ 43'\ 14''$.

(***) L'angle d'extinction x_0 est $PR = 90^\circ - \mu = 8^\circ\ 29'\ 56''$.

(IV) Dans cette figure, l'unité est le décimètre; le pôle B se trouve sur le prolongement de OA dans le sens indiqué par la flèche à une distance 10,94 du point O.

Digitized by Google

Conformément à la figure 1, l'angle β sera compté *positivement* à partir de CO vers la bissectrice aiguë (*), c'est-à-dire *de* S *vers* m, négativement de S vers *t*. On fera varier β de 0° à 90° et de 0° à — 90°.

Variation du signe de l'angle d'extinction. — Il est facile de voir que le dénominateur de tg $2x$ est essentiellement positif (**); le numérateur est aussi essentiellement positif pour β négatif, vu que $a - b < 0$; donc à *droite de* S *toutes les faces de la zone auront un angle d'extinction positif.* Lorsque β est positif, comme ce numérateur peut s'écrire

$$-(b-a)\cos\beta\left(\operatorname{tg}\beta - \frac{2c}{b-a}\right),$$

on voit que l'angle d'extinction devient nul pour $\operatorname{tg}\beta = \frac{2c}{b-a}$, ou $\beta = 1°\,37'\,45''$; puis, lorsque β augmente, x devient négatif; si l'on prend $Sn = 1°\,37'\,45''$, l'angle d'extinction sera positif pour les faces dont les pôles sont à gauche de *n*, positif pour celles qui ont leur pôle à droite de *n*.

L'équation (B) donnant les maxima et les minima devient, dans notre cas,

$$10{,}74164\,z^3 + 3{,}1507\,z^2 - 39{,}9757\,z + 18{,}21828 = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles, l'une comprise entre — 3 et — 2, la deuxième entre 0 et 1, la troisième entre 1 et 2; ce sont :

$$\begin{array}{llll} 2{,}265 < -z' < 2{,}266 & \text{ou} & 23°\,48'\,44'' < -\beta' < 23°\,49'\,17'' \\ 0{,}5126 < z'' < 0{,}5127 & \text{ou} & 62°\,51'\,21'' < \beta'' < 62°\,51'\,37'' \\ 1{,}4600 < z''' < 1{,}4601 & \text{ou} & 34°\,24'\,24'' < \beta''' < 34°\,24'\,30'',5. \end{array}$$

On a donc les trois solutions :

$$\left\{\begin{array}{l}\beta = -23°\,49' \\ x = 37°\,42'\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\beta = 62°\,51' \\ x = -29°\,48'\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\beta = 34°\,24' \\ x = -30°\,11'\end{array}\right.$$

(*) On peut aussi vérifier le signe de 3, en observant que la valeur de β trouvée plus bas, pour la face à angle d'extinction nul, est positive; or, à l'aide de la figure, on voit facilement que cette face doit se trouver à gauche de S.

(**) En posant tg $\beta = z$, il peut s'écrire $\cos^2\beta\,\{z^2(ab+1) + c(b-a)z + 1 - c^2\}$; or, le binôme caractéristique de la quantité entre parenthèses est $B^2 - 4AC = -20{,}06$; le trinôme du second degré garde donc constamment le signe de son premier terme pour toutes les valeurs de z.

Digitized by Google

En donnant à β une suite de valeurs, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 11 :

β	x	β	x		3	x
0°	+ 8° 29′ 56″	— 10°	+ 34° 1′ 53″	m	36° 1′	— 30° 10′ 47″
1° 37′ 45″	0°	— 20°	37° 32′ 21″	h^1	7° 2′	— 19° 17′ 55″
10°	— 23° 52′ 14″	— 23° 49′	37° 42′	h^2	0° 41′	+ 4° 56′ 13″
20°	— 29° 10′ 37″	— 30°	37° 25′ 14′	$h\frac{1}{2}$	— 4°	+ 24° 34′ 24″
30°	— 30° 7′ 55″	— 40°	36° 19′ 44″	t	— 8° 33′	+ 32° 40′ 27″
34° 24′	— 30° 11′	— 50°	34° 57′ 53″	g^1	— 41° 19′	+ 36° 9′ 23″
40°	— 30° 8′	— 60°	33° 36′ 31″	^2g	— 83° 29′	+ 31° 6′ 3″
50°	— 29° 56′ 33″	— 70°	32° 23′ 45″			
60°	— 29° 48′ 57″	— 80°	31° 23′ 38″			
62° 51′	— 29° 48′	— 90°	30° 38′ 3″			
70°	— 29° 51′ 36″					
80°	— 30° 7′ 30″					
90°	— 30° 38′ 3″					

Nous avons ajouté dans ce tableau les angles d'extinction des différentes faces cristallines connues dans la zone verticale de l'axinite; les valeurs de β se déduisent des incidences données page 515 par M. Des Cloizeaux (*).

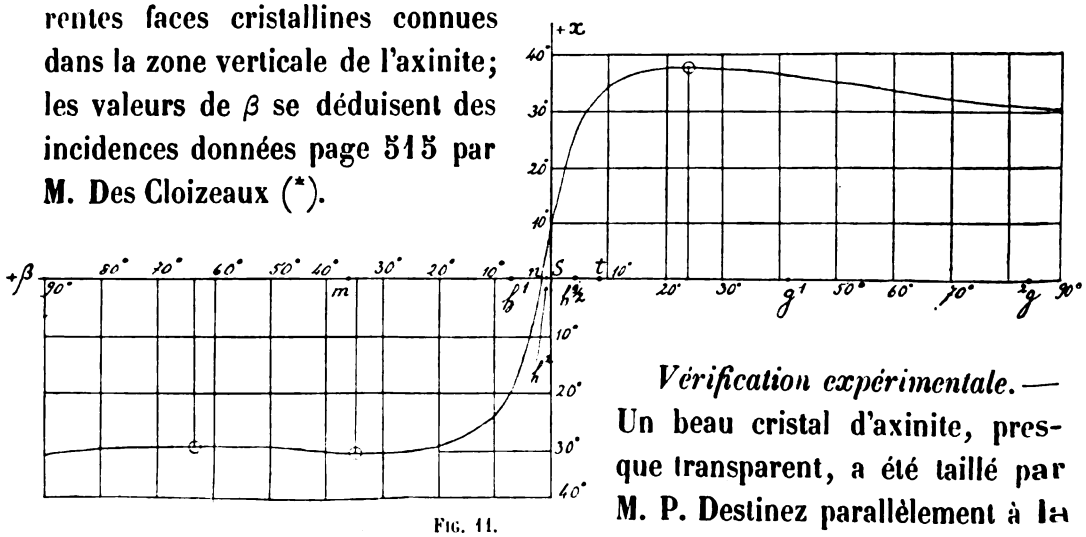


Fig. 11.

Vérification expérimentale. — Un beau cristal d'axinite, presque transparent, a été taillé par M. P. Destinez parallèlement à la face t; on a laissé subsister une facette f^1 pour servir de repère. En plaçant la lame de façon que la face t

(*) Il va sans dire que le signe de l'extinction donné dans le tableau se rapporte aux faces indiquées dans la figure 11; pour les faces opposées, l'angle changerait de signe; ainsi : pour t *postérieure*, l'angle d'extinction serait de — 32° 40′, pour ^2g *gauche*, de — 31° 6′, etc.

Digitized by Google

antérieure soit tournée vers le spectateur, on trouve effectivement (fig. 12) que l'une des directions d'extinction *tl* s'incline de gauche à droite et fait avec la verticale (arête *ml*) un angle d'environ 30° (*).

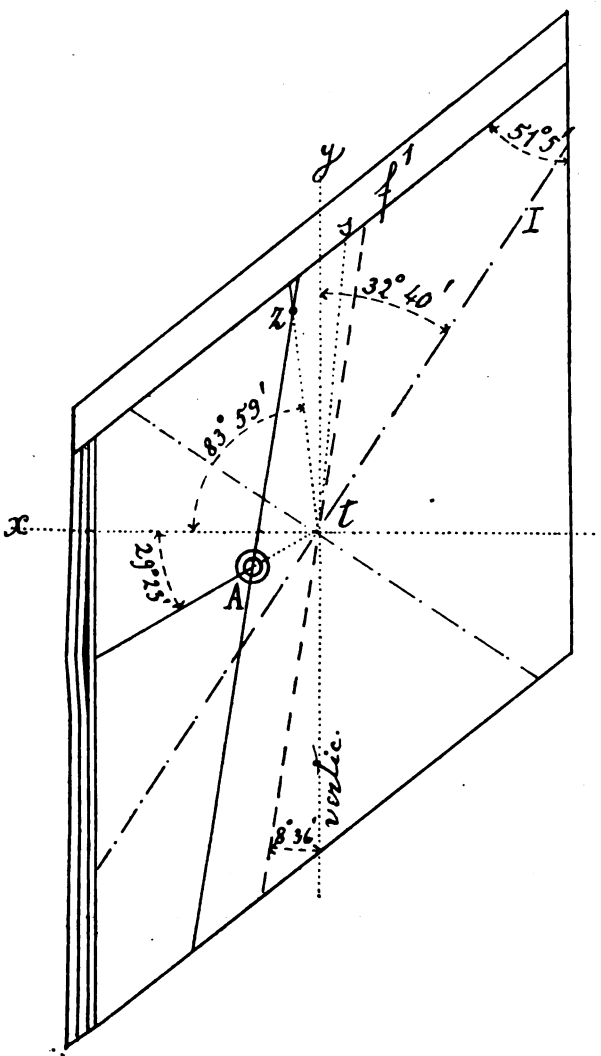


FIG. 12.

En construisant la projection stéréographique sur *t*, on peut prévoir l'apparence optique de la lame en lumière convergente. On trouve qu'un axe optique fait avec la lame un angle $tA = 10° 41'$; il doit donc être visible dans le champ du microscope; et, lorsque le cristal est placé comme dans la figure, c'est-à-dire avec son côté vertical parallèle à l'un des fils *ty* du réticule, cet axe doit percer le champ dans le quadrant gauche inférieur (**); la projection de cet axe doit faire avec l'autre fil du réticule un angle $Atx = 29° 23'$.

La bissectrice *tz* est inclinée sur la lame sous un angle de 30° 32'; le plan des axes optiques a sa trace en *Az* (***), faisant avec la

(*) L'extinction est assez indécise.

(**) Bien entendu en examinant l'image à l'œil nu, après enlèvement de l'oculaire ; avec la loupe Bertrand, l'image est renversée.

(***) *Az* est la trace du plan des axes optiques, A la trace d'un axe, sur un plan *t* situé à une distance 1 du centre du cristal, de sorte que $tA = \text{tg } 10° 41'$, $tz = \text{tg } 30° 32'$, etc. La figure est donc une projection gnomonique; l'unité choisie pour la construction de l'épure est de 5 centimètres.

Digitized by Google

verticale un angle de 8° 36′; ce plan lui-même est incliné sur le plan de la lame sous un angle de 81° 32′; la trace de l'autre axe optique se trouve à l'intersection des droites A*z*, *ts* prolongées.

Expérimentalement on trouve que l'apparence est bien celle que la théorie déduit des données de M. Des Cloizeaux : la trace des axes optiques fait bien un angle d'environ 9°, dans le sens voulu, avec l'arête *mt*; le pôle d'un axe optique se montre en A, dans le quadrant inférieur gauche; seulement l'angle A*tx* est sensiblement plus petit, la moyenne de nos mesures donnant 21° pour cet angle. Cet écart n'est pas aussi considérable qu'on pourrait le croire à première vue; il provient de ce que l'angle V est assez variable dans l'axinite; nous avons pris dans nos calculs V = 36°, mais, d'après les expériences de M. Des Cloizeaux, cet angle peut descendre jusqu'à 35° : si l'on part de $\widetilde{Atx} = 21°$, on trouve V = 34° 13′; on voit qu'une différence de moins de 2° dans la valeur de V peut amener l'angle $\widetilde{Atx}$ à varier de plus de 8°.

Observations sur le cône formé par les directions d'extinction des faces d'une même zone.

1° Si l'on suppose le plan de la figure perpendiculaire à l'axe de zone et à une distance 1 du centre, si l'on prend sur la trace d'un plan quelconque de la zone une distance égale à la tangente de l'angle d'extinction de cette face, angle donné par la formule (A), le lieu des points ainsi obtenus est la trace du cône formé par les différentes directions d'extinction. C'est une courbe du troisième degré.

Pyroxène. *Zone* h^1g^1. — Les différentes valeurs de ρ sont données par le tableau suivant, dans lequel α est l'angle que fait la section considérée avec le plan des axes optiques g^1 :

α	ρ	α	ρ	α	ρ
0°	0,802107	40°	0,694558	80°	0,222731
5°	0,800532	45°	0,66314	85°	0,115
10°	0,795789	50°	0,626224	90°	0
20°	0,776556	60°	0,53203		
30°	0,743461	70°	0,401544		

Digitized by Google

La courbe est très voisine d'une ellipse peu excentrique ayant son petit axe sur la trace du plan des axes optiques et tangente à h^1; ses demi-axes ont pour longueur : $a = 0{,}401053$, $b = 0{,}47577$ (*).

Si l'on calcule les valeurs d'extinction en supposant la courbe elliptique, on obtient la correspondance suivante :

α	x	x pour l'ellipse	α	x	x pour l'ellipse
0°	*38° 44′	38° 44′	50°	32° 3′	31° 51′
5°	38° 40′,7	38° 41′,3	60°	28° 1′	27° 7′
10°	38° 31′	38° 33′	70°	21° 53′	20° 14′
20°	37° 50′	37° 58′	80°	12° 33′	10° 57′
30°	36° 37′	36° 50′	85°	6° 34′	5° 36′
40°	34° 47′	34° 55′	90°	0°	0°
45°	*33° 33′	33° 33′			

On voit que lorsqu'on s'approche de h^1, les valeurs sont un peu faibles.

PYROXÈNE. *Zone* pg^1. — En opérant comme ci-dessus, on obtient le tableau suivant et la courbe représentée par la figure 13 :

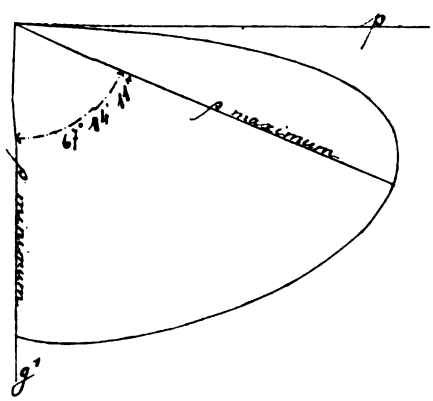


FIG. 13.

α	ρ	α	ρ	α	ρ
0°	0,41504	50°	0,50410	82°	0,40660
10°	0,42608	60°	0,53132	84°	0,34046
20°	0,43609	67°14′11″	0,54097	86°	0,25343
30°	0,45284	70°	0,53872	88°	0,13437
40°	0,47604	75°	0,51753	90°	0
45°	0,48967	80°	0,45373		

2° Si, au lieu de prendre tg x, sur la trace du plan, on prend une longueur

(*) L'équation d'une ellipse rapportée à l'un de ses sommets comme pôle, est, en appelant α l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe $2a$, $\rho = \frac{2ab^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$; on peut déterminer cette ellipse de manière qu'elle ait, outre le pôle, deux points communs avec la courbe dont il s'agit, par exemple :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \rho_1 = 2a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \rho_2 = \frac{2ab^2\sqrt{2}}{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

ρ_1 et ρ_2 étant donnés dans le tableau ci-dessus; on a deux équations, qui déterminent a et b.

Digitized by Google

égale à $\operatorname{tg} 2x$, l'équation polaire de la courbe obtenue est, d'après (C) :

$$\rho = \frac{(a+b)\sin\beta + 2c\cos\beta}{1-(a\sin\beta + c\cos\beta)(b\sin\beta + c\cos\beta)}.$$

Si l'on prend (fig. 1) pour axe des y la droite CO et pour axe des x la parallèle menée par C à la trace du plan des axes optiques, on a $x = \rho\sin\beta$ et $y = \rho\cos\beta$; par conséquent, l'équation ci-dessus devient

$$(ab-1)x^2 + (c^2-1)y^2 + c(a+b)xy + (a+b)x + 2cy = 0.$$

C'est l'équation d'une conique passant par la trace de l'axe de zone.

Comme les directions d'extinction sont les axes de l'ellipse que le plan considéré coupe dans l'ellipsoïde inverse, on arrive à la propriété géométrique suivante :

« Si, dans un ellipsoïde, on considère une suite de sections se coupant » suivant un même diamètre d de la surface, et que dans chacune d'elles » on trace la droite symétrique de d par rapport à l'un des axes de la » section, le lieu des droites ainsi obtenues est un cône ayant pour base, » dans un plan normal à d, une courbe du second degré, devenant un cercle » lorsque d est normal à l'une des sections cycliques de l'ellipsoïde. »

Observons, en outre, que les *maxima* de $\rho = \operatorname{tg} x$ (x étant une fonction de α) correspondent aux mêmes valeurs de α que ceux de $\rho = \operatorname{tg} 2x$ (*); de sorte que *la recherche des* MAXIMA *et* MINIMA *des angles d'extinction des faces d'une même zone peut se ramener au problème géométrique suivant :*

« On joint un point fixe d'une courbe du second degré à un point » quelconque de la même courbe; quels sont les *maxima* ou les *minima* » du rayon vecteur ainsi obtenu ? »

(*) Considérons les deux fonctions $\rho_1 = f(\alpha)$, $\rho_2 = \frac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$; on a : $\rho_2' = 2f'(\alpha)\frac{1+f^2(\alpha)}{[1-f^2(\alpha)]^2}$. On voit que les *maxima* de ρ_2 sont donnés, comme ceux de ρ_1, par les valeurs de α qui vérifient l'équation $f'(\alpha) = 0$.

Digitized by Google

NOTE.

Si dans l'étude d'une fonction on change le sens dans lequel on compte les y positifs, les *maxima* sont changés en *minima* et *vice versa*. Donc, lorsqu'il s'agit d'une recherche dans laquelle ces *maxima* doivent être pris en *valeur absolue*, il faut, pour distinguer entre un *maximum* et un *minimum*, considérer à la fois le signe de y'' et de y. Or, il est facile de voir que pour un *maximum en valeur absolue*, y'' et y sont de signes contraires, tandis que pour un minimum ces fonctions sont de même signe; de sorte que le *maximum* est caractérisé par $yy'' < 0$ et le *minimum* par $yy'' > 0$ (*).

Soit, comme exemple à chercher, dans le cas où l'axe de zone se trouve dans le plan des axes optiques, si la valeur de l'extinction à l'origine (c'est-à-dire dans le plan des axes) est un *maximum* ou un *minimum*.

On a obtenu :

$$\rho_0 = tgx_0 = \frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + ab - 1}{a+b}$$

$$x_0'' = -\frac{(a+b)(ab+1)}{2(1+a^2)(1+b^2)};$$

donc :

$$\rho_0 x_0'' = -\frac{ab+1}{2(1+a^2)(1+b^2)}\left\{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + ab - 1\right\}.$$

PREMIER CAS. a et b sont de même signe. On a évidemment : $\rho_0 x_0'' < 0$; donc *maximum*.

(*) En opérant de la sorte, on peut parvenir à éliminer certains facteurs qui compliquent la discussion par le grand nombre d'hypothèses possibles sur les signes des quantités qu'ils renferment. On peut aussi remplacer yy'' par $\frac{y}{y''}$.

Digitized by Google

SECOND CAS. a et b sont de signes contraires. En changeant le signe à *l'une ou à l'autre* de ces quantités, il vient :

$$\rho_0 x_0'' = \frac{ab-1}{2(1+a^2)(1+b^2)}\left\{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} - (ab+1)\right\}.$$

Il est facile de voir que la quantité entre crochets est essentiellement positive; il y a donc deux hypothèses à faire :

1° $ab > 1$; d'où $\rho_0 x_0'' > 0$; donc *minimum;*
2° $ab < 1$; d'où $\rho_0 x_0'' < 0$; donc *maximum.*

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

PAR

P. DUHEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 13 octobre 1894.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS.

INTRODUCTION.

Les tentatives destinées à mettre les diverses sortes de déformations permanentes d'accord avec les principes de la thermodynamique ont été jusqu'ici peu nombreuses. Une seule de ces tentatives nous paraît digne d'attention; c'est celle qui est due à M. Marcel Brillouin (*). Bien que les idées développées dans le présent travail ne s'accordent pas avec celles de M. Brillouin, ce sont ces dernières, nous aimons à le reconnaître, qui nous ont conduit à formuler la théorie que nous proposons. Indiquons brièvement les hypothèses fondamentales de M. Brillouin et les raisons qui nous les font rejeter.

Considérons un système dont l'état soit entièrement défini par la tempéra-

(*) MARCEL BRILLOUIN, *Déformations permanentes et thermodynamique* (COMPTES RENDUS, 6, 13, 20 et 27 février 1888).

Digitized by Google

ture absolue T et par une autre variable normale x. C'est à l'étude de tels systèmes que l'on se borne, en général, dans l'enseignement de la thermodynamique classique. Si la variable x subit une variation réelle ou virtuelle dx, tandis que la température demeure ou non constante, les actions extérieures qui agissent sur le système produisent un travail Xdx; X est ce que nous nommerons l'*action extérieure*.

On admet, en général, que, pour maintenir en équilibre le système dans un certain état, défini par un ensemble (x, T) de valeurs des variables x, T, il faut lui appliquer une action X, bien déterminée par les valeurs x, T, des variables. La condition d'équilibre du système s'exprime donc par une équation sous forme finie; c'est l'*équation d'équilibre :*

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X = f(x, T).$$

Pour rendre compte des déformations permanentes des solides élastiques et d'un certain nombre de phénomènes du même genre, M. Brillouin a proposé de regarder l'hypothèse précédente non plus comme une hypothèse générale, mais comme une hypothèse dont la légitimité est limitée à certains corps particuliers, par exemple aux corps fluides; pour les autres corps, par exemple pour les solides élastiques, il a proposé de substituer à cette hypothèse, l'hypothèse plus générale que voici :

Il existe une équation non intégrable, aux différentielles totales, entre la température T, *la variable normale* x *et l'action extérieure* X :

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad dX = a(x, X, T)\,dx + b(x, X, T)\,dT,$$

qui est vérifiée toutes les fois que le système passe d'un état d'équilibre (x, T, X) *à un état d'équilibre infiniment voisin* (x + dx, T + dT, X + dX).

M. Brillouin a développé les conséquences de cette hypothèse en lui appliquant successivement le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail et l'axiome de Clausius. Il est ainsi conduit à la conséquence suivante (*) :

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée lorsque le système passe d'un

(*) *Journal de physique*, 2e sér., t. VIII, p. 169, 1889.

Digitized by Google

état d'équilibre à un état d'équilibre infiniment voisin; il existe une certaine fonction uniforme S (x, X, T) telle que l'on ait

$$\frac{dQ}{T} + dS = 0. \tag{3}$$

Cette fonction, analogue à l'Entropie de Clausius, en diffère en ce qu'elle ne dépend pas seulement des variables x et T, mais encore de l'action extérieure X.

Or, il est aisé de voir que cette conséquence est en contradiction avec l'hypothèse de M. Marcel Brillouin. Considérons, en effet, une modification isothermique. Pour une telle modification, l'égalité (3) donne :

$$\frac{dQ}{T} = -\frac{\partial S(x, X, T)}{\partial x} dx - \frac{\partial S(x, X, T)}{\partial X} dX.$$

Si, d'autre part, nous désignons par U (x, T) l'énergie interne du système et par E l'équivalent mécanique de la chaleur, le principe de la conservation de l'énergie nous donnera :

$$E dQ = -\frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx + X dx.$$

Si nous posons

$$\mathcal{F}(x, X, T) = E\left[U(x, T) - TS(x, X, T)\right],$$

les égalités précédentes nous donneront :

$$X dx = \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X} dX. \tag{4}$$

Cette égalité (4) doit être vérifiée toutes les fois que (x, X, T) et $(x + dx, X + dX, T)$ sont deux états d'équilibre infiniment voisins correspondant à la même température.

Mais, dans ce cas, l'égalité (2) est également vérifiée. En comparant ces égalités (2) et (4), nous trouvons :

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} - a(x, X, T) \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X}\right] dx = 0.$$

Digitized by Google

Comme la quantité dx est évidemment arbitraire, on voit que l'on doit avoir l'égalité

$$X - \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} - a(x, X, T) \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X} = 0,$$

toutes les fois que (x, T, X) est un état d'équilibre du système.

On voit que la condition d'équilibre du système s'exprime par une relation en termes finis entre x, X, T, contrairement à l'hypothèse fondamentale de M. Brillouin; on peut en conclure que cette hypothèse n'est pas compatible avec les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.

Depuis l'époque où M. Brillouin imagina la théorie que nous venons de discuter, les idées des physiciens touchant les modifications permanentes ont été précisées et modifiées, grâce aux recherches poursuivies par M. Ewing(*) sur l'une des plus importantes de ces modifications, sur le *magnétisme rémanent*, ou, pour employer le langage adopté aujourd'hui, sur l'*hysteresis magnétique*.

Si l'on compare l'hypothèse faite par M. Brillouin au sujet des modifications permanentes aux résultats des recherches expérimentales de M. Ewing, on est tout de suite frappé par un caractère essentiel qui sépare ces résultats de cette hypothèse.

D'après M. Brillouin, *même dans le cas où il y a déformation permanente*, toute suite continue d'états d'équilibre du système est une modification réversible; M. Brillouin a insisté sur ce point. Au contraire, les recherches de M Ewing nous montrent des *systèmes dans lesquels une suite continue d'états d'équilibre n'est* JAMAIS *une modification réversible*. Faites croître l'intensité du champ magnétique dans lequel se trouve un morceau de fer; l'intensité d'aimantation du fer va croître suivant une certaine loi; faites décroître l'insité du champ, l'intensité d'aimantation va décroître; mais, durant cette période décroissante, l'intensité d'aimantation n'est pas liée à l'intensité du champ *par la même loi* que durant la période croissante.

(*) Les recherches de M. Ewing sont réunies dans un ouvrage intitulé : *Magnetic induction in iron and other metals* (New-York et Londres, 1891). — Voir aussi : J.-A. EWING et MISS HELEN G. KLAASSEN, *Propriétés magnétiques du fer*. (LUMIÈRE ÉLECTRIQUE, t. LII, pp. 185, 333, 384, 444.)

Digitized by Google

Cette remarque a une grande importance.

Lorsque, en effet, on reprend l'exposé classique des principes de la thermodynamique en vue de donner à cet exposé une entière rigueur, on est amené, avant d'aborder la démonstration du théorème de Carnot, à formuler l'hypothèse restrictive suivante (*) :

Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible; nous n'étudierons que les systèmes qui jouissent de cette propriété.

Cette restriction, à laquelle est subordonnée la légitimité du principe de Carnot et des nombreuses conséquences qui s'en déduisent, exclut les phénomènes d'hysteresis magnétique et une foule de déformations permanentes présentant le même caractère essentiel que l'hysteresis magnétique, à savoir : *qu'une suite continue d'états d'équilibre du système n'est pas une modification réversible.* En abordant l'étude de ces phénomènes, nous devrons nous souvenir que le *principe de l'équivalence de la chaleur et du travail est le seul principe de thermodynamique que nous soyons en droit de leur appliquer.*

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES DÉFORMATIONS PERMANENTES DANS LES SYSTÈMES QUI DÉPENDENT D'UNE SEULE VARIABLE NORMALE.

Les systèmes les plus simples que l'on puisse étudier sont ceux dont l'état est entièrement défini lorsqu'on connaît la température absolue T et une seule variable *normale* (**) x; c'est à l'étude de semblables systèmes que s'est longtemps bornée la thermodynamique classique; c'est par la théorie des déformations permanentes de ces systèmes qu'il convient de commencer notre exposé.

(*) P. DUHEM, *Commentaire aux principes de la thermodynamique.* Deuxième partie (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4e sér., t. IX, p. 305, 1893).

(**) Pour la signification de ce terme, voir P. DUHEM, *Commentaire aux principes de la thermodynamique.* Troisième partie (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4e sér., t. X, p. 214, 1894).

Digitized by Google

§ I. — *Hypothèse fondamentale.*

Considérons un système défini par deux variable x et T, *satisfaisant aux conditions qui permettent d'appliquer les propositions classiques de la thermodynamique;* ce système admet un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(x, T)$; son énergie interne, $U(x, T)$ est donnée par l'égalité

$$(5). \quad EU(x, T) = \mathcal{F}(x, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial T}.$$

Soit X l'action extérieure à laquelle ce système est soumis. La condition d'équilibre du système sera

$$(6). \quad X = \frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial x}.$$

Soient (x, T, X) et $(x+dx, T+dT, X+dX)$ deux états d'équilibre du système, infiniment voisins l'un de l'autre; nous aurons, en vertu de l'égalité (6) :

$$(7). \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x\, \partial T} dT.$$

Imaginons maintenant que nous ayons affaire à un système dont les états d'équilibre peuvent se ranger en suite continue *sans former une modification réversible.* Un pareil système a une énergie interne $U(x, T)$, mais l'existence de cette énergie interne est tout ce que nous apprend la thermodynamique au sujet de ce système. Pour aller plus loin, il nous faut faire des hypothèses; voici celle que nous ferons en premier lieu :

Il existe une fonction $\mathcal{F}(x, T)$, *que nous nommerons encore le potentiel thermodynamique interne du système, dont l'énergie interne dérive par la formule*

$$(5). \quad EU(x, T) = \mathcal{F}(x, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial T}.$$

Digitized by Google

Si (x, T, X) *et* (x + dx, T + dT, X + dX) *sont deux états d'équilibre infiniment voisins, on a*

$$(8). \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, T, X) |dx|.$$

Dans cette égalité (8), qui remplace l'égalité (7), $|dx|$ représente la valeur absolue de dx; $f(x, T, X)$ est une fonction *uniforme et continue* des trois variables x, T, X.

Cette hypothèse fondamentale met de suite en évidence le caractère essentiel révélé par les expériences de M. Ewing : *en général, une suite continue d'états d'équilibre du système n'est pas une modification réversible;* il n'y a d'exception que pour le cas où tous ces états d'équilibre correspondraient à des valeurs variables de la température T, mais à une même valeur du paramètre x.

Voyons, en particulier, ce qui arrive pour une modification isothermique.

Pour une telle modification, l'égalité (8) se réduit à

$$(8^{bis}). \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + f(x, T, X) |dx|.$$

Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires (fig. 1) OX, Ox.

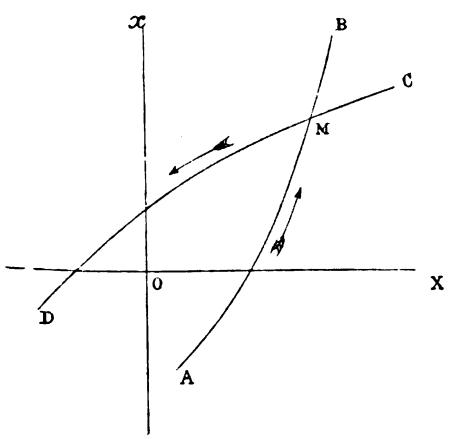


FIG. 1.

Imaginons que l'on fasse varier x par valeurs *toujours croissantes;* on aura alors

$$dx = |dx|,$$

et la relation entre x et X sera représentée par l'une des lignes AB de la famille définie par l'équation différentielle :

$$(9) \quad \frac{dX}{dx} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T, X).$$

Cette équation définit la *famille des lignes ascendantes.*

Digitized by Google

Imaginons, au contraire, que l'on fasse varier x par valeurs *toujours décroissantes;* on aura alors

$$dx = -|dx|$$

et la relation entre x et X sera représentée par l'une des lignes CD de la famille définie par l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T, X). \qquad (10)$$

Cette équation définit la *famille des lignes descendantes.*

Nous admettrons que par chaque point M *de la partie accessible du plan, il passe une et une seule ligne ascendante et une et une seule ligne descendante.*

L'expérience permettra, en général, de tracer les lignes ascendantes et les lignes descendantes; ces lignes tracées, on pourra immédiatement trouver un contrôle de l'hypothèse précédente.

Soit un point M (x, X) du plan; soient, en ce point, α le coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante et β le coefficient angulaire de la tangente à la ligne descendante; nous aurons, en vertu des égalités (9) et (10) :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, X, T),$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, X, T);$$

et, par conséquent :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}.$$

La somme $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ *doit avoir une même valeur en tous les points d'une parallèle à* Ox.

§ II. — *Cycles fermés. — Ligne des états naturels.*

La loi du déplacement de l'équilibre par variation de l'action extérieure se déduit, en général, de l'hypothèse que le système est en équilibre stable, jointe aux conséquences du principe de Carnot. Ce *dernier principe n'étant*

Digitized by Google

pas établi pour les systèmes qui nous occupent, c'est en vertu d'une *nouvelle hypothèse* que nous les supposerons soumis à la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre*, loi que nous énoncerons ainsi :

Si (x, X) *et* $(x+dx, X+dX)$ *sont deux états d'équilibre infiniment voisins relatifs à une même température* T *du système,* dx *et* dX *sont toujours de même signe :*

(11). . . . . $dX\,dx > 0.$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (8^{bis}), montre que l'on a les deux inégalités :

$$(12). \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T, X) > 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T, X) > 0. \end{cases}$$

et, par conséquent, l'inégalité :

$$(13). \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} > 0.$$

En outre, cette inégalité (11) se traduit géométriquement de la manière suivante :

Toutes les lignes ascendantes montent de gauche à droite;

Toutes les lignes descendantes descendent de droite à gauche.

Une ligne ascendante ne peut se fermer sur elle-même, non plus qu'une ligne descendante; le cycle fermé le plus simple qui se puisse concevoir, sera formé au moins d'une ligne descendante et d'une ligne ascendante, chacune d'elles rencontrant l'autre en deux points.

Nous allons démontrer qu'*aucun cycle fermé, formé de lignes d'équilibre, n'est possible si l'on n'admet pas la possibilité d'un cycle fermé simple.*

Imaginons, en effet, un cycle fermé quelconque. Il emprunte des segments à n lignes ascendantes et à p lignes descendantes. Numérotons ces lignes dans l'ordre où, en les supposant indéfiniment prolongées, on les rencontrerait en s'élevant parallèlement à Ox. Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes ascendantes et $L'_1, L'_2, \ldots, L'_p$ les p lignes descendantes.

Digitized by Google

Considérons la ligne L_1 indéfiniment prolongée; deux cas peuvent se présenter :

1° La ligne figurative du cycle a des portions au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée ;

2° La ligne figurative du cycle n'a aucune portion au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée.

PREMIER CAS. — *Certaines portions de la ligne figurative du cycle sont au-dessous de la ligne ascendante* L_1 *indéfiniment prolongée.*

Ces portions ne peuvent renfermer aucun segment de ligne ascendante; car, par hypothèse, le cycle n'emprunte aucun segment à une ligne ascendante située au-dessous de L_1.

Or, on ne peut passer d'une ligne descendante à une autre qu'en suivant un segment de ligne ascendante; les portions du cycle qui sont au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée, ne pouvant contenir aucun segment de ligne ascendante, se composent forcément de segments dont chacun est parcouru sur une ligne descendante unique. Parmi ces lignes descendantes, se trouve assurément celle des lignes descendantes empruntées par le cycle que l'on rencontre la première en s'élevant parallèlement à Ox; c'est donc la ligne L'_1.

Prenons ce segment de ligne L'_1 qui fait partie du cycle et qui est, en partie au moins, situé au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Soit $A'_1B'_1$ ce segment. Aux deux points A'_1, B'_1, la ligne L'_1 doit se rattacher à deux des segments ascendants qui font partie du cycle, une ligne descendante ne pouvant se relier directement à une autre ligne descendante. Ces deux segments ascendants ne peuvent, nous l'avons déjà remarqué, être situés au-dessous de L_1. Les deux points A'_1, B'_1, ne peuvent donc être situés au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Le segment $A'_1B'_1$, dont certaines portions sont au-dessous de la ligne L_1 et dont les deux extrémités ne peuvent être au-dessous de cette ligne, est certainement rencontré par cette ligne au moins en deux points. Les lignes L_1, L'_1, se rencontrant au moins en deux points, forment un cycle fermé simple.

Digitized by Google

SECOND CAS. — *Aucune portion de la ligne figurative du cycle n'est au-dessous de la ligne ascendante* L_1 *indéfiniment prolongée.*

La ligne L_1 porte au moins un segment faisant partie du cycle. Soit A_1B_1 un tel segment décrit dans le sens de A_1 vers B_1. Il se relie par ses deux extrémités A_1, B_1, à deux segments qui appartiennent forcément à certaines lignes descendantes L'_α, L'_β.

Si les deux indices α, β, sont égaux entre eux, les deux lignes L'_α, L'_β coïncident. Elles se confondent en une seule, L'_α, qui rencontre L_1 au moins aux deux points A_1, B_1, et qui, par conséquent, forme avec elle au moins un cycle fermé simple, en sorte que le théorème est démontré.

Considérons le cas où les deux indices α, β sont différents et, pour fixer les idées, supposons $\alpha < \beta$; la ligne L'_α, indéfiniment prolongée, est tout entière au-dessous de la ligne L'_β; le point B_1 est donc assurément au-dessous de la ligne L'_α indéfiniment prolongée.

D'autre part, les parties du segment A_1B_1, qui sont infiniment voisines du point A_1, sont situées au-dessous de la ligne L'. On s'en convaincra sans peine si l'on remarque que le segment A_1B_1 monte de gauche à droite; que le segment décrit sur la ligne L'_α et aboutissant au point A_1 descend de droite à gauche; enfin que ce dernier segment est certainement au-dessus de la ligne L_1 indéfiniment prolongée, puisque, par hypothèse, aucune partie du cycle n'est au-dessous de cette ligne.

Si donc nous suivons le segment A_1B_1, en allant de A_1 vers B_1, nous partons d'un point de la ligne L'_α, nous passons tout d'abord au-dessous de cette ligne, et nous aboutissons à un point B_1 situé au-dessus de cette ligne. Il y a, par conséquent, sur le segment A_1B_1, en dehors du point A_1, au moins un point qui appartient à la ligne L'_α indéfiniment prolongée; les deux lignes L'_α, L_1, se rencontrant au moins en deux points, forment au moins un cycle fermé simple.

On voit, par ces démonstrations, qu'aucun cycle fermé, quelque compliqué qu'on le suppose, n'est concevable si l'on n'admet la possibilité de cycles fermés simples.

Admettons, dorénavant, la possibilité de cycles fermés et, partant, de cycles fermés simples. Étudions un cycle fermé simple.

Digitized by Google

La courbe ascendante AB (fig. 2) est rencontrée en deux points M, N, par la courbe descendante CD. Supposons, pour fixer les idées, que la portion de la courbe AB qui est comprise entre les points MN, soit située à droite de la portion de la courbe CD qui est située entre les mêmes points. Considérons une ligne descendante C'D', située à droite de la courbe CD et voisine de celle-ci. Elle rencontrera la courbe AB *au moins* en deux points M'N', situés sur cette courbe, à l'intérieur de l'arc MN. Il pourrait se faire que le nombre des points d'intersection de la courbe C'D' avec la courbe AB, à l'intérieur du segment MN, soit, à partir d'un certain instant, supérieur à deux ; par exemple, dans le cas de la figure 3, il deviendrait égal à quatre. *Pour le moment, excluons cette hypothèse.* Continuons à déplacer la courbe C'D' vers la droite. Les deux points M', N', dont chacun marche dans un sens constant, tendront vers deux points limites bien déterminés, μ, ν. Ces deux points limites coïncident ; sinon, les points situés sur la ligne AB entre les deux points μ, ν, seraient des points accessibles du plan par lesquels passeraient non pas une et une seule ligne ascendante, comme nous l'avons supposé, mais soit aucune ligne descendante, soit plusieurs lignes descendantes, contrairement à l'hypothèse faite. Donc, sur le segment ascendant d'un cycle fermé simple, il existe un point où la ligne ascendante a, avec la ligne descendante, deux rencontres confondues, c'est-à-dire un point de contact P.

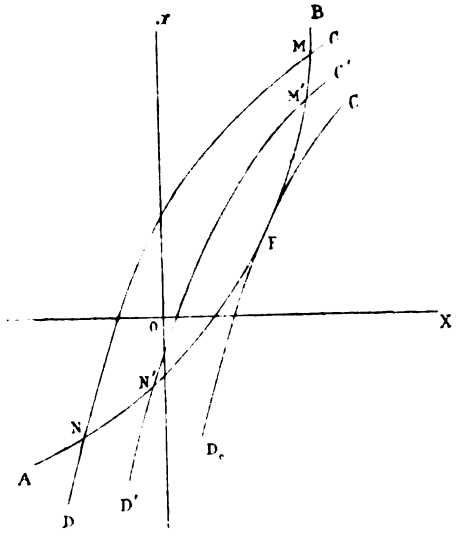


FIG. 2.

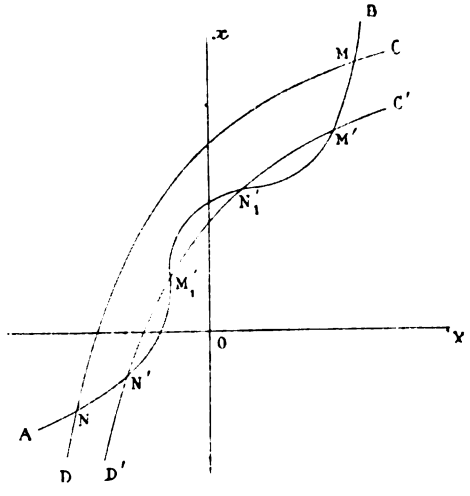


FIG. 3.

Digitized by Google

Si, au lieu de nous borner au cas simple de la figure (2), nous avions pris le cas plus compliqué de la figure (3), nous aurions trouvé sur le segment ascendant trois points où il y a contact entre la ligne ascendante et la ligne descendante.

Nous aurions montré de même, sur le segment descendant d'un cycle fermé simple, l'existence d'un ou de plusieurs points de contact entre la ligne descendante et la ligne ascendante.

Lorsqu'en un point il y aura contact entre la ligne ascendante et la ligne descendante, nous dirons que ce point représente un *état naturel du système;* nous verrons tout à l'heure la raison de cette dénomination.

Moyennant cette définition, la proposition que nous venons d'établir peut s'énoncer de la manière suivante :

Considérons un cycle fermé simple. Sur le segment ascendant, il y a au moins un état naturel du système; sur le segment descendant, il y a aussi au moins un état naturel du système.

Le théorème peut se généraliser sous la forme suivante :

Lorsqu'on parcourt un cycle fermé isothermique quelconque, on rencontre au moins deux états naturels du système.

Si un cycle fermé qui n'est pas simple est formé seulement de deux lignes, une ligne ascendante et une ligne descendante, qui se rencontrent en plus de deux points, on pourra le décomposer en plusieurs cycles simples et le théorème sera établi. Il nous suffit donc de considérer les cycles fermés composés de plus de deux lignes.

Envisageons tout d'abord un cycle formé d'une seule ligne d'une espèce (ascendante ou descendante) et de deux lignes d'une autre espèce.

Considérons, par exemple, un cycle fermé formé d'une seule ligne ascendante L et de deux lignes descendantes L', L''.

Les deux lignes L', L'' ne peuvent se rencontrer; tout segment A'L'B', que notre cycle emprunte à la ligne L', a forcément ses deux extrémités sur la ligne L. Il forme donc avec la ligne L, au moins un cycle fermé simple, et, par conséquent, il y a sur ce segment au moins un état naturel. On démontrerait de même que sur tout segment emprunté par notre cycle à la ligne descendante A''L''B'' il y a au moins un état naturel, en sorte que sur

Digitized by Google

la ligne qui figure le parcours de notre cycle il y a au moins deux états naturels.

Si, au lieu de deux lignes descendantes, le cycle en empruntait un plus grand nombre, on démontrerait sans peine qu'il y a, sur le contour de ce cycle, au moins autant d'états naturels que de lignes descendantes employées.

Considérons enfin le cas général où le cycle emprunte au moins deux lignes ascendantes et deux lignes descendantes. Soient, suivant une notation déjà employée, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes ascendantes, et $L'_1, L'_2, \ldots, L'_p$ les p lignes descendantes dont se compose le cycle; la ligne L_1 est forcément distincte de la ligne L_n; la ligne L'_1 est forcément distincte de la ligne L'_p; or, nous allons prouver qu'il y a au moins un état naturel, soit sur la ligne L_n, soit sur la ligne L'_p; le théorème que nous voulons établir sera ainsi démontré.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas. — Certaines portions de la ligne figurative du cycle sont au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Dans ce cas, nous l'avons vu, on peut former un cycle au moyen des deux lignes L_1, L'_1, et le segment descendant de ce cycle simple, lequel porte au moins un état naturel, est compris dans le segment que le cycle primitif emprunte à la ligne L'_1; ce dernier segment présente donc assurément un état naturel.

Second cas. — Aucune portion de la ligne figurative du cycle n'est au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Dans ce cas, on peut former un cycle simple dont le segment ascendant, passant forcément par un état naturel, est compris à l'intérieur du segment ascendant que le cycle primitif emprunte à la ligne L_1; ce dernier segment passe donc par un état naturel.

Ainsi, il existe assurément un état naturel soit sur la ligne L_1, soit sur la ligne L'_1; on démontrerait de même qu'il existe assurément un état naturel soit sur la ligne L'_n, soit sur la ligne L'_p.

La ligne représentative d'un cycle fermé isothermique passe donc au moins par deux états naturels; la possibilité de tracer un cycle fermé isothermique est subordonnée à l'existence des états naturels.

Digitized by Google

D'après les égalités (9) et (10), pour que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent en un point (x, X, T) soient tangentes entre elles en ce point, il faut et il suffit que l'on ait

$$f(x, T, X) = 0. \quad (14)$$

Si on laisse à la température T une valeur constante, cette équation représente une ligne qui est la *ligne des états naturels* relative à la température considérée.

Imaginons qu'à partir d'un certain état, nous fassions subir au système une modification isothermique infiniment petite. Nous aurons à chaque instant,

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + f(x, X, T)\,|dx|,$$

et, par conséquent,

$$X_1 - X_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}(x_1 - x_0) + f(x, X, T) \sum |dx|, \quad (15)$$

(x_0, T, X_0) étant l'état initial du système, et (x_1, T, X_1) l'état final.

Supposons, en particulier, que l'action extérieure X ait varié tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, au cours de la modification infiniment petite considérée, de manière à reprendre à la fin sa valeur initiale. Nous aurons alors $X_1 = X_0$ et l'égalité (15) deviendra :

$$x_1 - x_0 = \frac{f(x, X, T)}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}} \sum |dx|. \quad (16)$$

Cette égalité (16) nous montre que $(x_1 - x_0)$ n'est pas nul en général. *Lorsqu'à la fin d'une modification isothermique infiniment petite, l'action extérieure reprend sa valeur primitive, la variable normale* x *ne reprend pas sa valeur primitive ; elle éprouve une variation permanente.*

Il y a exception à cette règle dans le cas où

$$f(x, X, T) = 0.$$

Digitized by Google

Dans ce cas, l'égalité (16) devient

$$x_1 - x_0 = 0.$$

Une modification infiniment petite, accomplie au voisinage d'un état naturel, n'entraîne aucune modification permanente. Si donc on n'étudie que des modifications très petites autour d'un état naturel du système, on pourra leur appliquer les lois ordinaires de la thermodynamique; l'erreur commise dans ces conditions, sera une quantité très petite du second ordre.

Au sujet de la ligne des états naturels, nous ferons une nouvelle hypothèse; nous supposerons que *le déplacement isothermique de l'état naturel suive la même loi que le déplacement isothermique de l'équilibre.*

Imaginons que, la température T demeurant constante, l'action extérieure X varie de ∂X. Soient (x, X, T), $(x + \partial x, X + \partial X, T)$ les deux états naturels qui correspondent aux valeurs X et $(X + \partial X)$ de l'action extérieure. Nous admettrons que l'on a

$$\partial X \, \partial x > 0.$$

Cette inégalité peut encore s'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial X} > 0, \tag{17}$$

ce qui conduit à énoncer l'hypothèse précédente sous cette nouvelle forme :

La ligne des états naturels monte de gauche à droite.

En différentiant l'équation (14) de la ligne des états naturels, on trouve

$$\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} dX = 0.$$

En sorte que l'inégalité (17) peut s'écrire

$$\frac{\dfrac{\partial f(x, X, T)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X, T)}{\partial X}} < 0. \tag{18}$$

Digitized by Google

§ III. — *Extension du théorème de Clausius.*

Le théorème de Clausius consiste en ce qui suit :

Soit un cycle fermé non réversible; pendant que le corps parcourt un élément de ce cycle, il a, en tout point, la température absolue T et il dégage une quantité de chaleur dQ; l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$, étendue au cycle entier, est essentiellement positive; en particulier, si le cycle est isothermique, on a

$$\int dQ > 0. \qquad (19)$$

Cette inégalité, découlant du principe de Carnot, ne peut être appliquée aux systèmes qui nous occupent à titre de théorème démontré; mais elle peut leur être étendue à titre d'hypothèse; c'est donc une *hypothèse* que nous ferons en énonçant la proposition suivante :

Supposons que notre système décrive un cycle fermé, isothermique, formé de lignes d'équilibre; ce cycle sera forcément irréversible ; nous admettrons que l'inégalité (19) *est vérifiée pour un tel cycle.*

On peut écrire, pour tout cycle fermé et isothermique,

$$E dQ = - E \frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx + X dx.$$

D'ailleurs, pour tout cycle fermé et isothermique,

$$\int \frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx = 0.$$

L'inégalité (19) peut donc être remplacée par la suivante :

$$\int X dx > 0. \qquad (20)$$

Appliquons d'abord cette inégalité à un cycle simple, infiniment petit.

Le segment ascendant et le segment descendant d'un cycle simple sont rencontrés chacun au moins en un point par la ligne des états naturels;

Digitized by Google

d'ailleurs, si l'on prend ces segments assez petits, chacun d'eux ne pourra rencontrer plus d'une fois la ligne des états naturels; le contour d'un cycle fermé simple, infiniment petit, sera donc rencontré en deux points M_1, M_2 (fig. 4) par la ligne des états naturels.

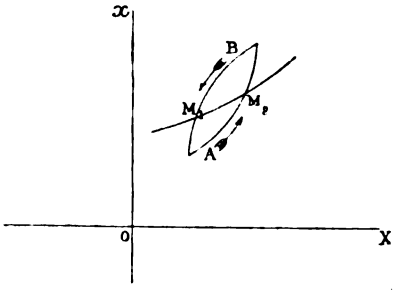


FIG. 4.

L'inégalité (20) exige qu'un observateur qui parcourt le contour du cycle ait constamment à sa *gauche* l'aire limitée par le contour.

Supposons que le sens de parcours du cycle soit le sens dans lequel on rencontre les points $M_1AM_2BM_1$.

La ligne des états naturels coupe l'aire du cycle en deux aires partielles, extérieures l'une à l'autre, dont l'une est située à droite de la ligne des états naturels et l'autre à gauche. Parcourons les contours de ces deux aires, de façon que la partie commune à chacun de ces contours et aux cycles soit décrite dans le même sens que sur le cycle. Ces contours partiels seront alors décrits dans l'ordre suivant : $M_1AM_2M_1$, $M_1M_2BM_1$. On voit sans peine que l'observateur qui décrit dans un tel sens chacun de ces contours a, à sa gauche, l'aire limitée par ce contour.

L'une de ces aires est en entier à droite de la ligne des états naturels, l'autre tout entière à gauche; prenons celle qui est tout entière à droite; supposons, pour fixer les idées, que ce soit celle qui limite le contour $M_1AM_2M_1$.

Lorsque l'observateur décrit le segment M_2M_1 sur la ligne des états naturels, il a à sa *gauche* l'aire $M_1AM_2M_1$, laquelle est à *droite* de la ligne des états naturels; or, un observateur qui monte la ligne des états naturels a à sa droite la région qui est à droite de cette ligne, et à sa gauche la région qui est à gauche de cette ligne; au contraire, un observateur qui descend la ligne des états naturels a à sa droite la région qui est à gauche de cette ligne, et à sa gauche la région qui est droite de cette ligne; donc un observateur qui décrit le segment M_2M_1 *descend* la ligne des états naturels; c'est-à-dire que l'on a

(21). . . . . $x_2 > x_1$.

Digitized by Google

Les deux points M_1, M_2 sont sur la ligne des états naturels; on a donc

$$f(x_1, X_1) = 0, \qquad f(x_2, X_2) = 0,$$

et par conséquent

$$(22). \quad \ldots \quad \int_{M_1AM_2} \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} dX \right] = 0.$$

Mais M_1AM_2 est une ligne isothermique d'équilibre; on a donc, pour tout élément de cette ligne,

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} dx + f(x, X)|dx|.$$

L'égalité (22) devient donc

$$\int_{M_1AM_2} \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| \right] = 0,$$

ou bien

$$\int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| = -\int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} \left[\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} \right] dx,$$

ou enfin

$$(23). \quad \ldots \int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| = -\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi} \left[\frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}} + \frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} \right] (x_2 - x_1),$$

(ξ, Ξ) étant un point du plan infiniment voisin des points M_1, A, M_2.

Le premier membre de l'égalité (23) est positif. En effet, par le point (x, X), menons une parallèle à l'axe OX; elle rencontre la ligne des états naturels en un point (x, X') infiniment voisin de (x, X); on a d'ailleurs

$$f(x, X') = 0$$

Digitized by Google

et, par conséquent,

$$f(x, X) = \frac{\partial f(x, X)}{\partial X}(X - X'),$$

ce qui permet d'écrire le premier membre de l'égalité (23)

$$\int_{M_1AM_2} (X - X') \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}\right]^2 |dx|.$$

Cette quantité est évidemment positive, car la ligne M_1AM_2 est tout entière à droite de la ligne des états naturels, en sorte que $(X - X')$ est positif tout le long du contour d'intégration.

Le second membre de l'égalité (23) doit être positif; or, d'après l'inégalité (21), $(x_2 - x_1)$ est positif; si l'on remarque que le point (ξ, Ξ) est infiniment voisin de la ligne des états naturels, on arrive à la conclusion suivante :

La proposition de Clausius exige que l'on ait, en tout point de la ligne des états naturels, l'inégalité

$$(24). \quad \frac{\partial f(x, X)}{\partial X}\left[\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\right] < 0.$$

Cette inégalité (24) entraine certaines conséquences qu'il importe de mettre de suite en évidence.

La fonction $f(x, X)$ est continue, par hypothèse; elle ne change donc de signe qu'en passant par 0, ce qui a lieu seulement au moment où le point (x, X) traverse la ligne des états naturels.

La ligne des états naturels partage donc le plan en deux régions; dans l'une, $f(x, X)$ est constamment positif; dans l'autre, $f(x, X)$ est constamment négatif.

Si la région où $f(x, X)$ est positif est à droite de la ligne des états naturels, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ sera positif en tous les points de cette ligne. Si la région où $f(x, X)$ est positif est à gauche de la ligne des états naturels, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ est négatif en

Digitized by Google

tous les points de cette ligne. En toutes circonstances, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ garde un signe invariable en tous les points de la ligne des états naturels. D'après l'inégalité (24), il en est de même de

$$\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2 \mathcal{F}(x)}{dx^2}.$$

Nous interpréterons tout à l'heure cette conséquence; pour le moment, nous allons en faire usage pour démontrer la réciproque de la proposition que nous venons d'établir; nous allons prouver que *si l'inégalité* (24) *est vérifiée en tout point de la ligne des états naturels, on a, pour tout cycle fermé isothermique,*

$$\int X dx > 0.$$

Considérons un cycle isothermique quelconque. La ligne qui le représente est certainement coupée, au moins en deux points, par la ligne des états naturels. Plus généralement, supposons-la coupée en n points que l'on rencontre, en parcourant le cycle, dans l'ordre suivant : M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n. Le cycle sera désigné ainsi :

$$M_1 A_1 M_2 \backslash_2 M_3 \ldots M_{n-1} A_{n-1} M_n A_n M_1.$$

Il s'agit de prouver que l'on a

$$(25). \quad \ldots \int_{M_1 A_1 M_2} X dx + \int_{M_2 A_2 M_3} X dx + \cdots + \int_{M_{n-1} A_{n-1} M_n} X dx + \int_{M_n A_n M_1} X dx > 0.$$

Soit $M_p B_p M_{p+1}$ le segment de la ligne des états naturels qui relie le point M_p au point M_{p+1}. Il est aisé de voir que l'on a identiquement

$$(26). \quad \ldots \int_{M_1 B_1 M_2} X dx + \int_{M_2 B_2 M_3} X dx + \cdots + \int_{M_{n-1} B_{n-1} M_n} X dx + \int_{M_n B_n M_1} X dx = 0,$$

car, au cours de ces intégrations, chaque élément de la ligne des états

Digitized by Google

naturels compris entre les deux points M_i extrêmes a été parcouru autant de fois dans un sens que dans l'autre. En vertu de cette égalité (26), l'inégalité à prouver (25) peut s'écrire :

$$\left(\int_{M_1A_1M_2} X\,dx - \int_{M_1B_1M_2} X\,dx\right) + \left(\int_{M_2A_2M_3} X\,dx - \int_{M_2B_2M_3} X\,dx\right) + \cdots + \left(\int_{M_nA_nM_1} X\,dx - \int_{M_nB_nM_1} X\,dx\right) > 0.$$

Nous allons, pour prouver cette inégalité, démontrer que chacun des binômes qui en forment le premier membre est séparément positif.

Considérons, par exemple, le premier.

La ligne M_1AM_2 ne rencontre la ligne des états naturels qu'en ses deux extrémités, M_1, M_2; elle est donc tout entière à gauche de la ligne des états naturels ou tout entière à droite; pour fixer les idées, supposons-la tout entière à droite.

Pour que la quantité

$$\int_{M_1A_1M_2} X\,dx - \int_{M_1B_1M_2} X\,dx$$

soit positive, il suffit qu'un observateur, qui décrit le contour $M_1A_1M_2B_1M_1$, ait constamment à sa gauche l'aire limitée par ce contour; et, pour cela, il suffit qu'il l'ait à sa gauche, lorsqu'il décrit une partie quelconque de ce contour, par exemple le segment $M_2B_1M_1$.

Pour que l'observateur, décrivant le segment $M_2B_1M_1$, ait constamment à sa gauche l'aire limitée par le contour $M_1A_1M_2B_1M_1$, laquelle est à droite de la ligne des états naturels, il faut et il suffit qu'il descende la ligne des états naturels. Si donc on désigne par (x_1, X_1), (x_2, X_2) les coordonnées des points M_1, M_2, il suffit de prouver que l'on a

(27). . . . . $x_2 > x_1$.

Or, on a

(28) . . . . . $X_2 - X_1 = \int_{M_1A_1M_2} dX = \int_{M_1B_1M_2} dX.$

Digitized by Google

La ligne $M_1A_1M_2$ étant une ligne isothermique d'équilibre, on a, tout le long de cette ligne,

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx + f(x, X)\,|dx|.$$

Le long de la ligne $M_1B_1M_2$, l'équation

$$f(x, X) = 0$$

différentiée, nous donne

$$dX = -\frac{\frac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\,dx.$$

L'identité (28) peut donc s'écrire :

$$(29). \quad \ldots \int_{M_1A_1M_2}\left[\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx + f(x, X)\,|dx|\right] + \int_{M_1B_1M_2}\frac{\frac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\,dx = 0.$$

Mais on a identiquement

$$\int_{M_1A_1M_2}\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx = \int_{M_1B_1M_2}\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx = \frac{d\mathcal{F}(x_2)}{dx_2} - \frac{d\mathcal{F}(x_1)}{dx_1}.$$

L'identité (29) peut donc s'écrire :

$$(30). \quad \ldots \int_{M_1A_1M_2} f(x, X)\,|dx| = -\int_{M_1B_1M_2}\left[\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\frac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\right]dx.$$

L'expression

$$\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\frac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}}$$

Digitized by Google

a constamment le même signe tout le long de la ligne $M_1B_1M_2$. Si donc on désigne par (ξ, Ξ) un point de cette ligne, l'égalité (30) pourra s'écrire :

$$(31). \quad \int_{M_1A_1M_2} f(x, X)\,|dx| = -\left[\frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}}\right](x_2 - x_1).$$

La ligne $M_1A_1M_2$ est tout entière à droite de la ligne des états naturels ; par conséquent $f(x, X)$ a, en tout point de cette ligne, un signe constant ; ce signe est celui que la quantité $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ prend tout le long de la ligne des états naturels ; le premier membre de l'égalité (31) a donc le signe de $\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}$. Mais, d'après l'inégalité (24),

$$\left[\frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}}\right]$$

est de signe contraire à $\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}$. L'égalité (31) exige donc que $(x_2 - x_1)$ soit positif, ce qui démontre l'inégalité (27).

§ IV. — *Sens des modifications permanentes.*

La quantité

$$(32). \quad K = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}$$

garde un signe invariable tout le long de la ligne des états naturels. Ce signe s'interprète géométriquement.

Le coefficient angulaire α de la tangente à une ligne ascendante d'équilibre sera donné par l'égalité

$$(33). \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + f(x, X).$$

Digitized by Google

Le coefficient angulaire β de la tangente à une ligne descendante d'équilibre sera donné par l'égalité

$$(33^{bis}). \quad \frac{1}{\beta} = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} - f(x, X).$$

En un point de la ligne des états naturels, la ligne ascendante est tangente à la ligne descendante et l'on a

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}.$$

D'autre part, le coefficient angulaire γ de la tangente à la ligne des états naturels est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}.$$

L'égalité (32) peut donc s'écrire :

$$K = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}.$$

On voit alors qu'il existe deux catégories de systèmes :

1° *Systèmes de la première catégorie.* — K est positif tout le long de la ligne des états naturels. La ligne des états naturels monte plus vite de gauche à droite que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent par chacun de ses points; *toute ligne ascendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de gauche à droite; toute ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de droite à gauche.*

2° *Systèmes de la deuxième catégorie.* — K est négatif tout le long de la ligne des états naturels. La ligne des états naturels monte moins vite de

Digitized by Google

gauche à droite que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent par chacun de ses points; *toute ligne ascendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de droite à gauche; toute ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de gauche à droite.*

D'après ce que nous avons vu, *pour les systèmes de la première catégorie,* $f(x, X)$ *est positif à gauche de la ligne des états naturels et négatif à droite.* Ce résultat, comparé aux égalités (33) et (33^{bis}), montre que $(\alpha - \beta)$ est négatif à gauche de la ligne des états naturels et positif à droite. *Une ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, qui coupe une ligne ascendante, la traverse de droite à gauche si la rencontre a lieu à droite de la ligne des états naturels; et de gauche à droite, si la rencontre a lieu à gauche de la ligne des états naturels.*

Pour les systèmes de la seconde catégorie, $f(x, X)$ *est négatif à gauche de la ligne des états naturels et positif à droite.* Ce résultat, comparé aux égalités (33) et (33^{bis}), montre que $(\alpha - \beta)$ est positif à gauche de la ligne des états naturels et négatif à droite. *Une ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, qui coupe une ligne ascendante, la traverse de gauche à droite si la rencontre a lieu à droite de la ligne des états naturels; et de droite à gauche, si la rencontre a lieu à gauche de la ligne des états naturels.*

Ces deux catégories de systèmes correspondent à deux types différents de cycles simples.

Lorsqu'on parcourt un cycle simple, il est un point A où l'on quitte la ligne ascendante pour suivre la ligne descendante, et un point B où l'on quitte la ligne descendante pour suivre la ligne ascendante. De tous les points du cycle, A est celui qui correspond à la plus grande valeur de x et B celui qui correspond à la plus petite. Nous dirons que A est l'*extrémité supérieure* du cycle et B l'*extrémité inférieure.*

L'observateur qui décrit le cycle doit avoir à sa gauche l'aire que limite le contour du cycle; dès lors, on voit sans peine qu'à l'extrémité supérieure, la ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne ascendante de droite à gauche, et qu'à l'extrémité inférieure elle la traverse de gauche à droite.

Digitized by Google

On obtient alors immédiatement les propositions suivantes :

Lorsqu'un système de la première catégorie décrit un cycle simple, l'extrémité supérieure A *est à droite de la ligne* N'N *des états naturels, et l'extrémité inférieure* B *est à gauche* (fig. 5).

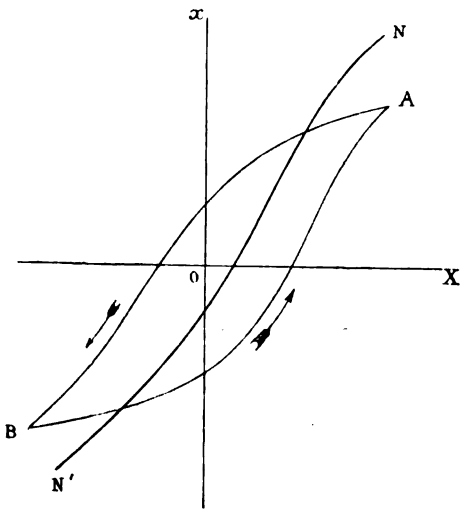


FIG. 5.

Lorsqu'un système de la seconde catégorie décrit un cycle simple, l'extrémité supérieure A *est à gauche de la ligne* N'N *des états naturels, et l'extrémité inférieure* B *est à droite* (fig. 6).

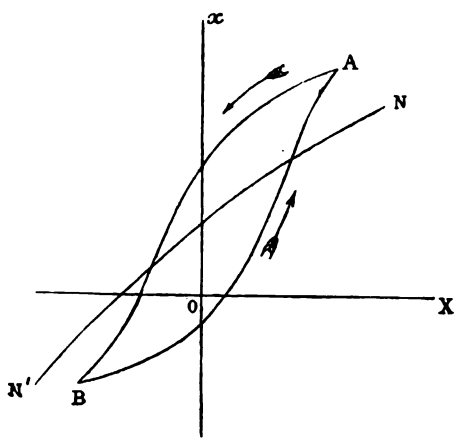


FIG. 6.

Nous allons retrouver sous diverses formes l'opposition entre les systèmes qui appartiennent à la première catégorie et les systèmes qui appartiennent à la seconde catégorie.

Mais, avant de pousser plus loin, il est nécessaire de faire une remarque :

La quantité K dépend de la température; elle peut donc être positive tout le long de toutes les lignes d'états naturels qui se rapportent à des températures inférieures à une certaine limite et négative pour les lignes qui se rapportent à des températures supérieures à cette limite; elle peut, au contraire, être négative pour les premières et positive pour les dernières; en d'autres termes, il peut exister une *température d'inversion* pour laquelle le système passe d'une catégorie à l'autre.

Dans ce qui va suivre, il nous arrivera de supposer la température variable; mais nous supposerons toujours les variations de la température renfermées dans des limites assez étroites pour qu'une température d'inver-

Digitized by Google

sion ne puisse être franchie; pour toutes les températures étudiées, le système appartiendra à la même catégorie.

Cela posé, imaginons qu'une transformation virtuelle, isothermique ou non, fasse passer le système par une suite d'états d'équilibre et supposons cette transformation soumise aux restrictions suivantes :

1° La température du système a la même valeur T_0 au début et à la fin de la transformation;

2° L'action extérieure X a la même valeur X_0 au commencement et à la fin de la transformation;

3° Les états par lesquels passe le système, sauf peut-être l'état initial et l'état final, ne sont certainement pas des états naturels.

La variable normale x aura, en général, à la fin de la transformation, une valeur x_1 différente de sa valeur initiale x_0. La différence $(x_1 - x_0)$ est la *modification permanente* éprouvée par le système. Nous allons chercher le signe de cette modification permanente.

Pour chaque élément de la transformation subie par le système, nous pouvons écrire :

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T)\,|dx|.$$

Intégrons les deux membres de cette égalité pour la transformation tout entière, en remarquant que

$$\int dX = 0,$$

$$\int \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT\right] = \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0},$$

et nous aurons

$$(34). \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0} = -\int f(x, X, T)\,|dx|.$$

D'après notre troisième restriction, $f(x, X, T)$ ne peut changer de signe

Digitized by Google

le long de la ligne de transformation ; d'après l'inégalité

$$(13). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} > 0,$$

le premier membre de l'égalité (34) a le signe $(x_1 - x_0)$. L'égalité (34) nous permet donc d'énoncer le théorème suivant :

Le signe de la modification permanente $(x_1 - x_0)$ *est contraire au signe invariable de la quantité* $f(x, X, T)$ *le long de la transformation considérée.*

Ce théorème conduit à des conséquences opposées selon qu'on l'applique aux systèmes de la première catégorie ou aux systèmes de la seconde catégorie.

Portons les trois variables X, T, x, sur trois axes de coordonnées rectangulaires orientés (fig. 7), comme le sont habituellement en géométrie analytique, les axes Ox, Oy, Oz. L'équation

$$f(x, X, T) = 0$$

représentera, par rapport à ces axes, une certaine surface que nous nommerons *surface des états naturels* ; les sections de cette surface par des plans normaux à OT sont les lignes des états naturels relatives aux diverses températures.

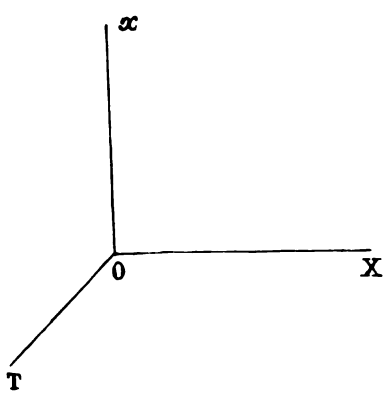


FIG. 7.

Systèmes de la première catégorie. — On voit sans peine que, pour ces systèmes, $f(x, X, T)$ est positif au-dessus de la surface des états naturels et négatif au-dessous de cette surface. Le théorème précédent fournit alors cette proposition :

Une transformation accomplie en entier au-dessus de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle Ox, entraîne une modification permanente négative ; une transformation accomplie en entier au-dessous de la surface des états naturels et dont les deux points extrêmes sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modifica-

Digitized by Google

tion permanente positive; d'une manière générale, *le système éprouve une modification permanente qui rapproche le point figuratif de la surface des états naturels.*

Systèmes de la deuxième catégorie. — Pour ces systèmes, $f(x, X, T)$ est négatif au-dessus de la surface des états naturels et positif au-dessous de cette surface. Le théorème précédent fournit alors l'énoncé que voici :

Une transformation accomplie en entier au-dessus de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modification permanente positive; une transformation accomplie en entier au-dessous de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modification permanente négative; dans les deux cas, *le système éprouve une modification permanente qui éloigne le point figuratif de la surface des états naturels.*

Considérons, en particulier, pour un système de la seconde catégorie, une transformation isothermique dont l'état initial soit un état naturel; supposons qu'à la fin de la transformation l'action extérieure reprenne sa valeur initiale; supposons enfin que la transformation ne traverse pas la ligne des états naturels. $f(x, X, T)$, nul au début de la transformation, gardera pendant toute la durée de la transformation le signe pris au bout du premier élément (dx, dX) de cette transformation. Or, au bout de ce premier élément, on a

$$(35) \quad \ldots \ldots \quad f(x, X, T) = \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} dx + \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0} dX.$$

D'ailleurs, le point (x_0, X_0) étant un état naturel, on a

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} dx.$$

L'égalité (35) peut donc s'écrire :

$$(36) \quad \ldots \ldots \quad f(x, X, T) = \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} \left[\frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0}} \right] dx.$$

Digitized by Google

Mais, pour les systèmes de la seconde catégorie, on a

$$\frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} > 0,$$

$$\frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0}} < 0.$$

L'égalité (36) nous apprend alors que $f(x, X, T)$ a, tout le long de la transformation, un signe contraire à celui que prend dx durant le premier élément de la transformation. Donc, *lorsqu'un système de la seconde catégorie éprouve, à partir d'un état naturel, une transformation isothermique qui ne traverse pas la ligne des états naturels et qui ramène l'action extérieure à sa valeur initiale, le système éprouve une modification permanente de même sens que la modification éprouvée durant le premier élément de la transformation.*

Les systèmes de la première catégorie ne peuvent donner lieu à une proposition analogue; si, partant d'un état naturel, on cherche une transformation isothermique qui ramène l'action extérieure à sa valeur initiale, on sera amené à traverser la ligne des états naturels.

§ V. — *Stabilité ou instabilité des états naturels.*

Le sens des modifications permanentes oppose l'une à l'autre les deux catégories de systèmes que nous avons eu à distinguer; cette opposition se marque encore dans les théorèmes que nous allons démontrer et qui ne sont qu'un autre aspect des théorèmes précédents.

Imaginons que l'action extérieure à laquelle un système est soumis oscille de très petites quantités autour d'une valeur fixe X_0, tandis que la température à laquelle il est porté subit de petites variations autour d'une température fixe T_0; supposons ces variations assez lentes pour que le système soit

Digitized by Google

constamment en équilibre. Pour chaque élément de la transformation, nous aurons

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T) |dx|.$$

Intégrons les deux membres de cette équation; supposons le nombre des oscillations très grand, de telle sorte de $\int |dx|$ ait une valeur finie, et négligeons les quantités infiniment petites, nous aurons

$$(37). \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0} + \int f(x, X_0, T_0) |dx| = 0,$$

x_0 étant la valeur initiale de x, et x_1 sa valeur finale.

Discutons les conséquences que cette égalité entraîne pour chacune des deux catégories de systèmes.

Systèmes de la première catégorie. — Supposons tout d'abord que l'état initial ne soit pas un état naturel; si la transformation considérée doit atteindre la surface des états naturels, nous ne considérerons qu'une partie de cette transformation, partie antérieure à cette rencontre; moyennant cette convention, $f(x, X_0, T_0)$ aura, tout le long de la ligne de transformation, un signe constant; ce sera le signe + si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessus de la ligne des états naturels, et le signe — si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessous de la ligne des états naturels. Si l'on remarque que $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}$ est constamment positif, l'égalité (37) montre que $(x_1 - x_1)$ est négatif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, et positif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Prenons un système de la première catégorie dans un état (x_0, X_0, T_0) *qui ne soit pas un état naturel; faisons osciller l'action extérieure de petites quantités autour de la valeur* X_0 *et la température de petites quantités au voisinage de la valeur* T_0; *au bout d'un grand nombre d'oscillations, l'état du système se sera rapproché de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *qui correspond à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

Supposons, pour fixer les idées, x_0 inférieur à ξ. On ne pourra fixer à x_1

Digitized by Google

aucune limite inférieure à ξ. Supposons, en effet, que x_1 ne puisse surpasser une certaine quantité χ, elle-même inférieure à ξ. La différence

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right]$$

ne pourrait pas surpasser

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\chi, T_0)}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right],$$

quantité finie; d'autre part, si nous désignons par φ la limite inférieure, certainement différente de 0, des valeurs prises par $|f(x, X_0, T_0)|$ lorsque x varie de x_0 à χ, la quantité $\int f(x, X_0, T_0)\,|dx|$ serait une quantité négative dont la valeur absolue ne pourrait être inférieure à $\varphi \int |dx|$; or, en faisant croître indéfiniment le nombre des oscillations, on peut amener cette quantité à surpasser n'importe quelle limite; il arriverait donc forcément un moment où l'égalité (37) ne serait plus vérifiée; x_1 ne peut donc admettre d'autre limite supérieure que la quantité ξ et nous pouvons compléter l'énoncé précédent de la manière suivante :

Lorsque le nombre des oscillations auxquelles le système est soumis croît indéfiniment, l'état (x_1, X_0, T_0) *du système tend vers l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *relatif à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

Imaginons maintenant que le système soit pris dans un état initial (x_0, X_0, T_0) infiniment voisin de l'état naturel (ξ, X_0, T_0). Supposons que l'action extérieure X et la température T éprouvent une infinité d'oscillations infiniment petites et voyons si la variable x pourra s'éloigner de ξ d'une quantité finie. Cela est évidemment impossible, car, aussitôt que x serait éloigné de ξ d'une quantité finie, on pourrait reprendre le raisonnement précédent et démontrer que x ne peut que s'approcher de ξ. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Si un système de la première catégorie est pris dans un état naturel (ξ, X_0, T_0) *et si l'action extérieure* X *et la température* T *oscillent de très petites quantités autour des valeurs* X_0, T_0, *la variable normale* x *oscille de très petites quantités au voisinage de la valeur* ξ.

Digitized by Google

Ces divers théorèmes peuvent se condenser en cet énoncé :

L'état naturel (ξ, X_0, T_0) *est l'état d'équilibre* DÉFINITIF *d'un système de la première catégorie soumis à une action extérieure* SENSIBLEMENT *constante et égale à* X_0 *et porté à une température* SENSIBLEMENT *constante et égale à* T_0.

Systèmes de la seconde catégorie. — Supposons, tout d'abord, que l'état initial ne soit pas un état naturel ; nous pourrons toujours limiter la transformation avant que la ligne des états naturels soit atteinte ; moyennant cette convention, tout le long de la ligne de transformation, $f(x, X_0, T_0)$ aura un signe constant ; ce sera le signe —, si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessus de la ligne des états naturels, et le signe +, si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessous de cette ligne. Comme $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x,T)}{\partial x^2}$ est constamment positif, l'égalité (37) montre que $(x_1 - x_0)$ est positif si le point x_0 est au-dessus de la ligne des états naturels, et négatif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Prenons un système de la deuxième catégorie dans un état (x_0, X_0, T_0) *qui ne soit pas un état naturel ; faisons osciller l'action extérieure au voisinage de la valeur* X_0 *et la température au voisinage de la valeur* T_0 ; *au bout d'un grand nombre d'oscillations, l'état du système se sera éloigné de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *qui correspond à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

La valeur finale x_1 de la variable x s'éloignera indéfiniment de la valeur ξ, comme nous allons le voir. Supposons, pour fixer les idées, x_0 supérieur à ξ. Il est impossible de fixer, dans le champ des valeurs accessibles de x, une limite supérieure χ à x_1. En effet, la différence

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right]$$

ne pourrait pas dépasser

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\chi, T_0)}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right];$$

d'autre part, si nous désignons par φ la limite inférieure, certainement différente de 0, des valeurs prises par la quantité $|f(x, X_0, T_0)|$ lorsque x varie

Digitized by Google

de x_0 à χ, la quantité $\int f(x, X_0, T_0)$ serait une quantité négative dont la valeur absolue ne pourrait être inférieure à $\varphi \int |dx|$; or, en faisant croître le nombre des oscillations, on peut amener cette dernière quantité à surpasser n'importe quelle limite; on pourrait donc rendre le nombre des oscillations assez grand pour que l'égalité (37) cesse d'être vérifiée; x_1 ne peut donc admettre, dans le champ des valeurs accessibles de x, aucune limite supérieure; à l'énoncé précédent, nous pouvons adjoindre la proposition suivante :

Lorsque le nombre des oscillations auxquelles le système est soumis croît indéfiniment, l'état (x, X_0, T_0) *du système s'éloigne de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *et s'en éloigne jusqu'aux confins des valeurs accessibles de* x.

Supposons maintenant que l'état initial soit un état naturel; si l'on fait varier d'une petite quantité l'action extérieure et la température, le système s'écartera dans un certain sens de l'état naturel; cette transformation produite, les oscillations infiniment petites de l'action extérieure et de la température écarteront indéfiniment le système de l'état naturel.

En résumé, *un système de la seconde catégorie, soumis à une action extérieure* SENSIBLEMENT *constante et à une température* SENSIBLEMENT *constante, se transforme indéfiniment.*

L'opposition entre les deux catégories de systèmes se marquera encore dans les théorèmes, corrélatifs des précédents, que nous allons maintenant établir.

Prenons l'égalité fondamentale

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T) |dx|,$$

qui, intégrée pour une transformation d'étendue finie, donne :

$$X_1 - X_0 = \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T)}{\partial x_0} + \int f(x, X, T) |dx|.$$

Appliquons cette égalité à la transformation suivante :

La température éprouvant de petites oscillations au voisinage de la valeur T_0, *on fait sans cesse varier l'action extérieure* X *de manière à corriger les variations de* x *et à garder à cette variable une valeur infiniment voisine de* x_0.

Digitized by Google

En cherchant la dérivée seconde et en y remplaçant α par les valeurs obtenues ci-dessus, on obtient :

$$x_1'' = -\frac{(a+b)(ab+1)}{2(1+a^2)(1+b^2)}, \qquad x_2'' = \frac{(a+b)(ab+1)\sqrt{-ab}}{(a-b)^2}.$$

Prenons pour plan du tableau le plan des axes optiques IL, IL′ (fig. 2); donnons à l'axe de zone toutes les positions possibles depuis Iz jusqu'à Ix. Traçons IQ perpendiculaire à IL′ (*). Trois cas peuvent se présenter : l'axe de zone est dans l'angle zIL, dans l'angle LIQ ou dans l'angle QIx.

a) *L'axe de zone* IS_2 *se trouve dans l'angle* LIQ. La trace du plan des axes optiques sur un plan normal à IS_2 et distant du centre d'une longueur 1, est $O_2A_2B_2$. On voit que a et b sont de même signe et que par conséquent $\sqrt{-ab}$ et α_2 sont imaginaires. En outre, comme $x_1'' < 0$, pour $\alpha_1 = 0$, on a un *maximum;* enfin pour $\alpha = 90°$, on a $x = 0$. Il suit de ce qui précède que dans le cas considéré l'angle d'extinction part d'un maximum dans le plan des axes optiques, décroît au fur et à mesure que le plan de la zone s'éloigne du plan des axes optiques et devient nul lorsque le plan mobile devient normal au plan des axes (**).

b) *L'axe de zone* IS_1 *se trouve dans l'angle aigu des axes optiques.* Dans ce cas, a et b sont de signes contraires, et par conséquent $\sqrt{-ab}$ est réel; mais, comme l'angle B_1IA_1 est aigu, on a en valeur absolue $ab < 1$ et, par conséquent, la valeur de $\cos\alpha_2$ est encore imaginaire. La valeur de x_1'', dans laquelle on change a en $-a$, montre qu'il y a encore *maximum* (***)

(*) IQ est la trace sur le tableau de l'une des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse.

(**) La dérivée de x par rapport à α est :

$$x' = -\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\,(ab\cos^2\alpha+1)}{(1+a^2\cos^2\alpha)(1+b^2\cos^2\alpha)}.$$

Il suit de là qu'au point $\alpha = 90°$ la tangente à la courbe $x = f(\alpha)$ fait avec l'axe des α un angle donné par $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a+b}{2}$.

(***) Voir la *Note* placée à la fin.

Digitized by Google

pour $\alpha = 0$, de sorte que la courbe est analogue à celle obtenue dans le cas a).

c) *L'axe de zone* IS_3 *se trouve dans l'angle* Olx. Dans ce cas, a et b sont encore de signes contraires; mais, en outre, comme l'angle A_3IB_3 est obtus, on a, en valeur absolue, $ab > 1$; α_2 devient donc réel et, comme $x''_2 < 0$, α_2 correspond à un *maximum*. Pour $\alpha_1 = 0$, x''_1 devient positif et l'on obtient un *minimum* (*).

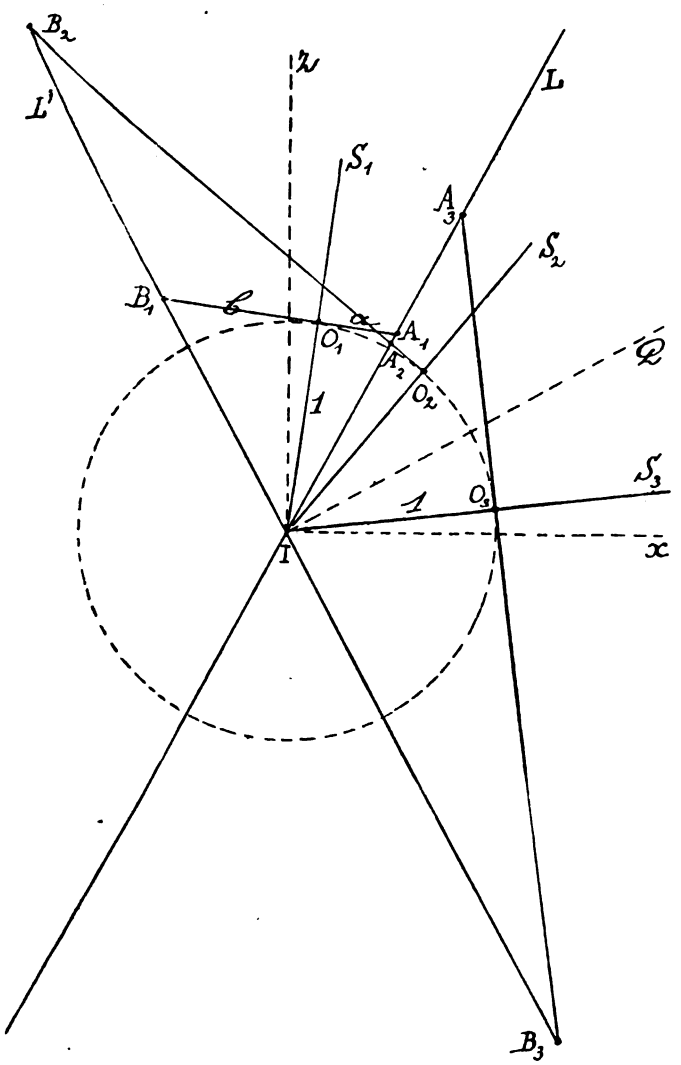


FIG. 2.

Observons que dans le cas examiné en dernier lieu, l'axe de zone se trouve dans l'angle aigu fait par les sections cycliques de l'ellipsoïde inverse.

La discussion précédente peut être résumée dans l'énoncé suivant :

« Lorsque l'axe de zone » est situé dans le plan » des axes optiques, l'an- » gle d'extinction des dif- » férentes faces de la zone » n'est en général suscep- » tible que d'un maxi- » mum, qui est obtenu lorsque le plan considéré coïncide avec le plan » des axes optiques; à partir de ce maximum, l'angle décroit jusqu'à

(*) Voir la *Note* placée à la fin.

Digitized by Google

» zéro, valeur qu'il atteint lorsque le plan devient normal au plan des » axes optiques. Seulement, si l'axe de zone est compris dans l'angle aigu » fait par les sections cycliques de l'ellipsoïde inverse, il y a minimum au » point de départ, dans le plan des axes optiques, puis l'angle d'extinction » augmente jusqu'à un maximum, atteint au moment où le plan fait avec le » plan des axes un angle donné par $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{-ab}}$, puis décroît jusqu'à zéro, » valeur qu'il atteint lorsque le plan devient normal au plan des axes » optiques. »

Second cas. — *L'axe de zone se trouve dans un des deux plans principaux d'élasticité, qui ne contiennent pas les axes optiques.*

Soient IV l'axe de zone (fig. 3) situé dans le plan des xy; AI, LI, les axes

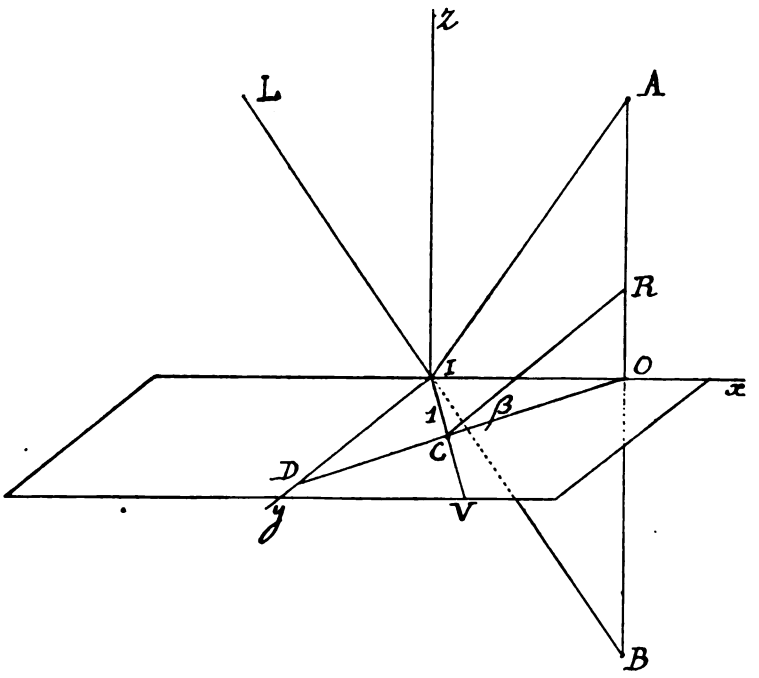


Fig. 3.

optiques; AOD, le plan normal à l'axe de zone, à une distance 1 du centre du cristal; A et B, les traces des axes optiques sur ce plan; ICR, un plan quelconque de la zone. Le plan de la zone normal au plan des axes optiques

Digitized by Google

est xy. En se reportant à la figure 1, on voit que $CO = c$, $AO = a$, $OB = -b$; le cas que nous examinons est donc caractérisé par $b = -a$.

L'équation (B) devient :

$$(2a^2 + c^2 + 1)x^2 + a^2 + 1 = 0;$$

ses racines sont imaginaires; mais comme $z = \cot\beta$ peût devenir infini, il faut vérifier directement si $\beta = 0$ annule x'.

L'équation (C)

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2c\cos\beta}{1 + a^2\sin^2\beta - c^2\cos^2\beta}$$

donne

$$x' = -c\sin\beta\,\frac{a^2 + 1 + (a^2 + c^2)\cos^2\beta}{(1 + a^2\sin^2\beta - c^2\cos^2\beta)^2 + 4c^2\cos^2\beta};$$

on voit que pour $\beta = 0$, $x' = 0$ et, comme x' est constamment négatif pour $\beta > 0$, il y aura un *maximum* de l'angle d'extinction dans le plan des xy, puis cet angle décroît jusqu'à zéro, valeur qu'il atteint lorsque le plan de la zone devient normal au plan des xy (*).

On voit donc que la variation de l'angle d'extinction est la même que dans les cas a) et b) examinés précédemment.

On peut résumer tous les cas examinés ci-dessus dans l'énoncé général qui suit :

« *Lorsque l'axe d'une zone se trouve dans un plan d'élasticité principal,* » *l'angle d'extinction de ses différentes faces passe par un* MAXIMUM *dans ce* » *plan et décroît jusqu'à zéro lorsqu'en partant de celui-ci on s'avance dans* » *la zone vers le plan qui lui est perpendiculaire.*

» *Il n'y a d'exception à cette règle que dans le cas où l'axe de zone,* » *situé dans le plan normal à l'axe moyen, se trouve compris dans l'angle* » *aigu des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse. Dans ce cas il y a* » MINIMUM *dans le plan d'élasticité, puis, avant de décroître jusqu'à zéro,* » *comme dans le cas précédent, l'angle d'extinction augmente d'abord* » *jusqu'à un* MAXIMUM. »

(*) En ce point, la tangente à la courbe fait avec l'axe des β un angle donné par $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{c}{a^2+1}$.

Digitized by Google

APPLICATIONS.

PYROXÈNE.

1. *Zone verticale* $h^1_{100}g^1_{010}$. — Le plan des axes optiques est g^1. Nous adoptons les données de M. Michel-Lévy (*).

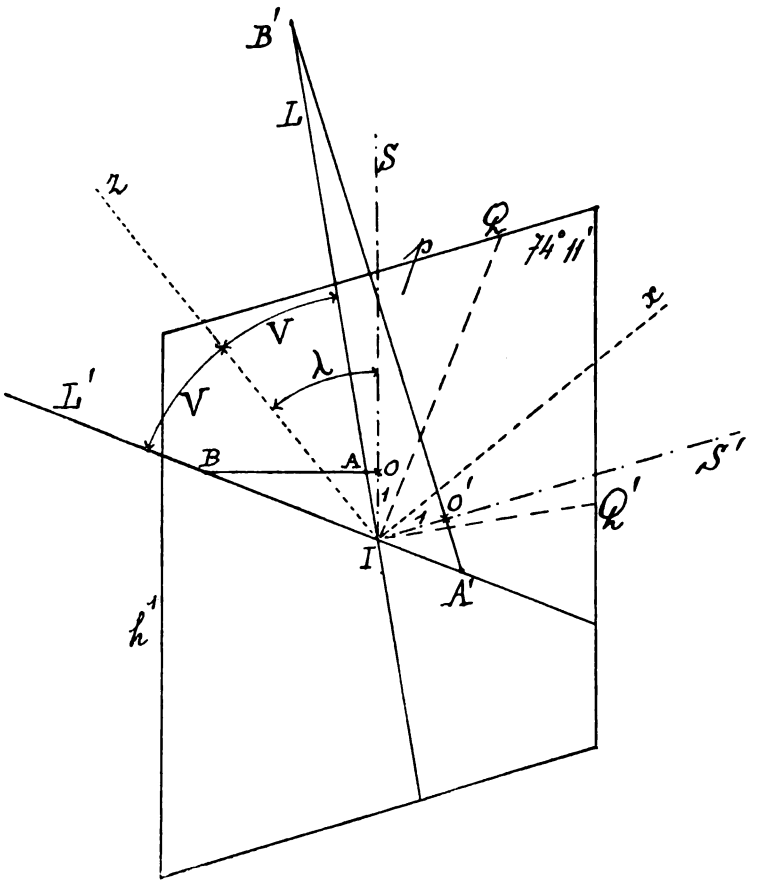


FIG. 4.

La bissectrice lz fait avec la verticale (fig. 4) un angle $\lambda = 38° 44'$; l'angle des axes optiques est $2V = 58° 59'$; en outre, $ph^1 = 74° 11'$.

(*) *Minéralogie micrographique*, par FOUQUÉ et MICHEL-LÉVY, p. 350.

Digitized by Google

L'axe de zone IS se trouve dans le cas a); les quantités a et b sont positives et l'on a :

$$OA = a = \operatorname{tg}(\lambda - V) = 0{,}16271105,$$
$$OB = b = \operatorname{tg}(\lambda + V) = 2{,}50334566.$$

L'angle d'extinction x est donné par la formule

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(a + b)\cos\alpha}{1 - ab\cos^2\alpha}.$$

En donnant à α une suite de valeurs depuis 0° jusqu'à 90°, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 5.

α = angle avec g^1	x	α	x
0°	38° 44′	50°	32° 3′
5°	38° 41′	60°	28° 1′
10°	38° 31′	70°	21° 53′
20°	37° 50′	80°	12° 33′
30°	36° 38′	85°	6° 34′
40°	34° 47′	90°	0°
45°	33° 33′		

2. *Zone* $p_{001}g^1_{010}$. — L'axe de zone IS′ (fig. 4), toujours situé dans le plan des axes optiques, se trouve dans l'angle aigu QIQ′ des sections cycliques de l'ellipsoïde inverse; nous sommes donc dans le cas c) et il y aura un *minimum* dans le plan des axes, puis un *maximum* entre 0° et 90°.

En changeant a en $-a$, il vient :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(b - a)\cos\alpha}{1 + ab\cos^2\alpha};$$
$$a = \operatorname{tg} O'IA' = \operatorname{tg} 37° 35' 30'' = 0{,}769872\ (*),$$
$$b = \operatorname{tg} O'IB' = \operatorname{tg} 83° 25' 30'' = 8{,}675902.$$

(*) On a : $\widetilde{S'IL'} = 74° 11' + \lambda + V = 142° 24' 30''$ et, par conséquent, $S'IA' = 37° 35' 30''$; $B'IS' = 74° 11' + \lambda - V = 83° 25' 30''$.

Digitized by Google

Dans le plan des axes optiques, on a : $\alpha = 0$ et x minimum $= 22° 55'$ (*). Le maximum, déterminé par $\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}}$, correspond à $\alpha_2 = 67° 14' 11''$

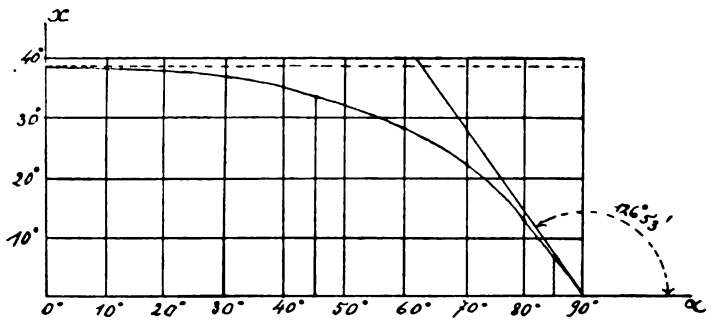


FIG. 5.

et est $x = 28° 24' 43''$. Pour $\alpha = 90°$, la tangente à la courbe fait avec l'axe des α un angle $\varphi = 104° 12'$ donné par $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b-a}{2}$.

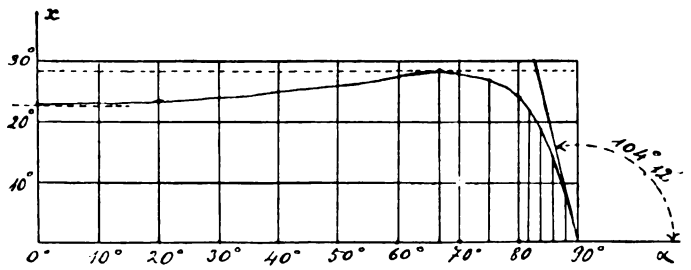


FIG. 6.

En donnant à α une suite de valeurs comprises entre 0° et 90°, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 6 (**) :

α = angle avec g'	x	α	x
0°	22° 55′	70°	28° 19′
10°	23° 5′	75°	27° 22′
20°	23° 34′	80°	24° 24′
30°	24° 22′	82°	22° 8′
40°	25° 27′	84°	18° 48′
45°	26° 5′	86°	14° 3′
50°	26° 45′	88°	7° 39′
60°	27° 59′	90°	0°
67° 14′ 11″	28° 24′ 43″		

(*) D'ailleurs la figure montre directement que $\widehat{xIS'} = \lambda + 74° 11' - 90° = 22° 55'$.

(**) Nous avons cru utile de dessiner exactement ces deux courbes parce qu'elles ne concordent pas complètement avec celles tracées par M. Michel-Lévy (*loc. cit.*, p. 351), par

Digitized by Google

Dans les exemples précédents, on a pu calculer immédiatement les quantités a, b, c; mais lorsque l'axe de zone a une position quelconque, il faut résoudre le problème suivant :

« Étant donnés les angles λ, μ, ν (ayant respectivement pour cosinus u, v, w) » que l'axe de zone fait avec » les axes d'élasticité, ainsi que » l'angle 2V des axes optiques, » calculer les quantités a, b, c » (définies p. 5 et fig. 1). »

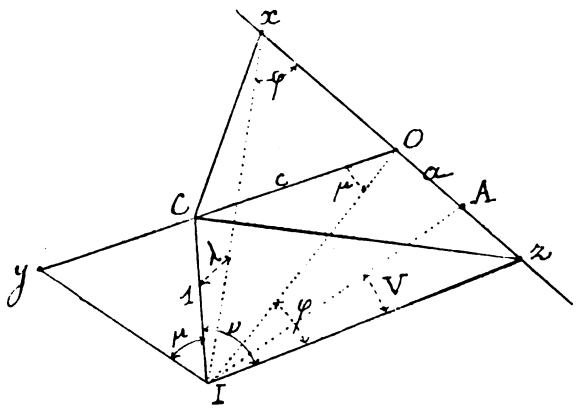


FIG. 7.

Soient (fig. 7) x, y, z les traces des axes d'élasticité sur le plan mené normalement à l'axe de zone CI à une distance 1 du centre du cristal; xz est la trace du plan des axes optiques et IA l'un de ces axes; nous prenons pour axe des z la bissectrice aiguë.

De ce que le triangle yIO est rectangle en I, on déduit $c = \cot\mu$.

Le triangle OIA donne

$$a = \mathrm{OI}\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \mathrm{V}) = \frac{1}{\sin\mu}\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \mathrm{V}).$$

Il reste à calculer φ en fonction des données : le triangle rectangle xIz a pour côtés $Ix = \frac{1}{\cos\lambda}$ et $Iz = \frac{1}{\cos\nu}$, on en déduit $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{u}{w}$, puis, en remplaçant,

$$a = \frac{1}{\sin\mu} \cdot \frac{u - w\,\mathrm{tg}\,\mathrm{V}}{w + u\,\mathrm{tg}\,\mathrm{V}}.$$

un procédé graphique. Dans la figure 91, les ordonnées sont sensiblement trop petites; ainsi, pour $\alpha = 50°$, l'ordonnée est d'environ 29° au lieu de 32°; pour $\alpha = 60°$, elle est de 24° au lieu de 28°, etc.; aussi la tangente à la courbe au point extrême s'incline d'environ 45° sur l'horizontale au lieu de s'incliner de 53°. Dans la courbe relative à la zone pg^1 (fig. 92), la partie de droite comprise entre le maximum et le point extrême a aussi des ordonnées trop petites; ainsi pour $\alpha = 80°$, elle donne $x = 20°$ au lieu de 24°, etc.

Digitized by Google

Pour *b*, il suffit de remplacer $\varphi - V$ par $\varphi + V$. Les formules demandées sont donc :

$$(D)\quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{\sin\mu}\cdot\dfrac{u - w\,\mathrm{tg}\,V}{w + u\,\mathrm{tg}\,V} \\ b = \dfrac{1}{\sin\mu}\cdot\dfrac{u + w\,\mathrm{tg}\,V}{w - u\,\mathrm{tg}\,V} \\ c = \cot\mu. \end{cases}$$

Axinite. *Extinction dans la zone verticale.* — Lorsque l'axe de zone est orienté par rapport aux axes d'élasticité, les formules (D) donnent *a*, *b* et *c*; puis, par l'équation (B), on obtient les *maxima* ou *minima* et par (A) ou (C) la variation de l'angle d'extinction.

Le seul calcul qui différera d'un exemple à l'autre, c'est celui qu'il faut effectuer pour déduire λ, μ, ν des données des auteurs. Prenons comme exemple l'axinite et proposons-nous d'étudier une zone dont l'axe ne se trouve pas dans un plan principal d'élasticité, par exemple la zone verticale *mt*. Les données de M. Des Cloizeaux sont : V = 36° environ. Bissectrice aiguë *z* (fig. 8) (*) normale à i^1; plan des axes optiques *x* faisant un angle de 40° avec l'arête mi^1 et un angle de 24° 40′ avec l'arête pi^1.

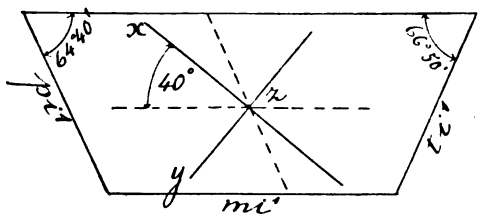


Fig. 8.

Considérons la projection stéréographique sur un plan normal à l'axe de la zone *mt*, et soit P (fig. 9) le pôle de cet axe. Le triangle *mzt* est déterminé par ses trois côtés :

$$mt = \alpha = 44°\,34'\ (**)$$
$$ti^1 = \beta = 30°\,32'$$
$$mi^1 = \gamma = 49°\,23';$$

on y calcule $B = 41°\,43'\,42''$; *z* est le pôle de i^1 et P*z* la projection de la bissectrice; le cercle NLN′, normal à P*z*, contiendra les deux autres axes

(*) La figure 8 représente la forme ordinaire de la face i^1, limitée par *p*, f^1, *t* et *m* postérieure.

(**) Voir Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, t. I, pp. 515 et 516.

Digitized by Google

d'élasticité : pour avoir ces axes, comme PQ, normale au plan mz, représente l'arête mi^1, on portera $Lx = 40°$ et $xy = 90°$; Px, Py, Pz sont les angles λ, μ, ν à calculer.

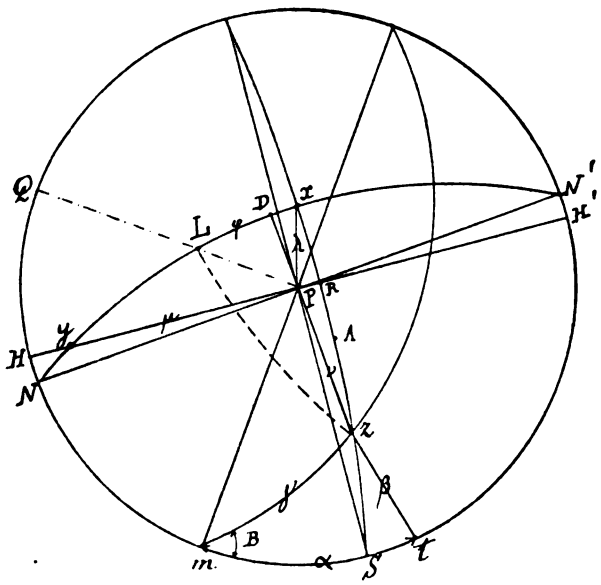


Fig. 9.

Le triangle Pzm donne

$$\cos\nu = \sin\gamma \sin B, \quad \nu = 59°\,39'\,9''.$$

Si nous désignons LD par φ, comme z est le pôle du cercle xy et L celui du cercle mz, si l'on trace l'arc de grand cercle Lz, on voit que $\widetilde{Dzm} = 90° + \varphi$; par conséquent φ peut être calculé dans le triangle Pzm; on obtient :

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos\gamma \operatorname{tg} B, \quad \varphi = 30°\,8'\,21''.$$

Le triangle Pxz, dans lequel $\widetilde{xzD} = 40° - \varphi$, donne

$$\cos\lambda = \sin\nu \cos(40° - \varphi), \quad \lambda = 31°\,45'\,49''.$$

Le triangle Pyz donne

$$\cos\mu = \sin\nu \sin(40° - \varphi), \quad \mu = 81°\,30'\,4'' \text{ (*)}.$$

Les angles β (fig. 1) sont comptés à partir du plan qui dans la zone est normal au plan des axes optiques, et il s'agit de déterminer ce plan qui sert d'origine. Son pôle est évidemment en S. Pour calculer $Sm = QH$, il suffit de calculer l'angle opposé à Ly dans le triangle LyP, dans lequel les côtés sont :

$$Ly = 50°, \quad \mu = 81°\,30'\,4'' \quad \text{et} \quad LP = 41°\,43'\,42'',$$

(*) Comme vérification, on trouve $u^2 + v^2 + w^2 = 1{,}0000005$.

Digitized by Google

cette dernière donnée étant tirée du triangle LPz, qui donne

$$\cos LP = \sin \nu \cos \varphi.$$

On trouve $Sm = 36^\circ\ 0'\ 41''$ (*).

Les formules (D) donnent

$$a = 0{,}43502, \quad b = -10{,}94204, \quad c = 0{,}149431 \ (**).$$

Le signe de b indique, comme le montre d'ailleurs la projection stéréographique, qu'un seul axe optique PA vient déboucher à la partie supérieure autour de la bissectrice aiguë. Le sens de l'extinction dans la face d'origine S, ayant pour projection HH', est visible dans l'épure; en effet, cette direction d'extinction est évidemment la droite ayant pour pôle le point R; pour l'observateur placé devant S, *la partie supérieure de la direction d'extinction* s'incline de *gauche à droite* par rapport à l'axe de zone P (***).

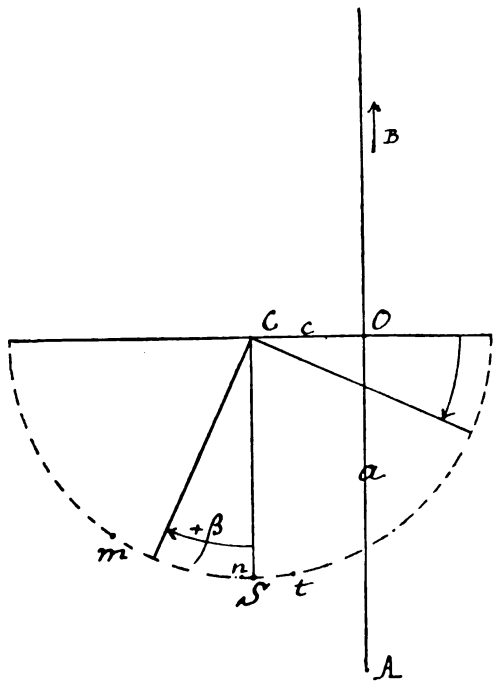


Fig. 10.

La formule (C) devient, en changeant b en $-b$,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{(a-b)\sin\beta + 2c\cos\beta}{1 + (a\sin\beta + c\cos\beta)(b\sin\beta - c\cos\beta)}.$$

Pour $\beta = 0$, il vient $\operatorname{tg} x_0 = c$; c'est donc à l'angle d'extinction, compté de *gauche à droite* à partir de l'axe de zone, qu'il faut attribuer le signe +. Sur un plan normal à l'axe de zone à une distance 1 du centre, on a la disposition indiquée par la figure 10 (IV).

(*) La face S est voisine de h^1 donnée par $mh^1 = 35^\circ\ 20'$.

(**) Ces chiffres ont été obtenus en prenant pour valeur de l'angle auxiliaire, déterminé par $tg\ \omega = \frac{w}{u}$, $\omega = 30^\circ\ 43'\ 14''$.

(***) L'angle d'extinction x_0 est $PR = 90^\circ - \mu = 8^\circ\ 29'\ 56''$.

(IV) Dans cette figure, l'unité est le décimètre; le pôle B se trouve sur le prolongement de OA dans le sens indiqué par la flèche à une distance 10,94 du point O.

Digitized by Google

Conformément à la figure 1, l'angle β sera compté *positivement* à partir de CO vers la bissectrice aiguë (*), c'est-à-dire *de* S *vers* m, négativement de S vers *t*. On fera varier β de 0° à 90° et de 0° à — 90°.

Variation du signe de l'angle d'extinction. — Il est facile de voir que le dénominateur de tg $2x$ est essentiellement positif (**); le numérateur est aussi essentiellement positif pour β négatif, vu que $a - b < 0$; donc à *droite de* S *toutes les faces de la zone auront un angle d'extinction positif.* Lorsque β est positif, comme ce numérateur peut s'écrire

$$-(b-a)\cos\beta\left(\operatorname{tg}\beta - \frac{2c}{b-a}\right),$$

on voit que l'angle d'extinction devient nul pour $\operatorname{tg}\beta = \frac{2c}{b-a}$, ou $\beta = 1°\,37'\,45''$; puis, lorsque β augmente, x devient négatif; si l'on prend $Sn = 1°\,37'\,45''$, l'angle d'extinction sera positif pour les faces dont les pôles sont à gauche de *n*, positif pour celles qui ont leur pôle à droite de *n*.

L'équation (B) donnant les maxima et les minima devient, dans notre cas,

$$10{,}74164\,z^3 + 3{,}1507\,z^2 - 39{,}9757\,z + 18{,}21828 = 0.$$

Cette équation a ses trois racines réelles, l'une comprise entre — 3 et — 2, la deuxième entre 0 et 1, la troisième entre 1 et 2; ce sont :

$$\begin{array}{llll} 2{,}265 < -z' < 2{,}266 & \text{ou} & 23°\,48'\,44'' < -\beta' < 23°\,49'\,17'' \\ 0{,}5126 < z'' < 0{,}5127 & \text{ou} & 62°\,51'\,21'' < \beta'' < 62°\,51'\,37'' \\ 1{,}4600 < z''' < 1{,}4601 & \text{ou} & 34°\,24'\,24'' < \beta''' < 34°\,24'\,30'',5. \end{array}$$

On a donc les trois solutions :

$$\left\{\begin{array}{l}\beta = -23°\,49' \\ x = 37°\,42'\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\beta = 62°\,51' \\ x = -29°\,48'\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\beta = 34°\,24' \\ x = -30°\,11'\end{array}\right.$$

(*) On peut aussi vérifier le signe de β, en observant que la valeur de β trouvée plus bas, pour la face à angle d'extinction nul, est positive; or, à l'aide de la figure, on voit facilement que cette face doit se trouver à gauche de S.

(**) En posant $\operatorname{tg}\beta = z$, il peut s'écrire $\cos^2\beta\,\{z^2(ab+1) + c(b-a)z + 1 - c^2\}$; or, le binôme caractéristique de la quantité entre parenthèses est $B^2 - 4AC = -20{,}06$; le trinôme du second degré garde donc constamment le signe de son premier terme pour toutes les valeurs de z.

Digitized by Google

En donnant à β une suite de valeurs, on obtient le tableau suivant, puis la courbe représentée par la figure 11 :

β	x	β	x		β	x
0°	+ 8° 29′ 56″	— 10°	+ 34° 1′ 53″	m	36° 1′	— 30° 10′ 47″
1° 37′ 45″	0°	— 20°	37° 32′ 21″	h^1	7° 2′	— 19° 17′ 55″
10°	— 23° 52′ 14″	— 23° 49′	37° 42′	h^2	0° 41′	+ 4° 56′ 13″
20°	— 29° 10′ 37″	— 30°	37° 25′ 14′	h^3_4	— 4°	+ 24° 34′ 24″
30°	— 30° 7′ 55″	— 40°	36° 19′ 44″	t	— 8° 33′	+ 32° 40′ 27″
34° 24′	— 30° 11′	— 50°	34° 57′ 53″	g^1	— 41° 19′	+ 36° 9′ 23″
40°	— 30° 8′	— 60°	33° 36′ 31″	$^1/_2 g$	— 83° 29′	+ 31° 6′ 3″
50°	— 29° 56′ 33″	— 70°	32° 23′ 45″			
60°	— 29° 48′ 57″	— 80°	31° 23′ 38″			
62° 51′	— 29° 48′	— 90°	30° 38′ 3″			
70°	— 29° 51′ 36″					
80°	— 30° 7′ 30″					
90°	— 30° 38′ 3″					

Nous avons ajouté dans ce tableau les angles d'extinction des différentes faces cristallines connues dans la zone verticale de l'axinite; les valeurs de β se déduisent des incidences données page 515 par M. Des Cloizeaux (*).

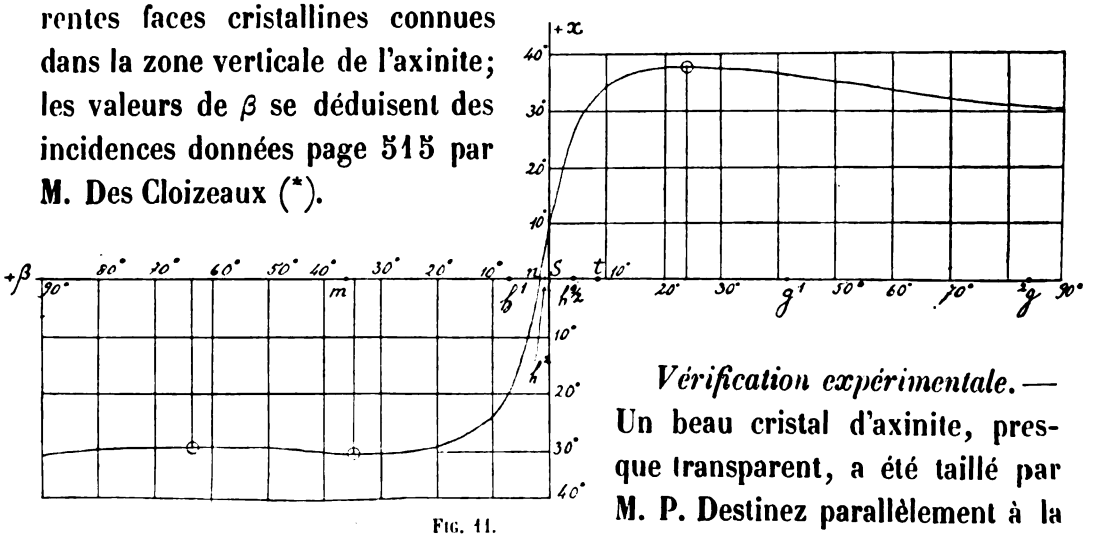


Fig. 11.

Vérification expérimentale. — Un beau cristal d'axinite, presque transparent, a été taillé par M. P. Destinez parallèlement à la face t; on a laissé subsister une facette f^1 pour servir de repère. En plaçant la lame de façon que la face t

(*) Il va sans dire que le signe de l'extinction donné dans le tableau se rapporte aux faces indiquées dans la figure 11; pour les faces opposées, l'angle changerait de signe; ainsi : pour t *postérieure*, l'angle d'extinction serait de — 32° 40′, pour $^1/_2 g$ *gauche*, de — 31° 6′, etc.

Digitized by Google

antérieure soit tournée vers le spectateur, on trouve effectivement (fig. 12) que l'une des directions d'extinction *t*l s'incline de gauche à droite et fait avec la verticale (arête *ml*) un angle d'environ 30° (*).

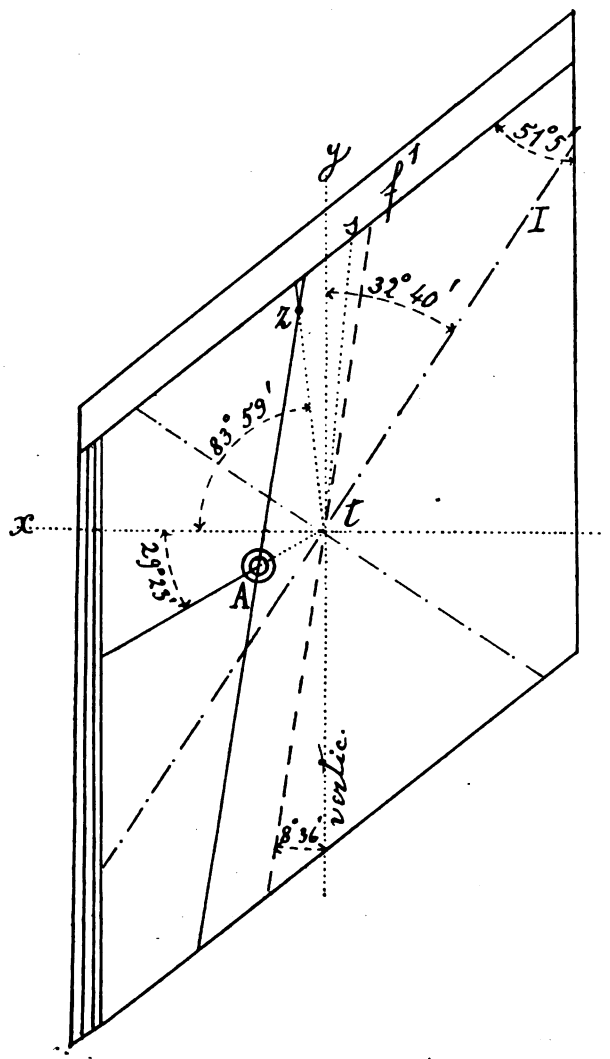


FIG. 12.

En construisant la projection stéréographique sur *l*, on peut prévoir l'apparence optique de la lame en lumière convergente. On trouve qu'un axe optique fait avec la lame un angle $tA = 10° 41'$; il doit donc être visible dans le champ du microscope; et, lorsque le cristal est placé comme dans la figure, c'est-à-dire avec son côté vertical parallèle à l'un des fils *ty* du réticule, cet axe doit percer le champ dans le quadrant gauche inférieur (**); la projection de cet axe doit faire avec l'autre fil du réticule un angle $Atx = 29° 23'$.

La bissectrice *tz* est inclinée sur la lame sous un angle de 30° 32'; le plan des axes optiques a sa trace en *Az* (***), faisant avec la

(*) L'extinction est assez indécise.

(**) Bien entendu en examinant l'image à l'œil nu, après enlèvement de l'oculaire; avec la loupe Bertrand, l'image est renversée.

(***) *Az* est la trace du plan des axes optiques, A la trace d'un axe, sur un plan *t* situé à une distance 1 du centre du cristal, de sorte que $tA = \text{tg } 10° 41'$, $tz = \text{tg } 30° 32'$, etc. La figure est donc une projection gnomonique; l'unité choisie pour la construction de l'épure est de 5 centimètres.

Digitized by Google

verticale un angle de 8° 36′; ce plan lui-même est incliné sur le plan de la lame sous un angle de 81° 32′; la trace de l'autre axe optique se trouve à l'intersection des droites A*z*, *ts* prolongées.

Expérimentalement on trouve que l'apparence est bien celle que la théorie déduit des données de M. Des Cloizeaux : la trace des axes optiques fait bien un angle d'environ 9°, dans le sens voulu, avec l'arête *mt*; le pôle d'un axe optique se montre en A, dans le quadrant inférieur gauche; seulement l'angle A*tx* est sensiblement plus petit, la moyenne de nos mesures donnant 21° pour cet angle. Cet écart n'est pas aussi considérable qu'on pourrait le croire à première vue; il provient de ce que l'angle V est assez variable dans l'axinite; nous avons pris dans nos calculs V = 36°, mais, d'après les expériences de M. Des Cloizeaux, cet angle peut descendre jusqu'à 35° : si l'on part de $\widetilde{Atx} = 21°$, on trouve V = 34° 13′; on voit qu'une différence de moins de 2° dans la valeur de V peut amener l'angle $\widetilde{Atx}$ à varier de plus de 8°.

Observations sur le cône formé par les directions d'extinction des faces d'une même zone.

1° Si l'on suppose le plan de la figure perpendiculaire à l'axe de zone et à une distance 1 du centre, si l'on prend sur la trace d'un plan quelconque de la zone une distance égale à la tangente de l'angle d'extinction de cette face, angle donné par la formule (A), le lieu des points ainsi obtenus est la trace du cône formé par les différentes directions d'extinction. C'est une courbe du troisième degré.

Pyroxène. *Zone* h^1g^1. — Les différentes valeurs de ρ sont données par le tableau suivant, dans lequel α est l'angle que fait la section considérée avec le plan des axes optiques g^1 :

α	ρ	α	ρ	α	ρ
0°	0,802107	40°	0,694558	80°	0,222731
5°	0,800532	45°	0,66314	85°	0,115
10°	0,795789	50°	0,626224	90°	0
20°	0,776556	60°	0,53203		
30°	0,743461	70°	0,401544		

Digitized by Google

La courbe est très voisine d'une ellipse peu excentrique ayant son petit axe sur la trace du plan des axes optiques et tangente à h^1; ses demi-axes ont pour longueur : $a = 0{,}401053$, $b = 0{,}47577$ (*).

Si l'on calcule les valeurs d'extinction en supposant la courbe elliptique, on obtient la correspondance suivante :

α	x	x pour l'ellipse	α	x	x pour l'ellipse
0°	*38° 44′	38° 44′	50°	32° 3′	31° 51′
5°	38° 40′,7	38° 41′,3	60°	28° 1′	27° 7′
10°	38° 31′	38° 33′	70°	21° 53′	20° 14′
20°	37° 50′	37° 58′	80°	12° 33′	10° 57′
30°	36° 37′	36° 50′	85°	6° 34′	5° 36′
40°	34° 47′	34° 55′	90°	0°	0°
45°	*33° 33′	33° 33′			

On voit que lorsqu'on s'approche de h^1, les valeurs sont un peu faibles.

PYROXÈNE. *Zone* pg^1. — En opérant comme ci-dessus, on obtient le tableau suivant et la courbe représentée par la figure 13 :

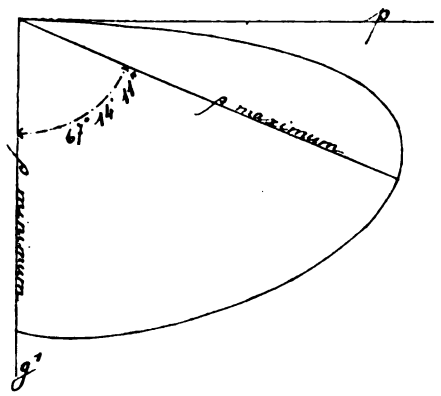


FIG. 13.

α	ρ	α	ρ	α	ρ
0°	0,41504	50°	0,50410	82°	0,40660
10°	0,42608	60°	0,53132	84°	0,34046
20°	0,43609	67°14′11″	0,54097	86°	0,25343
30°	0,45284	70°	0,53872	88°	0,13437
40°	0,47604	75°	0,51753	90°	0
45°	0,48967	80°	0,45373		

2° Si, au lieu de prendre tg x, sur la trace du plan, on prend une longueur

(*) L'équation d'une ellipse rapportée à l'un de ses sommets comme pôle, est, en appelant α l'angle que fait le rayon vecteur avec l'axe $2a$, $\rho = \frac{2ab^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}$; on peut déterminer cette ellipse de manière qu'elle ait, outre le pôle, deux points communs avec la courbe dont il s'agit, par exemple :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \rho_1 = 2a \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 45° \\ \rho_2 = \frac{2ab^2\sqrt{2}}{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

ρ_1 et ρ_2 étant donnés dans le tableau ci-dessus; on a deux équations, qui déterminent a et b.

Digitized by Google

égale à $\operatorname{tg} 2x$, l'équation polaire de la courbe obtenue est, d'après (C) :

$$\rho = \frac{(a+b)\sin\beta + 2c\cos\beta}{1-(a\sin\beta + c\cos\beta)(b\sin\beta + c\cos\beta)}.$$

Si l'on prend (fig. 1) pour axe des y la droite CO et pour axe des x la parallèle menée par C à la trace du plan des axes optiques, on a $x = \rho \sin\beta$ et $y = \rho\cos\beta$; par conséquent, l'équation ci-dessus devient

$$(ab-1)x^2 + (c^2-1)y^2 + c(a+b)xy + (a+b)x + 2cy = 0.$$

C'est l'équation d'une conique passant par la trace de l'axe de zone.

Comme les directions d'extinction sont les axes de l'ellipse que le plan considéré coupe dans l'ellipsoïde inverse, on arrive à la propriété géométrique suivante :

« Si, dans un ellipsoïde, on considère une suite de sections se coupant » suivant un même diamètre d de la surface, et que dans chacune d'elles » on trace la droite symétrique de d par rapport à l'un des axes de la » section, le lieu des droites ainsi obtenues est un cône ayant pour base, » dans un plan normal à d, une courbe du second degré, devenant un cercle » lorsque d est normal à l'une des sections cycliques de l'ellipsoïde. »

Observons, en outre, que les *maxima* de $\rho = \operatorname{tg} x$ (x étant une fonction de α) correspondent aux mêmes valeurs de α que ceux de $\rho = \operatorname{tg} 2x$ (*); de sorte que *la recherche des* MAXIMA *et* MINIMA *des angles d'extinction des faces d'une même zone peut se ramener au problème géométrique suivant :*

« On joint un point fixe d'une courbe du second degré à un point » quelconque de la même courbe; quels sont les *maxima* ou les *minima* » du rayon vecteur ainsi obtenu ? »

(*) Considérons les deux fonctions $\rho_1 = f(\alpha)$, $\rho_2 = \frac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$; on a : $\rho_2' = 2f'(\alpha)\frac{1+f^2(\alpha)}{[1-f^2(\alpha)]^2}$. On voit que les *maxima* de ρ_2 sont donnés, comme ceux de ρ_1, par les valeurs de α qui vérifient l'équation $f'(\alpha) = 0$.

Digitized by Google

NOTE.

Si dans l'étude d'une fonction on change le sens dans lequel on compte les y positifs, les *maxima* sont changés en *minima* et *vice versa*. Donc, lorsqu'il s'agit d'une recherche dans laquelle ces *maxima* doivent être pris en *valeur absolue*, il faut, pour distinguer entre un *maximum* et un *minimum*, considérer à la fois le signe de y'' et de y. Or, il est facile de voir que pour un *maximum en valeur absolue*, y'' et y sont de signes contraires, tandis que pour un minimum ces fonctions sont de même signe; de sorte que le *maximum* est caractérisé par $yy'' < 0$ et le *minimum* par $yy'' > 0$ (*).

Soit, comme exemple à chercher, dans le cas où l'axe de zone se trouve dans le plan des axes optiques, si la valeur de l'extinction à l'origine (c'est-à-dire dans le plan des axes) est un *maximum* ou un *minimum*.

On a obtenu :

$$\rho_0 = tg x_0 = \frac{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + ab - 1}{a+b}$$

$$x_0'' = -\frac{(a+b)(ab+1)}{2(1+a^2)(1+b^2)};$$

donc :

$$\rho_0 x_0'' = -\frac{ab+1}{2(1+a^2)(1+b^2)}\left\{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} + ab - 1\right\}.$$

PREMIER CAS. a et b sont de même signe. On a évidemment : $\rho_0 x_0'' < 0$; donc *maximum*.

(*) En opérant de la sorte, on peut parvenir à éliminer certains facteurs qui compliquent la discussion par le grand nombre d'hypothèses possibles sur les signes des quantités qu'ils renferment. On peut aussi remplacer yy'' par $\frac{y}{y''}$.

Digitized by Google

SECOND CAS. a et b sont de signes contraires. En changeant le signe à *l'une ou à l'autre* de ces quantités, il vient :

$$\rho_0 x_0'' = \frac{ab-1}{2(1+a^2)(1+b^2)}\left\{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} - (ab+1)\right\}.$$

Il est facile de voir que la quantité entre crochets est essentiellement positive ; il y a donc deux hypothèses à faire :

1° $ab > 1$; d'où $\rho_0 x_0'' > 0$; donc *minimum* ;
2° $ab < 1$; d'où $\rho_0 x_0'' < 0$; donc *maximum*.

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

PAR

P. DUHEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 13 octobre 1894.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS.

INTRODUCTION.

Les tentatives destinées à mettre les diverses sortes de déformations permanentes d'accord avec les principes de la thermodynamique ont été jusqu'ici peu nombreuses. Une seule de ces tentatives nous paraît digne d'attention; c'est celle qui est due à M. Marcel Brillouin (*). Bien que les idées développées dans le présent travail ne s'accordent pas avec celles de M. Brillouin, ce sont ces dernières, nous aimons à le reconnaître, qui nous ont conduit à formuler la théorie que nous proposons. Indiquons brièvement les hypothèses fondamentales de M. Brillouin et les raisons qui nous les font rejeter.

Considérons un système dont l'état soit entièrement défini par la tempéra-

(*) Marcel Brillouin, *Déformations permanentes et thermodynamique* (Comptes rendus, 6, 13, 20 et 27 février 1888).

Digitized by Google

ture absolue T et par une autre variable normale x. C'est à l'étude de tels systèmes que l'on se borne, en général, dans l'enseignement de la thermodynamique classique. Si la variable x subit une variation réelle ou virtuelle dx, tandis que la température demeure ou non constante, les actions extérieures qui agissent sur le système produisent un travail Xdx; X est ce que nous nommerons l'*action extérieure*.

On admet, en général, que, pour maintenir en équilibre le système dans un certain état, défini par un ensemble (x, T) de valeurs des variables x, T, il faut lui appliquer une action X, bien déterminée par les valeurs x, T, des variables. La condition d'équilibre du système s'exprime donc par une équation sous forme finie; c'est l'*équation d'équilibre :*

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots X = f(x, T).$$

Pour rendre compte des déformations permanentes des solides élastiques et d'un certain nombre de phénomènes du même genre, M. Brillouin a proposé de regarder l'hypothèse précédente non plus comme une hypothèse générale, mais comme une hypothèse dont la légitimité est limitée à certains corps particuliers, par exemple aux corps fluides; pour les autres corps, par exemple pour les solides élastiques, il a proposé de substituer à cette hypothèse, l'hypothèse plus générale que voici :

Il existe une équation non intégrable, aux différentielles totales, entre la température T, *la variable normale* x *et l'action extérieure* X :

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots dX = a(x, X, T)\,dx + b(x, X, T)\,dT,$$

qui est vérifiée toutes les fois que le système passe d'un état d'équilibre (x, T, X) *à un état d'équilibre infiniment voisin* (x + dx, T + dT, X + dX).

M. Brillouin a développé les conséquences de cette hypothèse en lui appliquant successivement le principe de l'équivalence de la chaleur et *du* travail et l'axiome de Clausius. Il est ainsi conduit à la conséquence suivante (*) :

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée lorsque le système passe d'un

(*) *Journal de physique*, 2e sér., t. VIII, p. 169, 1889.

Digitized by Google

état d'équilibre à un état d'équilibre infiniment voisin; il existe une certaine fonction uniforme S (x, X, T) telle que l'on ait

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dQ}{T} + dS = 0.$$

Cette fonction, analogue à l'Entropie de Clausius, en diffère en ce qu'elle ne dépend pas seulement des variables x et T, mais encore de l'action extérieure X.

Or, il est aisé de voir que cette conséquence est en contradiction avec l'hypothèse de M. Marcel Brillouin. Considérons, en effet, une modification isothermique. Pour une telle modification, l'égalité (3) donne :

$$\frac{dQ}{T} = -\frac{\partial S(x, X, T)}{\partial x} dx - \frac{\partial S(x, X, T)}{\partial X} dX.$$

Si, d'autre part, nous désignons par $U(x, T)$ l'énergie interne du système et par E l'équivalent mécanique de la chaleur, le principe de la conservation de l'énergie nous donnera :

$$E dQ = -\frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx + X dx.$$

Si nous posons

$$\mathcal{F}(x, X, T) = E\left[U(x, T) - TS(x, X, T)\right],$$

les égalités précédentes nous donneront :

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots X dx = \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X} dX.$$

Cette égalité (4) doit être vérifiée toutes les fois que (x, X, T) et $(x + dx, X + dX, T)$ sont deux états d'équilibre infiniment voisins correspondant à la même température.

Mais, dans ce cas, l'égalité (2) est également vérifiée. En comparant ces égalités (2) et (4), nous trouvons :

$$\left[X - \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} - a(x, X, T) \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X}\right] dx = 0.$$

Digitized by Google

Comme la quantité dx est évidemment arbitraire, on voit que l'on doit avoir l'égalité

$$X - \frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial x} - a(x, X, T)\frac{\partial \mathcal{F}(x, X, T)}{\partial X} = 0,$$

toutes les fois que (x, T, X) est un état d'équilibre du système.

On voit que la condition d'équilibre du système s'exprime par une relation en termes finis entre x, X, T, contrairement à l'hypothèse fondamentale de M. Brillouin; on peut en conclure que cette hypothèse n'est pas compatible avec les deux principes fondamentaux de la thermodynamique.

Depuis l'époque où M. Brillouin imagina la théorie que nous venons de discuter, les idées des physiciens touchant les modifications permanentes ont été précisées et modifiées, grâce aux recherches poursuivies par M. Ewing(*) sur l'une des plus importantes de ces modifications, sur le *magnétisme rémanent*, ou, pour employer le langage adopté aujourd'hui, sur *l'hysteresis magnétique*.

Si l'on compare l'hypothèse faite par M. Brillouin au sujet des modifications permanentes aux résultats des recherches expérimentales de M. Ewing, on est tout de suite frappé par un caractère essentiel qui sépare ces résultats de cette hypothèse.

D'après M. Brillouin, *même dans le cas où il y a déformation permanente*, toute suite continue d'états d'équilibre du système est une modification réversible; M. Brillouin a insisté sur ce point. Au contraire, les recherches de M Ewing nous montrent des *systèmes dans lesquels une suite continue d'états d'équilibre n'est* JAMAIS *une modification réversible*. Faites croître l'intensité du champ magnétique dans lequel se trouve un morceau de fer; l'intensité d'aimantation du fer va croître suivant une certaine loi; faites décroître l'insité du champ, l'intensité d'aimantation va décroître; mais, durant cette période décroissante, l'intensité d'aimantation n'est pas liée à l'intensité du champ *par la même loi* que durant la période croissante.

(*) Les recherches de M. Ewing sont réunies dans un ouvrage intitulé : *Magnetic induction in iron and other metals* (New-York et Londres, 1891). — Voir aussi : J.-A. EWING et MISS HELEN G. KLAASSEN, *Propriétés magnétiques du fer*. (LUMIÈRE ÉLECTRIQUE, t. LII, pp. 185, 333, 384, 444.)

Digitized by Google

Cette remarque a une grande importance.

Lorsque, en effet, on reprend l'exposé classique des principes de la thermodynamique en vue de donner à cet exposé une entière rigueur, on est amené, avant d'aborder la démonstration du théorème de Carnot, à formuler l'hypothèse restrictive suivante (*) :

Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible; nous n'étudierons que les systèmes qui jouissent de cette propriété.

Cette restriction, à laquelle est subordonnée la légitimité du principe de Carnot et des nombreuses conséquences qui s'en déduisent, exclut les phénomènes d'hysteresis magnétique et une foule de déformations permanentes présentant le même caractère essentiel que l'hysteresis magnétique, à savoir : *qu'une suite continue d'états d'équilibre du système n'est pas une modification réversible.* En abordant l'étude de ces phénomènes, nous devrons nous souvenir que le *principe de l'équivalence de la chaleur et du travail est le seul principe de thermodynamique que nous soyons en droit de leur appliquer.*

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE DES DÉFORMATIONS PERMANENTES DANS LES SYSTÈMES QUI DÉPENDENT D'UNE SEULE VARIABLE NORMALE.

Les systèmes les plus simples que l'on puisse étudier sont ceux dont l'état est entièrement défini lorsqu'on connaît la température absolue T et une seule variable *normale* (**) x; c'est à l'étude de semblables systèmes que s'est longtemps bornée la thermodynamique classique; c'est par la théorie des déformations permanentes de ces systèmes qu'il convient de commencer notre exposé.

(*) P. Duhem, *Commentaire aux principes de la thermodynamique.* Deuxième partie (Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e sér., t. IX, p. 305, 1893).

(**) Pour la signification de ce terme, voir P. Duhem, *Commentaire aux principes de la thermodynamique.* Troisième partie (Journal de mathématiques pures et appliquées, 4e sér., t. X, p. 214, 1894).

Digitized by Google

§ I. — *Hypothèse fondamentale.*

Considérons un système défini par deux variable x et T, *satisfaisant aux conditions qui permettent d'appliquer les propositions classiques de la thermodynamique;* ce système admet un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(x, T)$; son énergie interne, $U(x, T)$ est donnée par l'égalité

$$(5). \quad \ldots \quad EU(x, T) = \mathcal{F}(x, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial T}.$$

Soit X l'action extérieure à laquelle ce système est soumis. La condition d'équilibre du système sera

$$(6). \quad \ldots \quad X = \frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial x}.$$

Soient (x, T, X) et $(x+dx, T+dT, X+dX)$ deux états d'équilibre du système, infiniment voisins l'un de l'autre; nous aurons, en vertu de l'égalité (6) :

$$(7). \quad \ldots \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x\, \partial T} dT.$$

Imaginons maintenant que nous ayons affaire à un système dont les états d'équilibre peuvent se ranger en suite continue *sans former une modification réversible.* Un pareil système a une énergie interne $U(x, T)$, mais l'existence de cette énergie interne est tout ce que nous apprend la thermodynamique au sujet de ce système. Pour aller plus loin, il nous faut faire des hypothèses; voici celle que nous ferons en premier lieu :

Il existe une fonction $\mathcal{F}(x, T)$, *que nous nommerons encore le potentiel thermodynamique interne du système, dont l'énergie interne dérive par la formule*

$$(5). \quad \ldots \quad EU(x, T) = \mathcal{F}(x, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}(x, T)}{\partial T}.$$

Digitized by Google

Si (x, T, X) *et* $(x+dx, T+dT, X+dX)$ *sont deux états d'équilibre infiniment voisins, on a*

$$(8). \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, T, X)\,|dx|.$$

Dans cette égalité (8), qui remplace l'égalité (7), $|dx|$ représente la valeur absolue de dx; $f(x, T, X)$ est une fonction *uniforme et continue* des trois variables x, T, X.

Cette hypothèse fondamentale met de suite en évidence le caractère essentiel révélé par les expériences de M. Ewing : *en général, une suite continue d'états d'équilibre du système n'est pas une modification réversible;* il n'y a d'exception que pour le cas où tous ces états d'équilibre correspondraient à des valeurs variables de la température T, mais à une même valeur du paramètre x.

Voyons, en particulier, ce qui arrive pour une modification isothermique.

Pour une telle modification, l'égalité (8) se réduit à

$$(8^{bis}). \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + f(x, T, X)\,|dx|.$$

Prenons deux axes de coordonnées rectangulaires (fig. 1) OX, Ox.

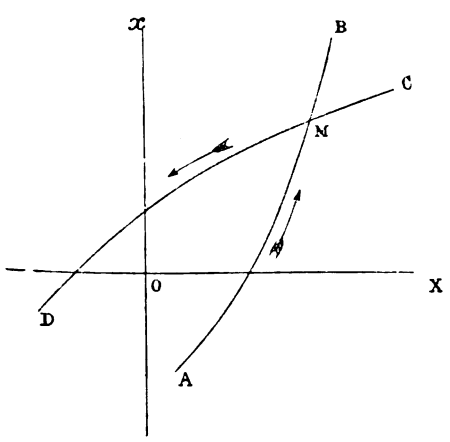


FIG. 1.

Imaginons que l'on fasse varier x par valeurs *toujours croissantes;* on aura alors

$$dx = |dx|,$$

et la relation entre x et X sera représentée par l'une des lignes AB de la famille définie par l'équation différentielle :

$$(9) \quad \frac{dX}{dx} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T, X).$$

Cette équation définit la *famille des lignes ascendantes.*

Digitized by Google

Imaginons, au contraire, que l'on fasse varier x par valeurs *toujours décroissantes ;* on aura alors

$$dx = -|dx|$$

et la relation entre x et X sera représentée par l'une des lignes CD de la famille définie par l'équation différentielle :

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T, X). \qquad (10)$$

Cette équation définit la *famille des lignes descendantes.*

Nous admettrons que par chaque point M *de la partie accessible du plan, il passe une et une seule ligne ascendante et une et une seule ligne descendante.*

L'expérience permettra, en général, de tracer les lignes ascendantes et les lignes descendantes; ces lignes tracées, on pourra immédiatement trouver un contrôle de l'hypothèse précédente.

Soit un point M (x, X) du plan; soient, en ce point, α le coefficient angulaire de la tangente à la ligne ascendante et β le coefficient angulaire de la tangente à la ligne descendante; nous aurons, en vertu des égalités (9) et (10) :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, X, T),$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, X, T);$$

et, par conséquent :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}.$$

La somme $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ *doit avoir une même valeur en tous les points d'une parallèle à* Ox.

§ II. — *Cycles fermés. — Ligne des états naturels.*

La loi du déplacement de l'équilibre par variation de l'action extérieure se déduit, en général, de l'hypothèse que le système est en équilibre stable, jointe aux conséquences du principe de Carnot. Ce *dernier principe n'étant*

Digitized by Google

pas établi pour les systèmes qui nous occupent, c'est en vertu d'une *nouvelle hypothèse* que nous les supposerons soumis à la *loi du déplacement isothermique de l'équilibre*, loi que nous énoncerons ainsi :

Si (x, X) *et* $(x+dx, X+dX)$ *sont deux états d'équilibre infiniment voisins relatifs à une même température* T *du système,* dx *et* dX *sont toujours de même signe :*

(11). . . . . $dX\,dx > 0.$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (8^{bis}), montre que l'on a les deux inégalités :

$$(12). \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T, X) > 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T, X) > 0. \end{cases}$$

et, par conséquent, l'inégalité :

$$(13). \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} > 0.$$

En outre, cette inégalité (11) se traduit géométriquement de la manière suivante :

Toutes les lignes ascendantes montent de gauche à droite;

Toutes les lignes descendantes descendent de droite à gauche.

Une ligne ascendante ne peut se fermer sur elle-même, non plus qu'une ligne descendante; le cycle fermé le plus simple qui se puisse concevoir, sera formé au moins d'une ligne descendante et d'une ligne ascendante, chacune d'elles rencontrant l'autre en deux points.

Nous allons démontrer qu'*aucun cycle fermé, formé de lignes d'équilibre, n'est possible si l'on n'admet pas la possibilité d'un cycle fermé simple.*

Imaginons, en effet, un cycle fermé quelconque. Il emprunte des segments à n lignes ascendantes et à p lignes descendantes. Numérotons ces lignes dans l'ordre où, en les supposant indéfiniment prolongées, on les rencontrerait en s'élevant parallèlement à Ox. Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes ascendantes et $L'_1, L'_2, \ldots, L'_p$ les p lignes descendantes.

Digitized by Google

Considérons la ligne L_1 indéfiniment prolongée; deux cas peuvent se présenter :

1° La ligne figurative du cycle a des portions au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée ;

2° La ligne figurative du cycle n'a aucune portion au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée.

PREMIER CAS. — *Certaines portions de la ligne figurative du cycle sont au-dessous de la ligne ascendante* L_1 *indéfiniment prolongée.*

Ces portions ne peuvent renfermer aucun segment de ligne ascendante; car, par hypothèse, le cycle n'emprunte aucun segment à une ligne ascendante située au-dessous de L_1.

Or, on ne peut passer d'une ligne descendante à une autre qu'en suivant un segment de ligne ascendante; les portions du cycle qui sont au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée, ne pouvant contenir aucun segment de ligne ascendante, se composent forcément de segments dont chacun est parcouru sur une ligne descendante unique. Parmi ces lignes descendantes, se trouve assurément celle des lignes descendantes empruntées par le cycle que l'on rencontre la première en s'élevant parallèlement à Ox; c'est donc la ligne L'_1.

Prenons ce segment de ligne L'_1 qui fait partie du cycle et qui est, en partie au moins, situé au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Soit $A'_1B'_1$ ce segment. Aux deux points A'_1, B'_1, la ligne L'_1 doit se rattacher à deux des segments ascendants qui font partie du cycle, une ligne descendante ne pouvant se relier directement à une autre ligne descendante. Ces deux segments ascendants ne peuvent, nous l'avons déjà remarqué, être situés au-dessous de L_1. Les deux points A'_1, B'_1, ne peuvent donc être situés au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Le segment $A'_1B'_1$, dont certaines portions sont au-dessous de la ligne L_1 et dont les deux extrémités ne peuvent être au-dessous de cette ligne, est certainement rencontré par cette ligne au moins en deux points. Les lignes L_1, L'_1, se rencontrant au moins en deux points, forment un cycle fermé simple.

Digitized by Google

SECOND CAS. — *Aucune portion de la ligne figurative du cycle n'est au-dessous de la ligne ascendante* L_1 *indéfiniment prolongée.*

La ligne L_1 porte au moins un segment faisant partie du cycle. Soit A_1B_1 un tel segment décrit dans le sens de A_1 vers B_1. Il se relie par ses deux extrémités A_1, B_1, à deux segments qui appartiennent forcément à certaines lignes descendantes L'_α, L'_β.

Si les deux indices α, β, sont égaux entre eux, les deux lignes L'_α, L'_3 coïncident. Elles se confondent en une seule, L'_α, qui rencontre L_1 au moins aux deux points A_1, B_1, et qui, par conséquent, forme avec elle au moins un cycle fermé simple, en sorte que le théorème est démontré.

Considérons le cas où les deux indices α, β sont différents et, pour fixer les idées, supposons $\alpha < \beta$; la ligne L'_α, indéfiniment prolongée, est tout entière au-dessous de la ligne L'_β; le point B_1 est donc assurément au-dessous de la ligne L'_α indéfiniment prolongée.

D'autre part, les parties du segment A_1B_1, qui sont infiniment voisines du point A_1, sont situées au-dessous de la ligne L'. On s'en convaincra sans peine si l'on remarque que le segment A_1B_1 monte de gauche à droite; que le segment décrit sur la ligne L'_α et aboutissant au point A_1 descend de droite à gauche; enfin que ce dernier segment est certainement au-dessus de la ligne L_1 indéfiniment prolongée, puisque, par hypothèse, aucune partie du cycle n'est au-dessous de cette ligne.

Si donc nous suivons le segment A_1B_1, en allant de A_1 vers B_1, nous partons d'un point de la ligne L'_α, nous passons tout d'abord au-dessous de cette ligne, et nous aboutissons à un point B_1 situé au-dessus de cette ligne. Il y a, par conséquent, sur le segment A_1B_1, en dehors du point A_1, au moins un point qui appartient à la ligne L'_α indéfiniment prolongée; les deux lignes L'_α, L_1, se rencontrant au moins en deux points, forment au moins un cycle fermé simple.

On voit, par ces démonstrations, qu'aucun cycle fermé, quelque compliqué qu'on le suppose, n'est concevable si l'on n'admet la possibilité de cycles fermés simples.

Admettons, dorénavant, la possibilité de cycles fermés et, partant, de cycles fermés simples. Étudions un cycle fermé simple.

Digitized by Google

La courbe ascendante AB (fig. 2) est rencontrée en deux points M, N, par la courbe descendante CD. Supposons, pour fixer les idées, que la portion de la courbe AB qui est comprise entre les points MN, soit située à droite de la portion de la courbe CD qui est située entre les mêmes points. Considérons une ligne descendante C'D', située à droite de la courbe CD et voisine de celle-ci. Elle rencontrera la courbe AB *au moins* en deux points M'N', situés sur cette courbe, à l'intérieur de l'arc MN. Il pourrait se faire que le nombre des points d'intersection de la courbe C'D' avec la courbe AB, à l'intérieur du segment MN, soit, à partir d'un certain instant, supérieur à deux ; par exemple, dans le cas de la figure 3, il deviendrait égal à quatre. *Pour le moment, excluons cette hypothèse.* Continuons à déplacer la courbe C'D' vers la droite. Les deux points M', N', dont chacun marche dans un sens constant, tendront vers deux points limites bien déterminés, μ, ν. Ces deux points limites coïncident ; sinon, les points situés sur la ligne AB entre les deux points μ, ν, seraient des points accessibles du plan par lesquels passeraient non pas une et une seule ligne ascendante, comme nous l'avons supposé, mais soit aucune ligne descendante, soit plusieurs lignes descendantes, contrairement à l'hypothèse faite. Donc, sur le segment ascendant d'un cycle fermé simple, il existe un point où la ligne ascendante a, avec la ligne descendante, deux rencontres confondues, c'est-à-dire un point de contact P.

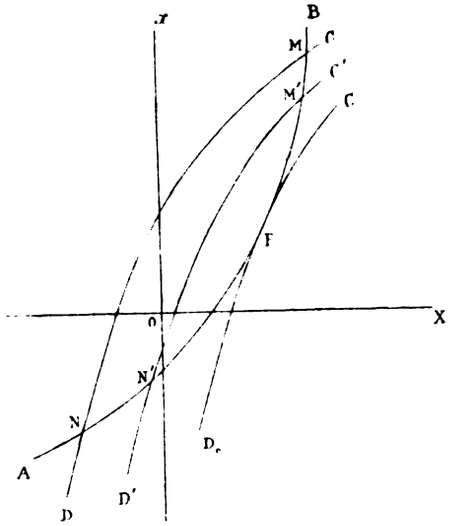


FIG. 2.

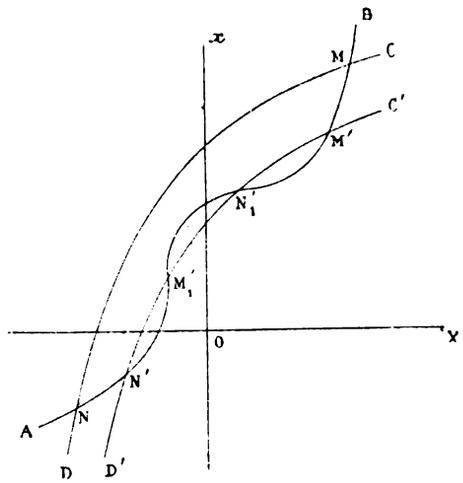


FIG. 3.

Digitized by Google

Si, au lieu de nous borner au cas simple de la figure (2), nous avions pris le cas plus compliqué de la figure (3), nous aurions trouvé sur le segment ascendant trois points où il y a contact entre la ligne ascendante et la ligne descendante.

Nous aurions montré de même, sur le segment descendant d'un cycle fermé simple, l'existence d'un ou de plusieurs points de contact entre la ligne descendante et la ligne ascendante.

Lorsqu'en un point il y aura contact entre la ligne ascendante et la ligne descendante, nous dirons que ce point représente un *état naturel du système;* nous verrons tout à l'heure la raison de cette dénomination.

Moyennant cette définition, la proposition que nous venons d'établir peut s'énoncer de la manière suivante :

Considérons un cycle fermé simple. Sur le segment ascendant, il y a au moins un état naturel du système; sur le segment descendant, il y a aussi au moins un état naturel du système.

Le théorème peut se généraliser sous la forme suivante :

Lorsqu'on parcourt un cycle fermé isothermique quelconque, on rencontre au moins deux états naturels du système.

Si un cycle fermé qui n'est pas simple est formé seulement de deux lignes, une ligne ascendante et une ligne descendante, qui se rencontrent en plus de deux points, on pourra le décomposer en plusieurs cycles simples et le théorème sera établi. Il nous suffit donc de considérer les cycles fermés composés de plus de deux lignes.

Envisageons tout d'abord un cycle formé d'une seule ligne d'une espèce (ascendante ou descendante) et de deux lignes d'une autre espèce.

Considérons, par exemple, un cycle fermé formé d'une seule ligne ascendante L et de deux lignes descendantes L', L''.

Les deux lignes L', L'' ne peuvent se rencontrer; tout segment A'L'B', que notre cycle emprunte à la ligne L', a forcément ses deux extrémités sur la ligne L. Il forme donc avec la ligne L, au moins un cycle fermé simple, et, par conséquent, il y a sur ce segment au moins un état naturel. On démontrerait de même que sur tout segment emprunté par notre cycle à la ligne descendante A''L''B'' il y a au moins un état naturel, en sorte que sur

Digitized by Google

la ligne qui figure le parcours de notre cycle il y a au moins deux états naturels.

Si, au lieu de deux lignes descendantes, le cycle en empruntait un plus grand nombre, on démontrerait sans peine qu'il y a, sur le contour de ce cycle, au moins autant d'états naturels que de lignes descendantes employées.

Considérons enfin le cas général où le cycle emprunte au moins deux lignes ascendantes et deux lignes descendantes. Soient, suivant une notation déjà employée, L_1, L_2, ..., L_n les n lignes ascendantes, et L'_1, L'_2, ..., L'_p les p lignes descendantes dont se compose le cycle; la ligne L_1 est forcément distincte de la ligne L_n; la ligne L'_1 est forcément distincte de la ligne L'_p; or, nous allons prouver qu'il y a au moins un état naturel, soit sur la ligne L_n, soit sur la ligne L'_p; le théorème que nous voulons établir sera ainsi démontré.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas. — Certaines portions de la ligne figurative du cycle sont au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Dans ce cas, nous l'avons vu, on peut former un cycle au moyen des deux lignes L_1, L'_1, et le segment descendant de ce cycle simple, lequel porte au moins un état naturel, est compris dans le segment que le cycle primitif emprunte à la ligne L'_1; ce dernier segment présente donc assurément un état naturel.

Second cas. — Aucune portion de la ligne figurative du cycle n'est au-dessous de la ligne L_1 indéfiniment prolongée. Dans ce cas, on peut former un cycle simple dont le segment ascendant, passant forcément par un état naturel, est compris à l'intérieur du segment ascendant que le cycle primitif emprunte à la ligne L_1; ce dernier segment passe donc par un état naturel.

Ainsi, il existe assurément un état naturel soit sur la ligne L_1, soit sur la ligne L'_1; on démontrerait de même qu'il existe assurément un état naturel soit sur la ligne L'_n, soit sur la ligne L'_p.

La ligne représentative d'un cycle fermé isothermique passe donc au moins par deux états naturels; la possibilité de tracer un cycle fermé isothermique est subordonnée à l'existence des états naturels.

Digitized by Google

D'après les égalités (9) et (10), pour que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent en un point (x, X, T) soient tangentes entre elles en ce point, il faut et il suffit que l'on ait

$$f(x, T, X) = 0. \quad (14)$$

Si on laisse à la température T une valeur constante, cette équation représente une ligne qui est la *ligne des états naturels* relative à la température considérée.

Imaginons qu'à partir d'un certain état, nous fassions subir au système une modification isothermique infiniment petite. Nous aurons à chaque instant,

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + f(x, X, T)\,|dx|,$$

et, par conséquent,

$$X_1 - X_0 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}(x_1 - x_0) + f(x, X, T) \sum |dx|, \quad (15)$$

(x_0, T, X_0) étant l'état initial du système, et (x_1, T, X_1) l'état final.

Supposons, en particulier, que l'action extérieure X ait varié tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre, au cours de la modification infiniment petite considérée, de manière à reprendre à la fin sa valeur initiale. Nous aurons alors $X_1 = X_0$ et l'égalité (15) deviendra :

$$x_1 - x_0 = \frac{f(x, X, T)}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}} \sum |dx|. \quad (16)$$

Cette égalité (16) nous montre que $(x_1 - x_0)$ n'est pas nul en général. *Lorsqu'à la fin d'une modification isothermique infiniment petite, l'action extérieure reprend sa valeur primitive, la variable normale* x *ne reprend pas sa valeur primitive ; elle éprouve une variation permanente.*

Il y a exception à cette règle dans le cas où

$$f(x, X, T) = 0.$$

Digitized by Google

Dans ce cas, l'égalité (16) devient

$$x_1 - x_0 = 0.$$

Une modification infiniment petite, accomplie au voisinage d'un état naturel, n'entraîne aucune modification permanente. Si donc on n'étudie que des modifications très petites autour d'un état naturel du système, on pourra leur appliquer les lois ordinaires de la thermodynamique; l'erreur commise dans ces conditions, sera une quantité très petite du second ordre.

Au sujet de la ligne des états naturels, nous ferons une nouvelle hypothèse; nous supposerons que *le déplacement isothermique de l'état naturel suive la même loi que le déplacement isothermique de l'équilibre.*

Imaginons que, la température T demeurant constante, l'action extérieure X varie de ∂X. Soient (x, X, T), $(x + \partial x, X + \partial X, T)$ les deux états naturels qui correspondent aux valeurs X et $(X + \partial X)$ de l'action extérieure. Nous admettrons que l'on a

$$\partial X \, \partial x > 0.$$

Cette inégalité peut encore s'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial X} > 0, \tag{17}$$

ce qui conduit à énoncer l'hypothèse précédente sous cette nouvelle forme :

La ligne des états naturels monte de gauche à droite.

En différentiant l'équation (14) de la ligne des états naturels, on trouve

$$\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} \partial x + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} dX = 0.$$

En sorte que l'inégalité (17) peut s'écrire

$$\frac{\dfrac{\partial f(x, X, T)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X, T)}{\partial X}} < 0. \tag{18}$$

Digitized by Google

§ III. — *Extension du théorème de Clausius.*

Le théorème de Clausius consiste en ce qui suit :

Soit un cycle fermé non réversible; pendant que le corps parcourt un élément de ce cycle, il a, en tout point, la température absolue T et il dégage une quantité de chaleur dQ; l'intégrale $\int \frac{dQ}{T}$, étendue au cycle entier, est essentiellement positive; en particulier, si le cycle est isothermique, on a

$$\int dQ > 0. \tag{19}$$

Cette inégalité, découlant du principe de Carnot, ne peut être appliquée aux systèmes qui nous occupent à titre de théorème démontré; mais elle peut leur être étendue à titre d'hypothèse; c'est donc une *hypothèse* que nous ferons en énonçant la proposition suivante :

Supposons que notre système décrive un cycle fermé, isothermique, formé de lignes d'équilibre; ce cycle sera forcément irréversible ; nous admettrons que l'inégalité (19) *est vérifiée pour un tel cycle.*

On peut écrire, pour tout cycle fermé et isothermique,

$$E dQ = - E \frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx + X dx.$$

D'ailleurs, pour tout cycle fermé et isothermique,

$$\int \frac{\partial U(x, T)}{\partial x} dx = 0.$$

L'inégalité (19) peut donc être remplacée par la suivante :

$$\int X dx > 0. \tag{20}$$

Appliquons d'abord cette inégalité à un cycle simple, infiniment petit.

Le segment ascendant et le segment descendant d'un cycle simple sont rencontrés chacun au moins en un point par la ligne des états naturels;

Digitized by Google

d'ailleurs, si l'on prend ces segments assez petits, chacun d'eux ne pourra rencontrer plus d'une fois la ligne des états naturels; le contour d'un cycle fermé simple, infiniment petit, sera donc rencontré en deux points M_1, M_2 (fig. 4) par la ligne des états naturels.

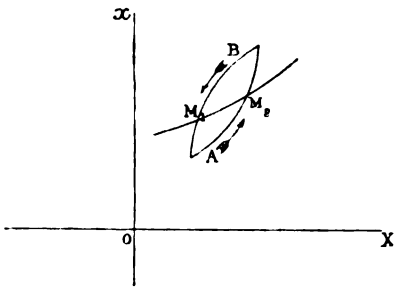


FIG. 4.

L'inégalité (20) exige qu'un observateur qui parcourt le contour du cycle ait constamment à sa *gauche* l'aire limitée par le contour.

Supposons que le sens de parcours du cycle soit le sens dans lequel on rencontre les points $M_1AM_2BM_1$.

La ligne des états naturels coupe l'aire du cycle en deux aires partielles, extérieures l'une à l'autre, dont l'une est située à droite de la ligne des états naturels et l'autre à gauche. Parcourons les contours de ces deux aires, de façon que la partie commune à chacun de ces contours et aux cycles soit décrite dans le même sens que sur le cycle. Ces contours partiels seront alors décrits dans l'ordre suivant : $M_1AM_2M_1$, $M_1M_2BM_1$. On voit sans peine que l'observateur qui décrit dans un tel sens chacun de ces contours a, à sa gauche, l'aire limitée par ce contour.

L'une de ces aires est en entier à droite de la ligne des états naturels, l'autre tout entière à gauche; prenons celle qui est tout entière à droite; supposons, pour fixer les idées, que ce soit celle qui limite le contour $M_1AM_2M_1$.

Lorsque l'observateur décrit le segment M_2M_1 sur la ligne des états naturels, il a à sa *gauche* l'aire $M_1AM_2M_1$, laquelle est à *droite* de la ligne des états naturels; or, un observateur qui monte la ligne des états naturels a à sa droite la région qui est à droite de cette ligne, et à sa gauche la région qui est à gauche de cette ligne; au contraire, un observateur qui descend la ligne des états naturels a à sa droite la région qui est à gauche de cette ligne, et à sa gauche la région qui est droite de cette ligne; donc un observateur qui décrit le segment M_2M_1 *descend* la ligne des états naturels; c'est-à-dire que l'on a

(21). . . . . $x_2 > x_1$.

Digitized by Google

Les deux points M_1, M_2 sont sur la ligne des états naturels; on a donc

$$f(x_1, X_1) = 0, \qquad f(x_2, X_2) = 0,$$

et par conséquent

$$(22). \quad \ldots \ldots \int_{M_1AM_2} \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} dX \right] = 0.$$

Mais M_1AM_2 est une ligne isothermique d'équilibre; on a donc, pour tout élément de cette ligne,

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} dx + f(x, X)|dx|.$$

L'égalité (22) devient donc

$$\int_{M_1AM_2} \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} dx + \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| \right] = 0,$$

ou bien

$$\int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| = -\int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} \left[\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} \right] dx,$$

ou enfin

$$(23). \quad \ldots \int_{M_1AM_2} \frac{\partial f(x, X)}{\partial X} f(x, X)|dx| = -\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi} \left[\frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}} + \frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} \right] (x_2 - x_1),$$

(ξ, Ξ) étant un point du plan infiniment voisin des points M_1, A, M_2.

Le premier membre de l'égalité (23) est positif. En effet, par le point (x, X), menons une parallèle à l'axe OX; elle rencontre la ligne des états naturels en un point (x, X') infiniment voisin de (x, X); on a d'ailleurs

$$f(x, X') = 0$$

Digitized by Google

et, par conséquent,

$$f(x, X) = \frac{\partial f(x, X)}{\partial X}(X - X'),$$

ce qui permet d'écrire le premier membre de l'égalité (23)

$$\int_{M_1AM_2} (X - X') \left[\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}\right]^2 |dx|.$$

Cette quantité est évidemment positive, car la ligne M_1AM_2 est tout entière à droite de la ligne des états naturels, en sorte que $(X - X')$ est positif tout le long du contour d'intégration.

Le second membre de l'égalité (23) doit être positif; or, d'après l'inégalité (21), $(x_2 - x_1)$ est positif; si l'on remarque que le point (ξ, Ξ) est infiniment voisin de la ligne des états naturels, on arrive à la conclusion suivante :

La proposition de Clausius exige que l'on ait, en tout point de la ligne des états naturels, l'inégalité

$$(24). \quad \frac{\partial f(x, X)}{\partial X}\left[\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\right] < 0.$$

Cette inégalité (24) entraîne certaines conséquences qu'il importe de mettre de suite en évidence.

La fonction $f(x, X)$ est continue, par hypothèse; elle ne change donc de signe qu'en passant par 0, ce qui a lieu seulement au moment où le point (x, X) traverse la ligne des états naturels.

La ligne des états naturels partage donc le plan en deux régions; dans l'une, $f(x, X)$ est constamment positif; dans l'autre, $f(x, X)$ est constamment négatif.

Si la région où $f(x, X)$ est positif est à droite de la ligne des états naturels, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ sera positif en tous les points de cette ligne. Si la région où $f(x, X)$ est positif est à gauche de la ligne des états naturels, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ est négatif en

Digitized by Google

tous les points de cette ligne. En toutes circonstances, $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ garde un signe invariable en tous les points de la ligne des états naturels. D'après l'inégalité (24), il en est de même de

$$\frac{\frac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}} + \frac{d^2 \mathcal{F}(x)}{dx^2}.$$

Nous interpréterons tout à l'heure cette conséquence; pour le moment, nous allons en faire usage pour démontrer la réciproque de la proposition que nous venons d'établir; nous allons prouver que *si l'inégalité* (24) *est vérifiée en tout point de la ligne des états naturels, on a, pour tout cycle fermé isothermique,*

$$\int X dx > 0.$$

Considérons un cycle isothermique quelconque. La ligne qui le représente est certainement coupée, au moins en deux points, par la ligne des états naturels. Plus généralement, supposons-la coupée en n points que l'on rencontre, en parcourant le cycle, dans l'ordre suivant : M_1, M_2, ..., M_{n-1}, M_n. Le cycle sera désigné ainsi :

$$M_1 A_1 M_2 \backslash_2 M_3 \dots M_{n-1} A_{n-1} M_n A_n M_1.$$

Il s'agit de prouver que l'on a

$$(25). \quad \dots \int_{M_1 A_1 M_2} X dx + \int_{M_2 A_2 M_3} X dx + \dots + \int_{M_{n-1} A_{n-1} M_n} X dx + \int_{M_n A_n M_1} X dx > 0.$$

Soit $M_p B_p M_{p+1}$ le segment de la ligne des états naturels qui relie le point M_p au point M_{p+1}. Il est aisé de voir que l'on a identiquement

$$(26). \quad \dots \int_{M_1 B_1 M_2} X dx + \int_{M_2 B_2 M_3} X dx + \dots + \int_{M_{n-1} B_{n-1} M_n} X dx + \int_{M_n B_n M_1} X dx = 0,$$

car, au cours de ces intégrations, chaque élément de la ligne des états

Digitized by Google

naturels compris entre les deux points M_i extrêmes a été parcouru autant de fois dans un sens que dans l'autre. En vertu de cette égalité (26), l'inégalité à prouver (25) peut s'écrire :

$$\left(\int_{M_1A_1M_2} X dx - \int_{M_1B_1M_2} X dx\right) + \left(\int_{M_2A_2M_3} X dx - \int_{M_2B_2M_3} X dx\right) + \cdots + \left(\int_{M_nA_nM_1} X dx - \int_{M_nB_nM_1} X dx\right) > 0.$$

Nous allons, pour prouver cette inégalité, démontrer que chacun des binômes qui en forment le premier membre est séparément positif.

Considérons, par exemple, le premier.

La ligne M_1AM_2 ne rencontre la ligne des états naturels qu'en ses deux extrémités, M_1, M_2; elle est donc tout entière à gauche de la ligne des états naturels ou tout entière à droite; pour fixer les idées, supposons-la tout entière à droite.

Pour que la quantité

$$\int_{M_1A_1M_2} X dx - \int_{M_1B_1M_2} X dx$$

soit positive, il suffit qu'un observateur, qui décrit le contour $M_1A_1M_2B_1M_1$, ait constamment à sa gauche l'aire limitée par ce contour; et, pour cela, il suffit qu'il l'ait à sa gauche, lorsqu'il décrit une partie quelconque de ce contour, par exemple le segment $M_2B_1M_1$.

Pour que l'observateur, décrivant le segment $M_2B_1M_1$, ait constamment à sa gauche l'aire limitée par le contour $M_1A_1M_2B_1M_1$, laquelle est à droite de la ligne des états naturels, il faut et il suffit qu'il descende la ligne des états naturels. Si donc on désigne par (x_1, X_1), (x_2, X_2) les coordonnées des points M_1, M_2, il suffit de prouver que l'on a

(27). . . . . $x_2 > x_1$.

Or, on a

(28) . . . . . $X_2 - X_1 = \int_{M_1A_1M_2} dX = \int_{M_1B_1M_2} dX.$

Digitized by Google

La ligne $M_1A_1M_2$ étant une ligne isothermique d'équilibre, on a, tout le long de cette ligne,

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx + f(x, X)\,|dx|.$$

Le long de la ligne $M_1B_1M_2$, l'équation

$$f(x, X) = 0$$

différentiée, nous donne

$$dX = -\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\,dx.$$

L'identité (28) peut donc s'écrire :

$$(29)\quad \ldots \int_{M_1A_1M_2}\left[\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx + f(x, X)\,|dx|\right] + \int_{M_1B_1M_2}\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\,dx = 0.$$

Mais on a identiquement

$$\int_{M_1A_1M_2}\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx = \int_{M_1B_1M_2}\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}\,dx = \frac{d\mathcal{F}(x_2)}{dx_2} - \frac{d\mathcal{F}(x_1)}{dx_1}.$$

L'identité (29) peut donc s'écrire :

$$(30)\quad \ldots \int_{M_1A_1M_2} f(x, X)\,|dx| = -\int_{M_1B_1M_2}\left[\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}\right]dx.$$

L'expression

$$\frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}$$

Digitized by Google

a constamment le même signe tout le long de la ligne $M_1B_1M_2$. Si donc on désigne par (ξ, Ξ) un point de cette ligne, l'égalité (30) pourra s'écrire :

$$(31). \quad \int_{M_1A_1M_2} f(x, X)\,|dx| = -\left[\frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}}\right](x_2 - x_1).$$

La ligne $M_1A_1M_2$ est tout entière à droite de la ligne des états naturels ; par conséquent $f(x, X)$ a, en tout point de cette ligne, un signe constant ; ce signe est celui que la quantité $\frac{\partial f(x, X)}{\partial X}$ prend tout le long de la ligne des états naturels ; le premier membre de l'égalité (31) a donc le signe de $\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}$. Mais, d'après l'inégalité (24),

$$\left[\frac{d^2\mathcal{F}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}}\right]$$

est de signe contraire à $\frac{\partial f(\xi, \Xi)}{\partial \Xi}$. L'égalité (31) exige donc que $(x_2 - x_1)$ soit positif, ce qui démontre l'inégalité (27).

§ IV. — *Sens des modifications permanentes.*

La quantité

$$(32). \quad K = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}$$

garde un signe invariable tout le long de la ligne des états naturels. Ce signe s'interprète géométriquement.

Le coefficient angulaire α de la tangente à une ligne ascendante d'équilibre sera donné par l'égalité

$$(33). \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} + f(x, X).$$

Digitized by Google

Le coefficient angulaire β de la tangente à une ligne descendante d'équilibre sera donné par l'égalité

$$(33^{bis}). \quad \frac{1}{\beta} = \frac{dX}{dx} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2} - f(x, X).$$

En un point de la ligne des états naturels, la ligne ascendante est tangente à la ligne descendante et l'on a

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} = \frac{d^2\mathcal{F}(x)}{dx^2}.$$

D'autre part, le coefficient angulaire γ de la tangente à la ligne des états naturels est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, X)}{\partial X}}.$$

L'égalité (32) peut donc s'écrire :

$$K = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\gamma}.$$

On voit alors qu'il existe deux catégories de systèmes :

1° *Systèmes de la première catégorie.* — K est positif tout le long de la ligne des états naturels. La ligne des états naturels monte plus vite de gauche à droite que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent par chacun de ses points; *toute ligne ascendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de gauche à droite; toute ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de droite à gauche.*

2° *Systèmes de la deuxième catégorie.* — K est négatif tout le long de la ligne des états naturels. La ligne des états naturels monte moins vite de

Digitized by Google

gauche à droite que la ligne ascendante et la ligne descendante qui passent par chacun de ses points; *toute ligne ascendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de droite à gauche; toute ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne des états naturels de gauche à droite.*

D'après ce que nous avons vu, *pour les systèmes de la première catégorie,* $f(x, X)$ *est positif à gauche de la ligne des états naturels et négatif à droite.* Ce résultat, comparé aux égalités (33) et (33^{bis}), montre que $(\alpha - \beta)$ est négatif à gauche de la ligne des états naturels et positif à droite. *Une ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, qui coupe une ligne ascendante, la traverse de droite à gauche si la rencontre a lieu à droite de la ligne des états naturels; et de gauche à droite, si la rencontre a lieu à gauche de la ligne des états naturels.*

Pour les systèmes de la seconde catégorie, $f(x, X)$ *est négatif à gauche de la ligne des états naturels et positif à droite.* Ce résultat, comparé aux égalités (33) et (33^{bis}), montre que $(\alpha - \beta)$ est positif à gauche de la ligne des états naturels et négatif à droite. *Une ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, qui coupe une ligne ascendante, la traverse de gauche à droite si la rencontre a lieu à droite de la ligne des états naturels; et de droite à gauche, si la rencontre a lieu à gauche de la ligne des états naturels.*

Ces deux catégories de systèmes correspondent à deux types différents de cycles simples.

Lorsqu'on parcourt un cycle simple, il est un point A où l'on quitte la ligne ascendante pour suivre la ligne descendante, et un point B où l'on quitte la ligne descendante pour suivre la ligne ascendante. De tous les points du cycle, A est celui qui correspond à la plus grande valeur de x et B celui qui correspond à la plus petite. Nous dirons que A est l'*extrémité supérieure* du cycle et B l'*extrémité inférieure.*

L'observateur qui décrit le cycle doit avoir à sa gauche l'aire que limite le contour du cycle; dès lors, on voit sans peine qu'à l'extrémité supérieure, la ligne descendante, suivie dans son sens de parcours, traverse la ligne ascendante de droite à gauche, et qu'à l'extrémité inférieure elle la traverse de gauche à droite.

Digitized by Google

On obtient alors immédiatement les propositions suivantes :

Lorsqu'un système de la première catégorie décrit un cycle simple, l'extrémité supérieure A *est à droite de la ligne* N'N *des états naturels, et l'extrémité inférieure* B *est à gauche* (fig. 5).

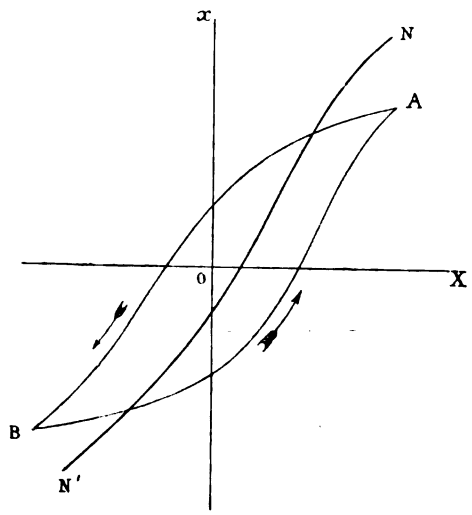


FIG. 5.

Lorsqu'un système de la seconde catégorie décrit un cycle simple, l'extrémité supérieure A *est à gauche de la ligne* N'N *des états naturels, et l'extrémité inférieure* B *est à droite* (fig. 6).

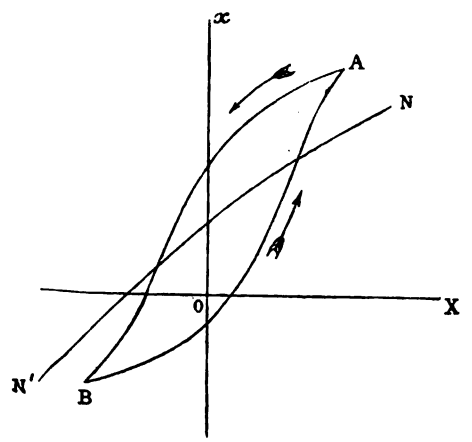


FIG. 6.

Nous allons retrouver sous diverses formes l'opposition entre les systèmes qui appartiennent à la première catégorie et les systèmes qui appartiennent à la seconde catégorie.

Mais, avant de pousser plus loin, il est nécessaire de faire une remarque :

La quantité K dépend de la température; elle peut donc être positive tout le long de toutes les lignes d'états naturels qui se rapportent à des températures inférieures à une certaine limite et négative pour les lignes qui se rapportent à des températures supérieures à cette limite; elle peut, au contraire, être négative pour les premières et positive pour les dernières; en d'autres termes, il peut exister une *température d'inversion* pour laquelle le système passe d'une catégorie à l'autre.

Dans ce qui va suivre, il nous arrivera de supposer la température variable; mais nous supposerons toujours les variations de la température renfermées dans des limites assez étroites pour qu'une température d'inver-

Digitized by Google

sion ne puisse être franchie; pour toutes les températures étudiées, le système appartiendra à la même catégorie.

Cela posé, imaginons qu'une transformation virtuelle, isothermique ou non, fasse passer le système par une suite d'états d'équilibre et supposons cette transformation soumise aux restrictions suivantes :

1° La température du système a la même valeur T_0 au début et à la fin de la transformation;

2° L'action extérieure X a la même valeur X_0 au commencement et à la fin de la transformation;

3° Les états par lesquels passe le système, sauf peut-être l'état initial et l'état final, ne sont certainement pas des états naturels.

La variable normale x aura, en général, à la fin de la transformation, une valeur x_1 différente de sa valeur initiale x_0. La différence $(x_1 - x_0)$ est la *modification permanente* éprouvée par le système. Nous allons chercher le signe de cette modification permanente.

Pour chaque élément de la transformation subie par le système, nous pouvons écrire :

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T) |dx|.$$

Intégrons les deux membres de cette égalité pour la transformation tout entière, en remarquant que

$$\int dX = 0,$$

$$\int \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT \right] = \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0},$$

et nous aurons

$$(34). \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0} = -\int f(x, X, T) |dx|.$$

D'après notre troisième restriction, $f(x, X, T)$ ne peut changer de signe

Digitized by Google

le long de la ligne de transformation ; d'après l'inégalité

$$(13). \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} > 0,$$

le premier membre de l'égalité (34) a le signe $(x_1 - x_0)$. L'égalité (34) nous permet donc d'énoncer le théorème suivant :

Le signe de la modification permanente $(x_1 - x_0)$ *est contraire au signe invariable de la quantité* $f(x, X, T)$ *le long de la transformation considérée.*

Ce théorème conduit à des conséquences opposées selon qu'on l'applique aux systèmes de la première catégorie ou aux systèmes de la seconde catégorie.

Portons les trois variables X, T, x, sur trois axes de coordonnées rectangulaires orientés (fig. 7), comme le sont habituellement en géométrie analytique, les axes Ox, Oy, Oz. L'équation

$$f(x, X, T) = 0$$

représentera, par rapport à ces axes, une certaine surface que nous nommerons *surface des états naturels* ; les sections de cette surface par des plans normaux à OT sont les lignes des états naturels relatives aux diverses températures.

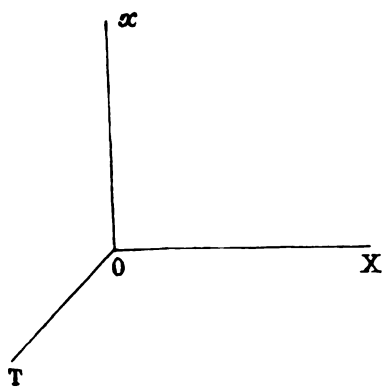


FIG. 7.

Systèmes de la première catégorie. — On voit sans peine que, pour ces systèmes, $f(x, X, T)$ est positif au-dessus de la surface des états naturels et négatif au-dessous de cette surface. Le théorème précédent fournit alors cette proposition :

Une transformation accomplie en entier au-dessus de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle Ox, entraîne une modification permanente négative ; une transformation accomplie en entier au-dessous de la surface des états naturels et dont les deux points extrêmes sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modifica-

Digitized by Google

tion permanente positive; d'une manière générale, *le système éprouve une modification permanente qui rapproche le point figuratif de la surface des états naturels.*

Systèmes de la deuxième catégorie. — Pour ces systèmes, $f(x, X, T)$ est négatif au-dessus de la surface des états naturels et positif au-dessous de cette surface. Le théorème précédent fournit alors l'énoncé que voici :

Une transformation accomplie en entier au-dessus de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modification permanente positive; une transformation accomplie en entier au-dessous de la surface des états naturels et dont les deux extrémités sont sur une même parallèle à Ox, entraîne une modification permanente négative; dans les deux cas, *le système éprouve une modification permanente qui éloigne le point figuratif de la surface des états naturels.*

Considérons, en particulier, pour un système de la seconde catégorie, une transformation isothermique dont l'état initial soit un état naturel; supposons qu'à la fin de la transformation l'action extérieure reprenne sa valeur initiale; supposons enfin que la transformation ne traverse pas la ligne des états naturels. $f(x, X, T)$, nul au début de la transformation, gardera pendant toute la durée de la transformation le signe pris au bout du premier élément (dx, dX) de cette transformation. Or, au bout de ce premier élément, on a

$$(35) \quad \ldots \ldots \quad f(x, X, T) = \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} dx + \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0} dX.$$

D'ailleurs, le point (x_0, X_0) etant un état naturel, on a

$$dX = \frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} dx.$$

L'égalité (35) peut donc s'écrire :

$$(36) \quad \ldots \ldots \quad f(x, X, T) = \frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} \left[\frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0}} \right] dx.$$

Digitized by Google

Mais, pour les systèmes de la seconde catégorie, on a

$$\frac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0} > 0,$$

$$\frac{d^2\mathcal{F}(x_0)}{dx_0^2} + \frac{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial f(x_0, X_0)}{\partial X_0}} < 0.$$

L'égalité (36) nous apprend alors que $f(x, X, T)$ a, tout le long de la transformation, un signe contraire à celui que prend dx durant le premier élément de la transformation. Donc, *lorsqu'un système de la seconde catégorie éprouve, à partir d'un état naturel, une transformation isothermique qui ne traverse pas la ligne des états naturels et qui ramène l'action extérieure à sa valeur initiale, le système éprouve une modification permanente de même sens que la modification éprouvée durant le premier élément de la transformation.*

Les systèmes de la première catégorie ne peuvent donner lieu à une proposition analogue; si, partant d'un état naturel, on cherche une transformation isothermique qui ramène l'action extérieure à sa valeur initiale, on sera amené à traverser la ligne des états naturels.

§ V. — *Stabilité ou instabilité des états naturels.*

Le sens des modifications permanentes oppose l'une à l'autre les deux catégories de systèmes que nous avons eu à distinguer; cette opposition se marque encore dans les théorèmes que nous allons démontrer et qui ne sont qu'un autre aspect des théorèmes précédents.

Imaginons que l'action extérieure à laquelle un système est soumis oscille de très petites quantités autour d'une valeur fixe X_0, tandis que la température à laquelle il est porté subit de petites variations autour d'une température fixe T_0; supposons ces variations assez lentes pour que le système soit

Digitized by Google

constamment en équilibre. Pour chaque élément de la transformation, nous aurons

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T) |dx|.$$

Intégrons les deux membres de cette équation; supposons le nombre des oscillations très grand, de telle sorte de $\int |dx|$ ait une valeur finie, et négligeons les quantités infiniment petites, nous aurons

$$(57). \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0} + \int f(x, X_0, T_0) |dx| = 0,$$

x_0 étant la valeur initiale de x, et x_1 sa valeur finale.

Discutons les conséquences que cette égalité entraine pour chacune des deux catégories de systèmes.

Systèmes de la première catégorie. — Supposons tout d'abord que l'état initial ne soit pas un état naturel; si la transformation considérée doit atteindre la surface des états naturels, nous ne considérerons qu'une partie de cette transformation, partie antérieure à cette rencontre; moyennant cette convention, $f(x, X_0, T_0)$ aura, tout le long de la ligne de transformation, un signe constant; ce sera le signe + si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessus de la ligne des états naturels, et le signe — si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessous de la ligne des états naturels. Si l'on remarque que $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}$ est constamment positif, l'égalité (37) montre que $(x_1 - x_1)$ est négatif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, et positif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Prenons un système de la première catégorie dans un état (x_0, X_0, T_0) *qui ne soit pas un état naturel; faisons osciller l'action extérieure de petites quantités autour de la valeur* X_0 *et la température de petites quantités au voisinage de la valeur* T_0; *au bout d'un grand nombre d'oscillations, l'état du système se sera rapproché de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *qui correspond à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

Supposons, pour fixer les idées, x_0 inférieur à ξ. On ne pourra fixer à x_1

Digitized by Google

aucune limite inférieure à ξ. Supposons, en effet, que x_1 ne puisse surpasser une certaine quantité χ, elle-même inférieure à ξ. La différence

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right]$$

ne pourrait pas surpasser

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\chi, T_0)}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right],$$

quantité finie; d'autre part, si nous désignons par φ la limite inférieure, certainement différente de 0, des valeurs prises par $|f(x, X_0, T_0)|$ lorsque x varie de x_0 à χ, la quantité $\int f(x, X_0, T_0)\,|dx|$ serait une quantité négative dont la valeur absolue ne pourrait être inférieure à $\varphi \int |dx|$; or, en faisant croître indéfiniment le nombre des oscillations, on peut amener cette quantité à surpasser n'importe quelle limite; il arriverait donc forcément un moment où l'égalité (37) ne serait plus vérifiée; x_1 ne peut donc admettre d'autre limite supérieure que la quantité ξ et nous pouvons compléter l'énoncé précédent de la manière suivante :

Lorsque le nombre des oscillations auxquelles le système est soumis croît indéfiniment, l'état (x_1, X_0, T_0) *du système tend vers l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *relatif à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

Imaginons maintenant que le système soit pris dans un état initial (x_0, X_0, T_0) infiniment voisin de l'état naturel (ξ, X_0, T_0). Supposons que l'action extérieure X et la température T éprouvent une infinité d'oscillations infiniment petites et voyons si la variable x pourra s'éloigner de ξ d'une quantité finie. Cela est évidemment impossible, car, aussitôt que x serait éloigné de ξ d'une quantité finie, on pourrait reprendre le raisonnement précédent et démontrer que x ne peut que s'approcher de ξ. On peut donc énoncer encore la proposition suivante :

Si un système de la première catégorie est pris dans un état naturel (ξ, X_0, T_0) *et si l'action extérieure* X *et la température* T *oscillent de très petites quantités autour des valeurs* X_0, T_0, *la variable normale* x *oscille de très petites quantités au voisinage de la valeur* ξ.

Digitized by Google

Ces divers théorèmes peuvent se condenser en cet énoncé :

L'état naturel (ξ, X_0, T_0) *est l'état d'équilibre* DÉFINITIF *d'un système de la première catégorie soumis à une action extérieure* SENSIBLEMENT *constante et égale à* X_0 *et porté à une température* SENSIBLEMENT *constante et égale à* T_0.

Systèmes de la seconde catégorie. — Supposons, tout d'abord, que l'état initial ne soit pas un état naturel ; nous pourrons toujours limiter la transformation avant que la ligne des états naturels soit atteinte; moyennant cette convention, tout le long de la ligne de transformation, $f(x, X_0, T_0)$ aura un signe constant; ce sera le signe —, si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessus de la ligne des états naturels, et le signe +, si le point (x_0, X_0, T_0) est au-dessous de cette ligne. Comme $\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}$ est constamment positif, l'égalité (37) montre que $(x_1 - x_0)$ est positif si le point x_0 est au-dessus de la ligne des états naturels, et négatif si le point x_0 est au-dessous de la ligne des états naturels, ce qui conduit à l'énoncé suivant :

Prenons un système de la deuxième catégorie dans un état (x_0, X_0, T_0) *qui ne soit pas un état naturel; faisons osciller l'action extérieure au voisinage de la valeur* X_0 *et la température au voisinage de la valeur* T_0; *au bout d'un grand nombre d'oscillations, l'état du système se sera éloigné de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *qui correspond à la température* T_0 *et à l'action extérieure* X_0.

La valeur finale x_1 de la variable x s'éloignera indéfiniment de la valeur ξ, comme nous allons le voir. Supposons, pour fixer les idées, x_0 supérieur à ξ. Il est impossible de fixer, dans le champ des valeurs accessibles de x, une limite supérieure χ à x_1. En effet, la différence

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right]$$

ne pourrait pas dépasser

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}(\chi, T_0)}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T_0)}{\partial x_0}\right];$$

d'autre part, si nous désignons par φ la limite inférieure, certainement différente de 0, des valeurs prises par la quantité $|f(x, X_0, T_0)|$ lorsque x varie

Digitized by Google

de x_0 à χ, la quantité $\int f(x, X_0, T_0)$ serait une quantité négative dont la valeur absolue ne pourrait être inférieure à $\varphi \int |dx|$; or, en faisant croître le nombre des oscillations, on peut amener cette dernière quantité à surpasser n'importe quelle limite; on pourrait donc rendre le nombre des oscillations assez grand pour que l'égalité (37) cesse d'être vérifiée; x_1 ne peut donc admettre, dans le champ des valeurs accessibles de x, aucune limite supérieure; à l'énoncé précédent, nous pouvons adjoindre la proposition suivante :

Lorsque le nombre des oscillations auxquelles le système est soumis croît indéfiniment, l'état (x, X_0, T_0) *du système s'éloigne de l'état naturel* (ξ, X_0, T_0) *et s'en éloigne jusqu'aux confins des valeurs accessibles de* x.

Supposons maintenant que l'état initial soit un état naturel; si l'on fait varier d'une petite quantité l'action extérieure et la température, le système s'écartera dans un certain sens de l'état naturel; cette transformation produite, les oscillations infiniment petites de l'action extérieure et de la température écarteront indéfiniment le système de l'état naturel.

En résumé, *un système de la seconde catégorie, soumis à une action extérieure* SENSIBLEMENT *constante et à une température* SENSIBLEMENT *constante, se transforme indéfiniment.*

L'opposition entre les deux catégories de systèmes se marquera encore dans les théorèmes, corrélatifs des précédents, que nous allons maintenant établir.

Prenons l'égalité fondamentale

$$dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, X, T) |dx|,$$

qui, intégrée pour une transformation d'étendue finie, donne :

$$X_1 - X_0 = \frac{\partial \mathcal{F}(x_1, T)}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{F}(x_0, T)}{\partial x_0} + \int f(x, X, T) |dx|.$$

Appliquons cette égalité à la transformation suivante :

La température éprouvant de petites oscillations au voisinage de la valeur T_0, *on fait sans cesse varier l'action extérieure* X *de manière à corriger les variations de* x *et à garder à cette variable une valeur infiniment voisine de* x_0.

Digitized by Google

Si l'on néglige les termes infiniment petits, l'égalité précédente devient

$$(38). \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_1 - X_0 = \int f(x_0, X, T_0)\,|dx|.$$

En discutant cette égalité (38) comme nous avons discuté l'égalité (37), on parvient sans peine aux résultats suivants :

SYSTÈMES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE. — *Le terme principal de l'action extérieure* X_1 *varie dans un sens constant et tend vers la valeur* Ξ *pour laquelle* (x_0, Ξ, T_0) *est un état naturel du système.*

SYSTÈMES DE LA DEUXIÈME CATÉGORIE. — *Le terme principal de l'action extérieure* X_1 *varie dans un sens constant ; il s'éloigne indéfiniment de la valeur* Ξ *pour laquelle* (x_0, Ξ, T_0) *est un état naturel du système.*

Nous résumerons toutes ces propositions en disant que *les états naturels sont des états stables pour les systèmes de la première catégorie et des états instables pour les systèmes de la seconde catégorie.*

CHAPITRE II.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX DÉFORMATIONS ÉTUDIÉES EN ÉLASTICITÉ.

§ I. — *Traction.*

Les déformations permanentes que l'on rencontre en élasticité dans l'étude de la traction, de la torsion, de la flexion, nous fournissent des exemples très simples et très nets de déformations permanentes; tous les systèmes qui présentent ces déformations sont des systèmes de la *seconde catégorie.* Prenons pour types les déformations permanentes obtenues par traction.

Prenons un cylindre d'une substance homogène sur lequel agit un poids tenseur. Choisissons un état origine de ce cylindre, par exemple l'état naturel du cylindre à une température donnée (soit 0°) et pour un poids tenseur réduit à 0. Soient L_0, Ω_0, la longueur et la section du cylindre dans ces

Digitized by Google

conditions. Soit L la longueur du cylindre dans d'autres conditions. Nous pourrons prendre comme *variable normale* la dilatation linéaire :

$$(58). \quad l = \frac{L - L_0}{L_0}.$$

Soit P le poids tenseur; la tension rapportée à l'unité de surface de la section du cylindre dans l'état origine sera

$$(59). \quad \Theta = \frac{P}{\Omega_0}.$$

Le travail extérieur produit dans une modification infiniment petite du cylindre est

$$(40). \quad P dL = \Omega_0 L_0 \Theta dl,$$

$\Omega_0 L_0 \Theta$ est donc l'*action extérieure* correspondant à la variable normale l.

Cette action peut être *négative;* il suffit de supposer que le cylindre, appuyé sur un sol rigide par sa base inférieure, porte le poids P sur sa base supérieure.

Imaginons que le système soit exempt de déformations permanentes. Prenons, dans l'état origine, une masse cylindrique ayant une longueur égale à l'unité et une section égale à l'unité; dans l'état (l, T), cette masse admettrait un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(l, T)$.

Dans l'état (l, T), notre cylindre admettrait évidemment un potentiel thermodynamique interne $\Omega_0 L_0 \mathcal{F}(l, T)$. On aurait, dès lors,

$$\Omega_0 L_0 \Theta = \frac{\partial}{\partial l}\left[\Omega_0 L_0 \mathcal{F}(l, T)\right].$$

ou

$$\Theta = \frac{\partial \mathcal{F}(l, T)}{\partial l}.$$

De cette égalité, on déduirait

$$d\Theta = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l^2} dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l \, \partial T} dT$$

Digitized by Google

Cette égalité conviendrait à un système ne présentant pas de déformations permanentes; si l'on veut rendre possibles les déformations permanentes, on devra remplacer cette égalité par une égalité de la forme

$$(41). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\Theta = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l^2} dl + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(l, T)}{\partial l \, \partial T} dT + f(l, \Theta, T)\,|dl|.$$

Limitons d'abord le *champ des états accessibles.*

Ce champ sera limité du côté des valeurs positives de Θ, par la surface

$$\varphi(l, \Theta, T) = 0$$

qui représente la *condition de rupture du cylindre tendu* et, du côté des valeurs négatives de Θ, par la surface

$$\psi(l, \Theta, T) = 0$$

qui représente la *condition d'écrasement du cylindre chargé.*

Entre ces limites, l'expérience permettra de tracer les *lignes ascendantes d'équilibre,* que représente l'équation (41) lorsqu'on y suppose T constant et *dl* positif, et les *lignes descendantes d'équilibre,* que représente la même équation lorsqu'on y suppose T constant et *dl* négatif.

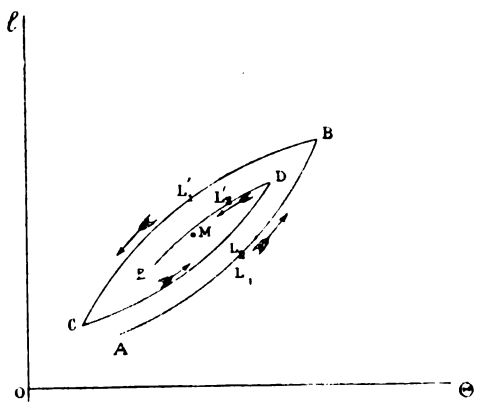


FIG. 8.

La *ligne des états naturels* sera représentée pour une température donnée par l'équation

$$(42) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(l, \Theta) = 0.$$

Pour déterminer par points cette ligne des états naturels, on opérera de la manière suivante :

Partant d'un état A par une ligne ascendante L_1 (fig. 8), on la suivra jusqu'à un certain état B, pour prendre alors la ligne descendante L'_1; on arrêtera celle-ci en C, avant sa seconde rencontre avec L_1, pour prendre la ligne ascendante L_2, que l'on suivra elle-même jusqu'à un point D, un peu

Digitized by Google

antérieur à sa seconde rencontre avec L'_1 ; en D, on prendra la ligne descendante L'_2, et ainsi de suite. On décrira de la sorte une espèce de spirale dont les spires, de plus en plus serrées, tendront vers un certain point M de la ligne des états naturels.

Tout état naturel est caractérisé par ce fait que les transformations infiniment petites effectuées au voisinage de ce point n'entraînent aucune déformation permanente; les lois de ces transformations sont conformes aux formules classiques de l'élasticité.

Prenons un cylindre dans l'état naturel où le poids tenseur est nul; si nous soumettons ce cylindre à une tension isothermique et si nous supprimons ensuite cette tension, le cylindre demeure allongé; si, au contraire, nous plaçons une charge sur la base supérieure de ce cylindre et si nous enlevons ensuite cette charge, le cylindre garde un raccourcissement permanent. Une transformation, partant d'un état naturel, communique au cylindre une déformation permanente de même sens que la déformation produite dans le premier moment de la transformation. Ce que nous avons dit au chapitre précédent nous montre qu'un cylindre soumis à la traction est un système de la seconde catégorie.

Dès lors, considérons un cylindre soumis à l'action d'une traction dont la valeur éprouve de légères oscillations et porté à une température qui éprouve de légères variations; si aucun obstacle ne le gêne, ce cylindre s'allongera graduellement jusqu'à se rompre. Considérons de même un cylindre de température très légèrement variable, qui porte sur sa base supérieure un poids presque constant; ce cylindre s'aplatira graduellement jusqu'à s'écraser.

Pour une même substance, ces effets se produiront d'autant plus rapidement que les oscillations de la température et de l'action extérieure seront plus fréquentes et de plus grande amplitude.

Pour des substances différentes, ces effets se produiront d'autant plus rapidement que la fonction $f(l, \Theta)$ qui leur correspond a de plus grandes valeurs; les substances molles, pour lesquelles la fonction f a une très grande valeur, manifesteront ces effets d'une manière très évidente; les substances qui ont une fonction f très petite et qui n'éprouvent que très difficilement des déformations permanentes, manifesteront ces effets avec une telle lenteur qu'ils deviendront pratiquement inobservables.

Digitized by Google

§ II. — *Torsion.*

Imaginons un cylindre homogène d'une certaine matière; prenons-le dans un certain état, par exemple l'état naturel qui correspond à une température déterminée et à l'action de toute force extérieure. Soient, dans cet état, L_0 sa longueur et Ω_0 sa section. Tordons ce cylindre de telle sorte que tous les points de sa base supérieure demeurent fixes, tandis que tous les points de sa base inférieure tournent, dans le sens positif, d'un angle α autour de l'axe du cylindre. Prenons pour variable normale l'*angle de torsion*

$$\omega = \frac{\alpha}{L_0}.$$

La base du cylindre est soumise à un couple dont M est le moment par rapport à l'axe du cylindre; $\frac{M}{\Omega_0} = C$ sera le moment de ce couple par unité de surface de la base prise dans l'état naturel.

Lorsque l'angle α augmente de $d\alpha$, la variable normale ω augmente de $\frac{d\alpha}{L_0}$. Le couple effectue un travail

$$d\mathcal{C}_e = M d\alpha = \Omega_0 L_0 C d\omega.$$

L'*action extérieure* relative à la variable normale ω est $\Omega_0 L_0 C$.

Prenons, dans le cylindre à l'état naturel, un élément matériel cylindrique ayant pour base $d\Omega_0$ et pour longueur dL_0. Dans le cylindre tordu, cet élément aurait pour potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(\omega, T)\, d\Omega_0 dL_0$. Le cylindre entier aura pour potentiel thermodynamique interne $\Omega_0 L_0 \mathcal{F}(\omega, T)$. Si la torsion n'entraînait aucune modification permanente, on aurait

$$\Omega_0 L_0 C = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\Omega_0 L_0 \mathcal{F}(\omega, T)\right] = \Omega_0 L_0 \frac{\partial \mathcal{F}(\omega, T)}{\partial \omega},$$

égalité d'où l'on déduirait

$$dC = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\omega, T)}{\partial \omega^2} d\omega + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\omega, T)}{\partial \omega\, \partial T} dT.$$

Digitized by Google

Si le cylindre est susceptible d'éprouver une torsion permanente, cette égalité devra être remplacée par

$$dC = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\omega, T)}{\partial \omega^2} d\omega + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\omega, T)}{\partial \omega \, \partial T} dT + f(\omega, C, T) |d\omega|.$$

Au sujet de cette égalité générale relative à la torsion, on pourra répéter ce que nous avons dit touchant la traction ; il y aura seulement à y adjoindre quelques détails particuliers qui sont les suivants :

1° A toute température, $\omega = 0$, $C = 0$ est un état naturel ; *la ligne des états naturels passe toujours par l'origine des coordonnées.*

Rien ne doit changer dans la théorie de la torsion, si l'on remplace à la fois ω, C, $d\omega$, dC par $-\omega$, $-C$, $-d\omega$, $-dC$. Donc :

2° *La ligne des états naturels a pour centre l'origine des coordonnées ;*

3° *Toute ligne descendante est symétrique d'une ligne ascendante par rapport à l'origine des coordonnées.*

§ III. — *Flexion.*

La flexion donne lieu à des remarques analogues de tout point à celles que nous avons indiquées à propos de la torsion ; nous laissons au lecteur le soin de les développer.

Il n'existe aucune série d'expériences faites d'une manière systématique qui vérifie dans tous les détails ce que nous venons de dire au sujet des déformations élastiques permanentes. Toutefois, on peut dire que la présente théorie s'accorde bien avec ce que l'on sait au sujet de ces déformations, toutes vagues et confuses que soient nos connaissances à ce sujet. En particulier, la plupart des observations faites par Coulomb, par M. G. Wiedemann, par MM. Berson et Bouasse, touchant les déformations permanentes produites par la torsion et la flexion s'expliquent bien dans notre système.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX CHANGEMENTS D'ÉTAT PHYSIQUE, ET, EN PARTICULIER, AU PHÉNOMÈNE DE LA TREMPE.

§ I. — *Caractères généraux de la trempe.*

Voici un chapitre à peine ébauché et presque réduit au titre ; nous croyons cependant que l'application de la théorie précédente aux changements d'état physique sera, dans l'avenir, féconde en résultats; beaucoup de phénomènes de faux équilibre, aujourd'hui mystérieux, seront, sans doute, éclairés et classés au moyen des principes que nous avons indiqués.

Parmi ces phénomènes, il n'en est qu'un dont l'étude soit assez avancée pour que nous puissions, avec quelque certitude, le rattacher à nos hypothèses générales; nous voulons parler du changement d'état qui constitue la *trempe*; l'étude du déplacement du 0° dans les thermomètres a donné sur la trempe du verre des renseignements suffisants pour que nous puissions regarder un corps susceptible de trempe comme un système de la *première catégorie.*

Soit x la variable normale qui, avec la température absolue T, fixe l'état du système. Soit X la force extérieure qui correspond à la variable x. Les valeurs correspondantes de dx, dT, dX, sont, dans un système continuellement en équilibre, liées par l'équation

$$(8). \quad \ldots \quad dX = \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \, \partial T} dT + f(x, T, X) |dx|.$$

Au chapitre premier, nous nous sommes surtout occupés d'étudier les conséquences de cette relation en supposant la température T maintenue constante; nous allons maintenant supposer que l'action extérieure X soit maintenue constante et chercher les conséquences qu'entraîne la relation (8) lorsqu'on fait varier T.

Digitized by Google

La relation (8) se réduit alors à la relation

$$(45). \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T} dT + f(x, T, X) |dx| = 0,$$

où nous pourrons cesser de faire figurer explicitement la constante X dans l'expression de $f(x, T, X)$.

Supposons, pour fixer les idées, que lorsque la température a un sens constant de variation, la variable x ait aussi un sens constant de variation; cette hypothèse n'est nullement nécessaire, mais elle aidera à simplifier notre exposé; on verra sans peine comment ce dernier devrait être modifié si l'on repoussait cette hypothèse.

En remplaçant au besoin x par $(-x)$, nous pourrons toujours faire que $\frac{dx}{dT}$ soit constamment positif.

Prenons, dans le plan, OT pour axe des abscisses, et Ox pour axe des ordonnées. Si nous faisons croître T, le point figuratif de l'état d'équilibre du corps décrira l'une des lignes représentées par l'équation différentielle

$$(44). \quad \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T)\right] dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T} dT = 0.$$

Nous nommerons ces lignes les *lignes ascendantes* dans le plan (T, x).

Si nous faisons décroître T, le point figuratif de l'état d'équilibre du corps décrira l'une des lignes représentées par l'équation différentielle

$$(44^{bis}). \quad \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T)\right] dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x \partial T} dT = 0.$$

Nous nommerons ces lignes les *lignes descendantes* dans le plan (T, x).

Nous admettrons que, *par chaque point accessible du plan des* (T, x) *passe une et une seule ligne ascendante, une et une seule ligne descendante.*

Ce que nous avons dit, au § II du chapitre premier, au sujet des lignes ascendantes et descendantes dans le plan des (X, x), nous pouvons le répéter ici au sujet des lignes ascendantes et descendantes dans le plan des (T, x); nous pourrons, dans ce plan, tracer des cycles d'hysteresis et,

Digitized by Google

en particulier, des *cycles simples*, formés d'une seule ligne ascendante et d'une seule ligne descendante; sur chacune des deux branches ascendante et descendante d'un cycle simple se trouve au moins un *état naturel*, vérifiant l'égalité

$$(45). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad f(x, T) = 0.$$

L'équation (45) représente, dans le plan des (T, x), la *ligne des états naturels*.

Nous supposerons que le système auquel nous avons affaire soit un système de la *première catégorie*. Dès lors, les théorèmes démontrés au § V du chapitre premier nous apprennent que le système, maintenu à la température constante T sous l'action constante X, tendra vers l'état naturel (ξ, T) vérifiant l'égalité

$$f(\xi, T, X) = 0.$$

Cette modification se produira progressivement, non pas que le temps intervienne directement dans la transformation, mais parce que la constance de T et de X est non pas rigoureuse, mais approchée; les petites oscillations que la température et l'action extérieure éprouvent autour de leur valeur moyenne constante sont la cause de cette modification progressive qui tend d'autant plus vite vers son terme que les oscillations de T et de X sont plus fréquentes et de plus grande amplitude.

Portons un corps à une certaine température Θ; maintenons-le au voisinage de cette température jusqu'à ce qu'il ait sensiblement acquis l'état naturel correspondant. Refroidissons-le ensuite jusqu'à la température T, et étudions l'état de ce corps.

Supposons, en premier lieu, que le refroidissement ait lieu avec une extraordinaire lenteur; le corps est maintenu, à chacune des températures intermédiaires entre Θ et T, pendant un temps extrêmement long; les petites oscillations de la température et de l'action extérieure lui font alors prendre, à chacune de ces températures intermédiaires, l'état naturel correspondant. Le point figuratif du corps qui se refroidit décrit la ligne des états naturels

Digitized by Google

représentée par l'équation (45). Lorsque la température a atteint la valeur T, le corps est dans un certain état ξ *qui est indépendant de la température* Θ *à laquelle il a été porté et qui ne dépend que de la température* T; un pareil corps est dit *recuit.*

Supposons, au contraire, que le refroidissement soit extrêmement rapide; le corps demeure très peu de temps à chaque température intermédiaire entre Θ et T; les oscillations de l'action extérieure et de la température n'ont pas le temps de se produire et d'influer sur l'état du corps; le point figuratif de cet état décrit la ligne descendante qui coupe la ligne des états naturels au point d'abscisse Θ; le corps, ramené à la température T est dans un certain état x_0 *qui dépend seulement de la température* Θ *à laquelle il a été porté et de la température* T *à laquelle il est ramené;* un pareil corps est dit *trempé raide.*

Considérons enfin un cas intermédiaire entre les deux précédents; imaginons que la température du corps, passant de la valeur Θ à la valeur T éprouve des alternatives d'élévation et d'abaissement, sans jamais monter au-dessus de Θ. Le point figuratif décrira une ligne brisée, formée de portions ascendantes et de portions descendantes, et située tout entière du même côté que la ligne des états naturels par rapport à la ligne descendante suivie dans le cas précédent. Au moment où la température aura pris la valeur T, le corps sera dans un certain état x, qui dépendra de toutes les oscillations subies par la température; $(x - x_0)$ sera de même signe que $(\xi - x_0)$; le corps sera plus ou moins trempé.

§ II. — *Propriétés caractéristiques des corps recuits et trempés.*

Tant que la température demeure sensiblement constante et que l'action extérieure garde une valeur sensiblement invariable, un corps recuit n'éprouve aucun changement d'état; l'état de corps recuit est un état permanent. Au contraire, l'état d'un corps trempé, que l'on soumet à une température sensiblement constante et à une action extérieure sensiblement constante, varie lentement de manière à tendre vers l'état recuit; cette variation lente est due aux oscillations inévitables de la température et de la force extérieure.

Digitized by Google

Prenons un corps trempé à une certaine température T; portons-le à une température T′, peu différente de T, et ramenons-le à la température T; la variable x ne reviendra pas à sa valeur primitive x, mais à une valeur différente x'; le corps aura éprouvé une modification permanente dont la grandeur sera mesurée par $(x' - x)$; $(x' - x)$ sera une quantité très petite *du même ordre* que $(T' - T)$; cette modification permanente aura pour effet de rapprocher le corps de l'état recuit, de diminuer la trempe.

Si nous répétons la même expérience avec un corps qui est à l'état recuit pour la température T, nous trouverons que si $(T' - T)$ est une quantité très petite *du premier ordre*, $(x' - x)$ est une quantité très petite *du second ordre;* on peut donc dire qu'*une petite oscillation de la température ne fait éprouver à un corps recuit aucune modification permanente.*

§ III. — *Étude expérimentale de la trempe. — Déplacement du 0° des thermomètres.*

Prenons un réservoir thermométrique auquel on a soudé une tige du même verre divisée en parties d'égal volume intérieur; remplissons ce réservoir de mercure et observons la division n, comptée au-dessus d'un trait de repère gravé sur la tige, à laquelle le mercure affleure à chaque instant. Observons en même temps la température absolue T au moyen d'un instrument qui n'éprouve pas de modifications permanentes.

Supposons la pression extérieure maintenue constante et négligeons la différence entre la pression extérieure et la pression intérieure. Le volume spécifique du verre sera alors une fonction des deux variables x et T, $u(x, T)$.

Soit M la masse du verre considéré qui remplirait le réservoir jusqu'au trait de repère; soit μ la masse du même verre qui remplirait le volume d'une division; les masses M et μ sont indépendantes de x et de T.

Soit V_0 le volume à 0° du mercure que renferme l'appareil; soit k le coefficient de dilatation du mercure.

Nous aurons :

$$(46). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (M + n\mu)u(x, T) - V_0(1 + kT) = 0.$$

Digitized by Google

Cette égalité, différentiée, donne :

$$(47) \quad \ldots \mu u(x, T)\,dn + (M + n\mu)\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \left[(M + n\mu)\frac{\partial u}{\partial T} - V_0 k\right] dT = 0.$$

D'autre part, nous avons

$$(43) \quad \ldots \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x\,\partial T}\,dT + f(x, T)\,|dx| = 0.$$

Conservons l'hypothèse simplificatrice d'après laquelle dx est toujours de même signe que dT. Les égalités (47) et (43) conduisent alors aux conclusions suivantes :

Si dT est *positif*, on a

$$(48) \quad \ldots \mu u(x, T)\,dn - \left[\frac{(M + n\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} + f(x, T)} + V_0 k - (M + n\mu)\frac{\partial u}{\partial T}\right] dT = 0.$$

Si dT est *négatif*, on a

$$(48^{bis}) \quad \ldots \mu u(x, T)\,dn - \left[\frac{(M + n\mu)\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}(x, T)}{\partial x^2} - f(x, T)} + V_0 k - (M + n\mu)\frac{\partial u}{\partial T}\right] dT = 0.$$

Dans le plan des (T, n), nous aurons deux familles de lignes; en chaque point du plan passera une et une seule ligne de chaque famille; la ligne de la première famille passant en un point aura une tangente dont le coefficient angulaire $\frac{dn}{dT}$ sera donné par l'égalité (48); la ligne de la seconde famille passant au même point aura une tangente dont le coefficient angulaire $\frac{dn}{dT}$ sera donné par l'égalité (48^{bis}); ces deux lignes se couperont donc en général sous un certain angle; elles correspondent, dans le plan des (n, T), aux lignes ascendantes et descendantes du plan des (x, T).

Digitized by Google

Pour que les deux lignes ascendante et descendante qui passent par un même point du plan des (n, T) se touchent en ce point, il faut et il suffit que l'on ait

$$(45). \quad \ldots \quad f(x, T) = 0,$$

c'est-à-dire que ce point corresponde à un état naturel du corps. La suite de ces points formera une ligne qui correspondra, dans le plan des (n, T), à la ligne des états naturels dans le plan des (x, T).

La ligne des états naturels dans le plan des (n, T) serait représentée par l'équation obtenue en éliminant x entre les deux équations

$$(45). \quad \ldots \quad f(x, T) = 0,$$
$$(46). \quad \ldots \quad (M + n\mu)u(x, T) - V_0(1 + kT) = 0.$$

Soit

$$(49). \quad \ldots \quad \varphi(n, T) = 0,$$

cette équation; elle donnera, pour chaque température T, la division à laquelle affleure le mercure dans un thermomètre parfaitement recuit.

Si un thermomètre est recuit pour la température T et si on l'emploie seulement pour déterminer des températures peu différentes de T, le mercure reviendra à la même division lorsque la température reprendra la même valeur. Il y a donc intérêt, lorsqu'on doit employer un thermomètre à effectuer des déterminations dans une région peu étendue de l'échelle des températures, à se servir d'un thermomètre recuit pour une température moyenne de cette région. On réalisera cette condition en conservant le thermomètre dans une enceinte dont la température variera de petites quantités autour de celle pour laquelle ont veut recuire le thermomètre; ce procédé a été recommandé par divers observateurs, notamment par M. Raoult.

Prenons, à la température T, un thermomètre non recuit; faisons croître ou décroître la température d'une petite quantité, et ramenons la à la valeur T; la division n à laquelle affleure le mercure ne reviendra pas à sa valeur

Digitized by Google

primitive n, mais à une valeur différente n'; n' est plus voisin que n de la division ν où affleurerait le mercure dans le thermomètre recuit pour la température T.

En particulier, si la température T est celle de la glace fondante, on voit qu'il y aura eu *déplacement du* 0° du thermomètre.

Si un thermomètre non recuit est maintenu longtemps à une température sensiblement constante, les petites oscillations de la température feront varier lentement la division à laquelle affleure le mercure et la feront tendre vers la division à laquelle le mercure affleurerait dans le thermomètre recuit pour la température considérée.

Ces quelques indications suffiront à montrer comment la théorie précédente rend compte de toutes les particularités signalées par les constructeurs et les expérimentateurs qui ont étudié le phénomène du déplacement du 0° des thermomètres. Elle pourrait servir de guide à une étude rationnelle de ce phénomène encore si obscur et si confus. Cette étude rappellerait de tout point l'étude expérimentale, faite par M. Ewing, de l'hysteresis magnétique. C'est de cette dernière qu'il nous reste à parler.

CHAPITRE IV.

DE L'HYSTERESIS MAGNÉTIQUE.

Nous arrivons maintenant à l'étude d'une modification permanente dont les lois expérimentales sont beaucoup mieux connues que les lois auxquelles sont soumises les déformations étudiées dans les deux chapitres précédents; nous voulons parler du magnétisme rémanent, ou, pour parler le langage adopté aujourd'hui, de l'*hysteresis magnétique*.

La théorie de l'hysteresis magnétique ne peut pas, en toute rigueur, être regardée comme un cas particulier de la théorie générale développée au chapitre premier; on ne peut, en effet, étendre à un élément magnétique découpé à l'intérieur d'un aimant la notion d'*action extérieure;* de là des complications qui obligent à modifier le début de la théorie; ces modifications, d'ailleurs, portent uniquement sur le mode d'établissement de l'équation

Digitized by Google

fondamentale ; une fois cette équation établie, le reste de la théorie se poursuit comme au chapitre premier ; aussi nous sera-t-il inutile de reprendre les démonstrations développées dans ce chapitre.

§ I. — *Établissement de l'équation fondamentale de l'hysteresis magnétique.*

Considérons un élément magnétique, découpé à l'intérieur d'un corps aimanté. Appelons $\mathcal{V}$ la fonction potentielle de tout le magnétisme distribué soit sur ce corps, soit sur les aimants qui l'environnent ; si des courants circulent au voisinage de ce corps, il faudra en outre comprendre dans $\mathcal{V}$ la fonction potentielle de ces courants.

Les quantités

$$-\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

sont, en chaque point, les composantes d'une grandeur géométrique bien déterminée que nous désignerons par H. Au sujet de cette grandeur, nous formulerons une restriction :

PREMIÈRE RESTRICTION. — *La grandeur* H *a, pour l'élément considéré, une direction invariable.*

Les variables normales qui servent, en général, à définir l'état magnétique d'un élément sont les trois composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, de l'intensité d'aimantation ; à l'égard de ces variables, nous formulerons une nouvelle restriction :

DEUXIÈME RESTRICTION. — *L'intensité d'aimantation est, pour l'élément magnétique considéré, constamment dirigée comme la grandeur* H.

Nous ferons l'*hypothèse* suivante : *Si la première restriction est constamment vérifiée et si la seconde restriction l'est à un instant, elle l'est à tous les instants postérieurs.*

Cette deuxième restriction nous permet de définir l'état d'aimantation de l'élément au moyen d'une seule variable normale, la grandeur $\mathfrak{M}$ de

Digitized by Google

l'*intensité d'aimantation*, comptée positivement dans le même sens que la grandeur H.

Dans ce qui va suivre, nous n'étudierons un corps aimanté que si les restrictions précédentes sont vérifiées pour chacun de ses éléments; l'étude que nous ferons ainsi sera très particulière; ce sera un acheminement vers la théorie générale de l'hysteresis magnétique.

Si le corps étudié était parfaitement doux, les grandeurs H et $\mathfrak{M}$ seraient liées par la relation :

$$\mathfrak{M} = F(\mathfrak{M}, T)\,H,$$

$F(\mathfrak{M}, T)$ étant la fonction magnétisante. On en déduirait

$$dH = \left\{ \frac{1}{F(\mathfrak{M}, T)} - \frac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, T)]^2} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial \mathfrak{M}} \right\} d\mathfrak{M} - \frac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, T)]^2} \frac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\, dT$$

ou bien, en posant

$$(50)\quad \begin{cases} G(\mathfrak{M}, T) = \dfrac{1}{F(\mathfrak{M}, T)} - \dfrac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, T)]^2} \dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial \mathfrak{M}}, \\ g(\mathfrak{M}, T) = -\dfrac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M}, T)]^2} \dfrac{\partial F(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}, \end{cases}$$

$$(51)\quad dH = G(\mathfrak{M}, T)\,d\mathfrak{M} + g(\mathfrak{M}, T)\,dT.$$

Cette équation caractérise les corps magnétiques parfaitement doux; pour les corps doués de force coercitive, nous substituerons à l'équation (50) l'équation

$$(52)\quad dH = G(\mathfrak{M}, T)\,d\mathfrak{M} + g(\mathfrak{M}, T)\,dT + f(\mathfrak{M}, H, T)\,|d\mathfrak{M}|.$$

où $f(\mathfrak{M}, H, T)$ est une fonction uniforme et continue.

Cette équation (52) est l'*équation fondamentale de l'hysteresis magnétique.*

Digitized by Google

§ II. — *Corps qui vérifient les restrictions précédentes.*

Occupons-nous, tout d'abord, d'indiquer d'une manière précise des conditions dans lesquelles les restrictions précédentes sont certainement vérifiées. Nous remarquerons par là comment doivent être faites les expériences destinées à servir de contrôle précis à la théorie.

1° *Sphère.* — Imaginons une sphère placée dans un champ uniforme. Soit $\mathcal{H}$ l'intensité de ce champ, variable d'un instant à l'autre. Supposons qu'au début des expériences la sphère soit désaimantée, ou encore qu'elle soit aimantée uniformément, l'aimantation ayant en tout point la direction du champ $\mathcal{H}$. Il est facile de voir que nous pourrons satisfaire constamment aux deux restrictions précédentes et à l'équation (52) en supposant que la sphère est, à chaque instant, pourvue d'une aimantation uniforme dirigée comme le champ extérieur $\mathcal{H}$. La grandeur H aura, en tous les points de la sphère, une même grandeur

$$(53). \qquad H = \mathcal{H} + \frac{4}{3}\pi\mathfrak{M}.$$

Si R est le rayon de la sphère et M son moment magnétique, nous aurons

$$(54). \qquad \mathfrak{M} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Les égalités (53) et (54) fourniront les valeurs des variables $\mathfrak{M}$ et H sur lesquelles porte la théorie en fonction des quantités M et $\mathcal{H}$ qui sont susceptibles de déterminations expérimentales.

Le procédé expérimental qui semble le plus précis pour étudier les lois de l'aimantation d'une pareille sphère paraît être le suivant :

Deux bobines (fig. 9) très longues et identiques, B, B' sont parcourues par le même courant; elles sont disposées parallèlement à la méridienne magnétique; à égale distance de ces deux bobines se trouve suspendue une

Digitized by Google

aiguille *ab* de magnétomètre ; les actions des deux bobines sur cette aiguille se neutralisent exactement. La sphère magnétique est placée dans le champ uniforme engendré à l'intérieur de la bobine B; son centre est sur la perpendiculaire à la méridienne magnétique menée par le point de suspension O de l'aiguille ; la sphère est ainsi, par rapport à l'aiguille, dans la deuxième position de Gauss ; la déviation de l'aiguille permet de déterminer le moment magnétique de la sphère.

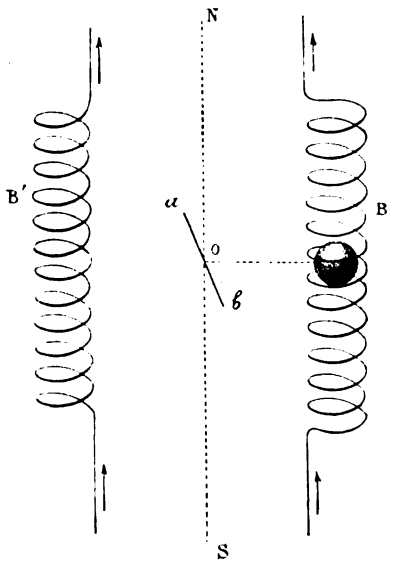


FIG. 9.

On doit bien se garder de déterminer l'intensité d'aimantation par la méthode de l'arrachement; cette méthode, souvent employée dans les recherches de ce genre, donne en réalité des résultats tout différents de ceux qu'on en prétend déduire (*).

2° *Ellipsoïde.* — Tout ce que nous venons de dire pour la sphère peut s'étendre à un ellipsoïde quelconque, pourvu que le champ extérieur $\mathcal{H}$ ait la même direction que l'un des axes de l'ellipsoïde. Seulement, les égalités (53) et (54) devront être remplacées par les suivantes :

$$H = \mathcal{H} - 2\mathfrak{M}\lambda,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi abc},$$

a, *b*, *c* étant les trois demi-axes de l'ellipsoïde et λ une certaine quantité constante qui dépend de la forme de l'ellipsoïde. Un *barreau cylindrique allongé* pourra être assimilé à un ellipsoïde.

3° *Tore.* — Considérons un tore placé dans l'axe d'une bobine annulaire; les deux restrictions précédentes seront encore vérifiées si l'on suppose

(*) P. DUHEM, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. II, p. 270.

Digitized by Google

que l'aimantation est en chaque point perpendiculaire à la section méridienne du tore et qu'elle a la même valeur en tous les points d'un cercle ayant pour axe l'axe du tore.

La composante H du champ est, en chaque point, tangente à ce cercle; elle a pour grandeur :

$$H = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\frac{2nJ}{\rho},$$

n étant le nombre de tours de la bobine,
J l'intensité du courant qui le traverse,
ρ la distance du point considéré à l'axe du tore,
$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}$ une constante égale à 1 dans le système électromagnétique d'unités.

Cette égalité détermine H en chaque point du tore. Il faudrait pouvoir déterminer $\mathfrak{M}$ en chaque point du tore. Cela n'est pas possible en général. Pour résoudre cette question, il faut supposer le *tore infiniment délié*, de manière que l'on puisse regarder $\mathfrak{M}$ comme ayant sensiblement la même valeur en tous les points de la section. Faisons cette hypothèse, et plaçons le tore, revêtu de sa bobine annulaire B, dans l'axe d'une seconde bobine annulaire B′ reliée à un galvanomètre balistique. Si l'on fait varier brusquement l'intensité J du courant qui traverse la bobine B, la bobine B′ sera le siège d'un phénomène d'induction; la mesure, au galvanomètre balistique, de la quantité d'électricité mise en mouvement permettra, comme l'a montré G. Kirchhoff, de déterminer la variation de $\mathfrak{M}$.

Les conditions expérimentales que nous venons d'indiquer nous paraissent être les seules qui soient susceptibles, dans l'étude de l'hysteresis, de donner des résultats précis, ayant une signification nette. Les expériences faites par d'autres méthodes doivent être regardées comme purement qualitatives; on ne peut attribuer un sens indubitable aux nombres qu'elles fournissent.

§ III. — *Symétrie.* — *Limites des valeurs des variables.*

On doit remarquer tout d'abord qu'un élément où les grandeurs $\mathfrak{M}$ et H ont certaines valeurs et certains signes est exactement dans le même état

Digitized by Google

qu'un élément où ces mêmes grandeurs ont les mêmes valeurs et des signes contraires. On doit donc avoir :

$$(55)\quad \left\{\begin{array}{c} G(-\mathfrak{M}, T) = G(\mathfrak{M}, T). \\ g(-\mathfrak{M}, T) = g(\mathfrak{M}, T), \\ f(-\mathfrak{M}, -H, T) = -f(\mathfrak{M}, H, T). \end{array}\right.$$

L'intensité d'aimantation, pour une substance donnée, ne peut croître au delà de toute limite. Sa valeur absolue admet une limite supérieure μ. μ est l'intensité qui correspond à la *saturation*. $\mathfrak{M}$ varie donc seulement de $-\mu$ à $+\mu$.

Au contraire, on n'entrevoit aucune raison qui limite les variations de H ; nous supposerons donc H variable de $-\infty$ à $+\infty$.

§ IV. — *Lignes ascendantes. — Lignes descendantes.*

Une ligne ascendante AB (fig. 10) montera constamment de gauche à droite ; elle aura pour asymptotes les deux droites $\mathfrak{M} = \mu$, $\mathfrak{M} = -\mu$, parallèles à OH.

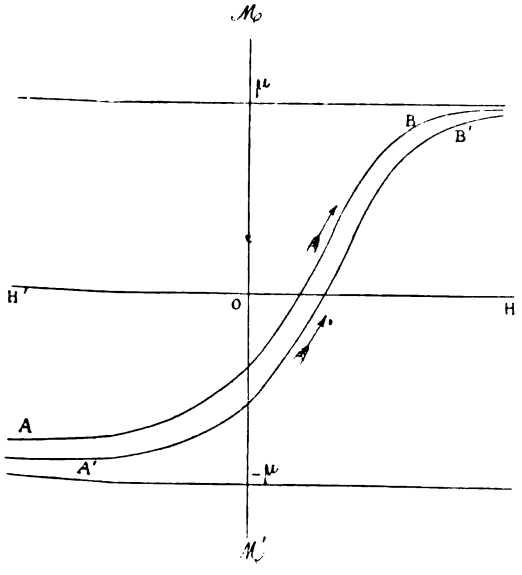


Fig. 10.

Deux lignes ascendantes distinctes, AB, A'B' ne se rencontreront pas.

Soit

$$dH = G(\mathfrak{M}, T)\,d\mathfrak{M} + f(\mathfrak{M}, H, T)\,|d\mathfrak{M}|$$

l'équation vérifiée en tous les points d'une ligne ascendante ou descendante.

D'après les égalités (55), cette égalité demeure vérifiée si l'on remplace

$\mathfrak{M}$ par $-\mathfrak{M}$,
H par $-$ H,
$d\mathfrak{M}$ par $-d\mathfrak{M}$,
dH par $-dH$.

On en déduit sans peine la proposition suivante :

La symétrique d'une ligne ascendante par rapport à l'origine des coordonnées est une ligne descendante et réciproquement.

Digitized by Google

Supposons que la ligne ascendante et la ligne descendante symétriques l'une de l'autre se rencontrent; la rencontre aura alors lieu en deux points A, B, symétriques par rapport à l'origine O (fig. 11). Le segment APB de

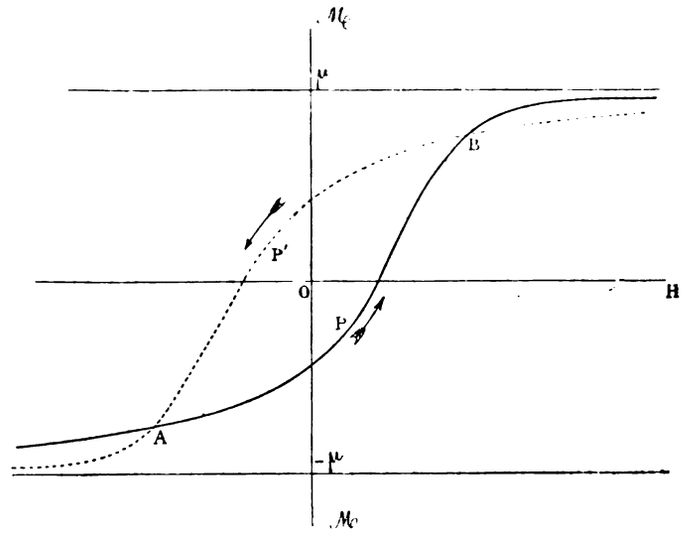


FIG. 11.

ligne ascendante et le segment BP'A de ligne descendante formeront un cycle fermé simple. A l'extrémité inférieure A de ce cycle, la ligne ascendante doit traverser la ligne descendante de gauche à droite; à l'extrémité supérieure B, elle doit la traverser de droite à gauche; on en conclut sans peine que, *pour qu'une ligne ascendante rencontre la ligne descendante symétrique, il faut qu'elle s'approche plus vite de l'asymptote supérieure que de l'asymptote inférieure ; dans ce cas, la ligne descendante s'approche plus vite de l'asymptote inférieure que de l'asymptote supérieure. Cette condition est en même temps suffisante.*

Tous ces résultats s'accordent pleinement avec ceux qu'a obtenus M. Ewing.

§ V. — *Ligne des états naturels. — Les aimants sont des systèmes de la première catégorie.*

La ligne des états naturels est représentée par l'équation

$$f(\mathfrak{M}, H, T) = 0.$$

Digitized by Google

La dernière égalité (55) nous montre que l'on a

$$f(0, 0, T) = 0.$$

Donc, *à toute température, la ligne des états naturels passe par l'origine.*

La dernière égalité (55) nous montre aussi que si le point ($\mathfrak{M}$, H) est sur la ligne des états naturels, le point ($-\mathfrak{M}$, $-$ H) y est également; en sorte que *l'origine est un centre pour la ligne des états naturels.*

Ces deux propositions réunies montrent que *l'origine est un point d'inflexion pour la ligne des états naturels.*

La ligne des états naturels peut être tracée par points, en employant le procédé général que nous avons décrit à propos de la traction et représenté par la figure 8.

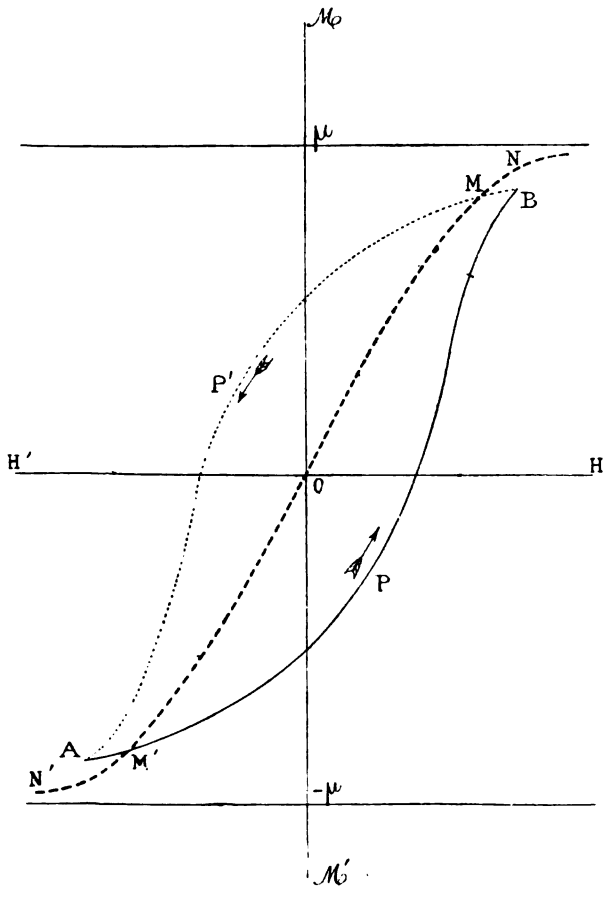


FIG. 12.

Traçons, comme l'a fait M. Ewing, cette ligne des états naturels et comparons la (fig. 12) avec un cycle fermé simple. Nous verrons que cette ligne des états naturels, suivie dans le sens des $\mathfrak{M}$ croissant, rencontre d'abord le segment ascendant du cycle, puis le segment descendant; ce que nous avons dit au chapitre premier nous permet d'interpréter ce résultat de la manière suivante :

L'expérience nous apprend qu'un corps aimanté est un système de la première catégorie.

Un corps aimanté possèdera donc toutes les propriétés qui caractérisent

Digitized by Google

un corps de la première catégorie. En particulier, si la quantité H oscille de petites quantités au voisinage d'une valeur moyenne H_0; si la température oscille autour d'une valeur moyenne T_0, l'état magnétique du corps tendra vers l'aimantation naturelle $\mathfrak{M}_0$ correspondant aux valeurs H_0, T_0 de H, T. Si, par exemple, un morceau de fer aimanté est abandonné aux conditions ambiantes, c'est-à-dire soumis à l'action magnétique terrestre, qui subit constamment de petites oscillations, et à la température extérieure, qui varie sans cesse, l'aimantation du fer finira par devenir l'aimantation naturelle qui convient à la température ordinaire et au champ magnétique terrestre; si, primitivement, le fer était fortement aimanté, il se désaimantera jusqu'à ce qu'il soit parvenu à l'état en question; si, au contraire, il était à l'état neutre, il s'aimantera.

Cette propriété peut servir de fondement à une nouvelle méthode propre à déterminer la ligne des états naturels. Que dans l'une quelconque des trois dispositions expérimentales que nous avons décrites au § II, on prenne pour champ extérieur $\mathcal{H}$ non pas un champ constant, mais un champ oscillant de petites quantités autour d'une valeur moyenne; on y parviendra aisément en engendrant le champ extérieur non pas par une bobine unique, mais par deux bobines intérieures l'une à l'autre, dont l'une sera traversée par un courant fixe, l'autre par un courant alternatif peu intense; le fer, laissé un certain temps dans ce champ, parviendra à l'état d'aimantation naturelle.

Digitized by Google

CONCLUSION.

La théorie de l'hysteresis magnétique que nous venons d'esquisser relie déjà entre eux d'une manière rationnelle les principaux résultats obtenus par les expérimentateurs, et en particulier par M. Ewing; elle marque nettement le rôle des diverses lignes que fait intervenir la représentation géométrique des résultats : lignes ascendantes, lignes descendantes, ligne des états naturels; elle montre que l'étude des propriétés d'un corps magnétique se ramène à la détermination expérimentale des deux fonctions $F(\mathfrak{M}, T)$, $f(\mathfrak{M}, H, T)$; elle indique les conditions dans lesquelles il faut se placer pour obtenir des données capables de servir au calcul de ces fonctions.

Si l'on voulait pousser plus loin; si l'on voulait, par exemple, étudier l'influence des actions mécaniques ou des déformations élastiques sur l'aimantation, on aurait auparavant à faire la théorie générale des déformations permanentes dans les systèmes qui dépendent de plus d'une variable normale; cette théorie générale paraît devoir présenter de grandes difficultés; elle ne se prête plus aux représentations géométriques qui rendaient plus claire l'étude des systèmes complètement définis par une seule variable normale; aussi bornerons-nous ce premier mémoire à l'examen des propriétés de pareils systèmes.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — *Théorie des déformations permanentes dans les systèmes qui dépendent d'une seule variable normale* 7

§ I. Hypothèse fondamentale 8

§ II. Cycles fermés. — Ligne des états naturels 10

§ III. Extension du théorème de Clausius 19

§ IV. Sens des modifications permanentes 26

§ V. Stabilité ou instabilité des états naturels 33

CHAPITRE II. — *Application de la théorie précédente aux déformations étudiées en élasticité.* 38

§ I. Traction 38

§ II. Torsion 42

§ III. Flexion 43

CHAPITRE III. — *Application de la théorie précédente aux changements d'état physique et, en particulier, au phénomène de la trempe* 44

§ I. Caractères généraux de la trempe 44

§ II. Propriétés caractéristiques des corps recuits et trempés 47

§ III. Étude expérimentale de la trempe. Déplacement du 0° des thermomètres 48

CHAPITRE IV. — *De l'hysteresis magnétique.* 51

§ I. Établissement de l'équation fondamentale de l'hysteresis magnétique. 52

§ II. Corps qui vérifient les restrictions précédentes 54

§ III. Symétrie. Limites des valeurs des variables. 56

§ IV. Lignes ascendantes. Lignes descendantes 57

§ V. Ligne des états naturels. Les aimants sont des systèmes de la première catégorie 58

CONCLUSION 61

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

PAR

P. DUHEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

LES MODIFICATIONS PERMANENTES DU SOUFRE.

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 2 mars 1895.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

LES MODIFICATIONS PERMANENTES DU SOUFRE.

INTRODUCTION.

Dans un précédent mémoire (*), nous avons ébauché une théorie générale des déformations permanentes et nous en avons développé les principes dans le cas où les modifications étudiées sont isothermiques. Ces principes nous ont permis de rendre compte des lois de l'*hysteresis magnétique*, qui parurent si étranges au moment où M. Ewing en fit la découverte expérimentale; il nous ont permis également d'expliquer les déformations permanentes produites, dans les corps élastiques, par la torsion, la traction ou la flexion.

Nous avons ensuite indiqué brièvement comment des considérations analogues s'appliquaient au cas où la température variait, tandis que les actions extérieures étaient maintenues constantes. Après avoir fait entrevoir le rôle que ces considérations étaient appelées à jouer dans l'étude de certains changements d'état physique ou d'état chimique, nous nous sommes bornés à indiquer comment elles pouvaient servir à élucider le phénomène de la trempe et le déplacement du zéro du thermomètre à mercure.

Mais il est une catégorie de modifications permanentes que nous avions

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* Mémoire présenté à la Classe des sciences de l'Académie de Belgique le 13 octobre 1894 (MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS ÉTRANGERS ET MÉMOIRES COURONNÉS DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, tome LIV.)

Digitized by Google

laissée de côté : ce sont les modifications permanentes que le soufre éprouve sous l'influence de la chaleur. Ces modifications, cependant, sont dignes de remarque. D'une part, la nature de la transformation éprouvée par le soufre est bien connue; on sait que le soufre soluble dans le sulfure de carbone passe en partie, sous l'action de la chaleur, à l'état de soufre insoluble dans le sulfure de carbone. D'autre part, les modifications permanentes qui accompagnent cette transformation ont été étudiées, au moyen de méthodes variées et ingénieuses, par M. D. Gernez, et les résultats de ses minutieuses et patientes recherches forment un véritable arsenal de documents expérimentaux.

Il semblait donc intéressant d'appliquer aux modifications permanentes du soufre des considérations analogues à celles que nous avons appliquées au phénomène de la trempe. Pour cela, il nous fallait d'abord développer la théorie des transformations qui s'accomplissent à température variable sous une action extérieure constante, de manière à l'amener au même point que la théorie des transformations isothermiques; c'est ce que nous avons fait dans le premier Chapitre du présent travail.

Les trois autres Chapitres sont consacrés à la discussion et à l'explication théorique des expériences de M. D. Gernez. Nous avons tenu à faire entrer en ligne de compte *tous les résultats expérimentaux* publiés par cet habile observateur, afin que la vérification de notre théorie fût aussi complète et aussi convaincante que possible.

CHAPITRE PREMIER.

DES MODIFICATIONS PERMANENTES DANS UN SYSTÈME DE TEMPÉRATURE VARIABLE SOUMIS A UNE ACTION EXTÉRIEURE INVARIABLE.

§ I. — *Rappel de quelques propriétés des systèmes qui n'offrent pas de modifications permanentes.*

Prenons un système défini par les variables normales suivantes :

1° La température absolue T;

2° Le volume v;

Digitized by Google

3° Une troisième variable x, dont la nature sera, provisoirement, laissée indéterminée.

Supposons que ce système soit soumis à une seule force extérieure, savoir : une pression normale et uniforme, dont nous désignerons la valeur par la lettre Π.

Supposons que ce système vérifie les diverses conditions restrictives qui permettent d'appliquer, sous leur forme classique, les principes de la thermodynamique. Ce système admettrait un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}(x, v, T)$; ce potentiel serait une fonction uniforme, finie et continue des variables x, v, T, qui jouirait des propriétés suivantes :

1° L'énergie interne du système, $U(x, v, T)$, est donnée par la relation

$$(1) \qquad EU(x, v, T) = \mathcal{F}(x, v, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial T}.$$

2° Les conditions d'équilibre du système, maintenu à la température T, sont

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} + \Pi = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x} = 0.$$

3° L'équilibre défini par les relations (2) et (3) est stable, à une température constante et sous une pression constante, si la forme

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{dv^2} V^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x\, \partial v} VX + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} X^2$$

est une forme définie positive des deux variables V et X. Cette condition exige, en particulier, que l'on ait les inégalités :

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v^2} > 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} > 0.$$

Digitized by Google

Ces diverses propositions peuvent encore se mettre sous une autre forme.

Résolvons l'équation (2) par rapport à v; elle donnera

$$(6). \quad \ldots \quad v = u(x, \Pi, T),$$

u étant une fonction de x, Π, T, que nous supposerons uniforme.

Considérons la fonction

$$\mathcal{F}(x, v, T) + \Pi v$$

et remplaçons-y v par $u(x, \Pi, T)$; elle deviendra une fonction de x, Π, T que, pour plus de simplicité, nous supposerons uniforme et que nous désignerons par $\Phi(x, \Pi, T)$; cette fonction n'est autre chose que le *potentiel thermodynamique du système sous la pression constante* Π.

Nous aurons, en vertu de la définition de $\Phi(x, \Pi, T)$,

$$(7). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial \Pi} = u(x, \Pi, T) + \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} + \Pi\right] \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial \Pi},$$

$$(8). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x} + \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} + \Pi\right] \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x}.$$

En vertu des égalités (2) et (3), ces égalités deviennent :

$$(9) \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial \Pi} = u(x, \Pi, T),$$

$$(10). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x} = 0.$$

Ces égalités représentent, sous une nouvelle forme, les conditions d'équilibre du système.

Différentions l'égalité (8) par rapport à x. Nous trouvons :

$$(11). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x} \\ & + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v^2} \left[\frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x}\right]^2 \\ & + \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} + \Pi\right] \frac{\partial^2 u(x, \Pi, T)}{\partial x^2}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Mais l'égalité (2), qui sert à définir $u(x, \Pi, T)$, est supposée constamment vérifiée; d'autre part, la forme :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \, \partial v} XV + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial v^2} V^2$$

étant une forme définie positive, doit prendre une valeur positive lorsque l'on fait

$$X = 1, \quad V = \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x},$$

en sorte que l'on doit avoir

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v^2} \left[\frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial \Pi} \right]^2 > 0.$$

En vertu de l'égalité (2) et de l'inégalité (12), l'égalité (11) donne l'inégalité

$$(13). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} > 0.$$

Reportons-nous à la définition de $\Phi(x, \Pi, T)$, qui nous donne :

$$(14). \quad \ldots \ldots \mathcal{F}(x, v, T) = \Phi(x, \Pi, T) - \Pi u(x, \Pi, T).$$

Cette égalité, différentiée par rapport à T, nous donne l'égalité

$$\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial T} + \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial T} = \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T} - \Pi \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial T},$$

que l'égalité (2) transforme en

$$(15). \quad \ldots \ldots \ldots \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial T} = \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T}.$$

En vertu des égalités (14) et (15), l'égalité (1) peut s'écrire :

$$(16). \quad \ldots \ldots EU(x, \Pi, T) = \Phi(x, \Pi, T) - T \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T} - \Pi u(x, \Pi, T).$$

Digitized by Google

Soit dQ la quantité de chaleur dégagée par le système dans une modification réelle ou virtuelle quelconque ; on a, par définition,

$$E dQ = - E dU - \Pi dv.$$

En vertu de l'égalité (16), cette égalité peut s'écrire :

$$(17). \quad E dQ = d\left[T \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T} - \Phi(x, \Pi, T)\right] + u(x, \Pi, T) d\Pi.$$

Si la modification est accomplie sous pression constante, cette égalité devient :

$$(18). \quad E dQ = d\left[T \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T} - \Phi(x, \Pi, T)\right].$$

§ II. — *Modifications permanentes. — Point de départ de la théorie.*

Ces diverses propriétés rappelées, nous allons modifier certaines d'entre elles, à l'imitation de ce que nous avons fait dans notre premier Mémoire *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.*

Dans ce qui va suivre, nous nommerons *modification réelle* du système une modification *virtuelle*, composée d'une suite d'états d'équilibre, lorsqu'elle sera la *limite d'une modification réelle* et variable ; soient (x, v, T) et $(x + \partial x, v + \partial v, T + \partial T)$ deux états infiniment voisins en cette modification ; supposons que le second soit postérieur au premier.

Si les principes développés au § I[er] étaient applicables au système que nous étudions, l'égalité (3) serait une des conditions d'équilibre du système ; en différentiant cette égalité, on aurait la relation

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \partial v} \partial v + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \partial T} \partial T + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} \partial x = 0.$$

C'est cette égalité que nous allons rejeter, ainsi que l'égalité (3) dont elle découle, pour admettre l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE FONDAMENTALE : 1° Il existe une fonction uniforme, finie et

Digitized by Google

continue $\mathcal{F}(x, v, T)$ des variables normales x, v, T, à laquelle l'énergie interne du système est liée par l'égalité (1);

2° Toutes les fois que le système est en équilibre, l'égalité (2) est vérifiée;

3° L'égalité (3) et l'égalité (19) qui en découle doivent être remplacées par l'égalité

$$(20) \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \delta v + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial T} \delta T + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} \delta x + f(x, v, \Pi, T) |\delta x| = 0,$$

$f(x, v, \Pi, T)$ étant une fonction uniforme, finie et continue des quatre variables mise en évidence et $|\delta x|$ représentant la *valeur absolue* de δx.

L'égalité (2) continuant à être vérifiée, nous pouvons encore la résoudre par rapport à la variable v, ce qui nous donne l'égalité (6); celle-ci, différentiée, devient :

$$(21). \quad \ldots \quad \delta v = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial \Pi} \delta \Pi + \frac{\partial u}{\partial T} \delta T.$$

En vertu de cette égalité (21), l'égalité (20) devient :

$$(22). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial T} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial T} \right] \delta T \\ &\qquad + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial \Pi} \delta \Pi \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x \, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x} \right] \delta x \\ &\qquad + f(x, v, \Pi, T) |\delta x| = 0. \end{aligned} \right.$$

Posons encore

$$(23). \quad \ldots \quad \Phi(x, \Pi, T) = \mathcal{F}\left[x, u(x, \Pi, T), T\right] + \Pi u(x, \Pi, T).$$

Nous pourrons établir comme précédemment l'égalité

$$(8). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x} + \left[\frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial v} + \Pi \right] \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x},$$

Digitized by Google

qui devient, en vertu de l'égalité (2), toujours vérifiée dans les états d'équilibre que nous considérons,

$$\frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x}.$$

Cette égalité donne, par différentiation,

$$(24). \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x\, \partial T} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x\, \partial T} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x\, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial T}, \\ \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x\, \partial \Pi} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x\, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial \Pi}, \\ \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial x\, \partial v} \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(25). \quad g(x, \Pi, T) = f\left[x, u(x, \Pi, T), \Pi, T\right],$$

et nous voyons qu'en vertu des égalités (24) et (25), l'égalité (22) peut s'écrire :

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x\, \partial T} \delta T + \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x\, \partial \Pi} \delta \Pi + \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} \delta x + g(x, \Pi, T) |\delta x| = 0.$$

Cette relation est le fondement de toute la théorie que nous allons exposer.

§ III. — *Déplacement isothermique de l'équilibre.*

Nous n'avons pas l'intention, dans le présent mémoire, d'étudier les modifications isothermiques; cette étude se ramènerait immédiatement à celle que nous avons faite dans notre premier mémoire : *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* Toutefois, il faut nous arrêter à l'examen des transformations isothermiques, assez pour énoncer une hypothèse qui les concerne et pour en déduire deux inégalités qui nous seront utiles par la suite.

Digitized by Google

L'égalité (2) demeurant une condition d'équilibre pour les systèmes que nous étudions, on peut encore écrire que l'on a, en un système en équilibre, l'égalité

$$\frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial \Pi} = u(x, \Pi, T). \quad (9)$$

Imaginons une modification *virtuelle* où la variable x croîtrait de dx, tandis que la pression Π et la température T demeureraient invariables. Le volume du système subirait un accroissement

$$dv = \frac{\partial u(x, \Pi, T)}{\partial x} dx.$$

D'après l'égalité (9), cette dernière égalité peut s'écrire :

$$dv = \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} dx.$$

Donc, si l'on a

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} > 0,$$

le volume du système croît, en même temps que la variable x, dans la modification virtuelle que l'on vient de définir ; si l'on a

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} < 0,$$

le volume du système varie en sens inverse de la variable x durant la modification virtuelle que l'on vient de définir.

Cela posé, à l'exemple de ce que nous avons fait dans notre premier mémoire : *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis*, nous admettrons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *La loi du déplacement isothermique de l'équilibre s'étend aux modifications que nous étudions.*

Cette hypothèse peut s'énoncer plus explicitement de la manière suivante :

Supposons que le volume du système éprouve une variation de signe contraire à celle qu'éprouve la variable x *dans une modification virtuelle*

Digitized by Google

accomplie sous pression constante, à température constante ; dans une modification réelle, accomplie à température constante, la variation de la variable x *est de même signe que la variation de la pression* Π.

Supposons, au contraire, que le volume du système et la variable x *éprouvent des variations de même signe dans une modification virtuelle accomplie sous pression constante et à température constante ; dans une modification réelle, accomplie à température constante, la variable* x *et la pression* Π *éprouvent des variations de signes contraires.*

Soient ∂x, $\partial \Pi$ les variations qu'éprouvent la variable x et la pression Π dans une modification isothermique réelle ; les propositions que nous venons d'énoncer peuvent encore s'exprimer de la manière suivante :

Si l'on a l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} < 0,$$

on a l'inégalité

$$\partial \Pi \, . \, \partial x > 0.$$

Si, au contraire, on a l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} > 0,$$

on a l'inégalité

$$\partial \Pi \, . \, \partial x < 0.$$

Mais les variations ∂x, $\partial \Pi$ sont liées par l'égalité (26) qui, pour une modification isothermique, où $\partial T = 0$, se réduit à

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x \, \partial \Pi} \partial \Pi + \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} \partial x + g(x, \Pi, T) \, |\partial x| = 0.$$

On voit alors que, *pour que l'hypothèse précédente soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités :*

$$(27) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} + g(x, \Pi, T) > 0,$$

$$(27^{bis}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} - g(x, \Pi, T) > 0.$$

Digitized by Google

Ces deux inégalités entraînent l'extension, aux modifications que nous étudions, de l'inégalité

$$(13). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \frac{\partial^2\Phi(x, \Pi, T)}{\partial x^2} > 0,$$

que nous savions nécessaire pour la stabilité de l'équilibre des systèmes qui n'éprouvent pas de modifications permanentes.

§ IV. — *Lignes ascendantes et lignes descendantes.*

Désormais, nous étudierons des modifications produites *sous pression constante;* la lettre Π ne représentant plus une variable, nous cesserons de la faire figurer dans nos équations; un état d'équilibre du système sera représenté par un ensemble (x, T) de valeurs des deux variables x et T. Si nous prenons deux axes de coordonnées rectangulaires; si nous portons les valeurs de la température T en abscisses et les valeurs de la variable x en ordonnées, chaque point du plan correspondra à un état d'équilibre du système.

Lorsque le système passera d'un état d'équilibre (x, T) à un état d'équilibre infiniment voisin $(x + \delta x, T + \delta T)$ au moyen d'une modification réelle infiniment petite, les variations δx, δT seront liées par l'égalité (26), qui se réduira ici, puisque $\delta\Pi = 0$, à

$$(28). \quad \ldots \ldots \frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x\, \partial T}\delta T + \frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x^2}\delta x + g(x, T)\,|\delta x| = 0.$$

Une transformation du système, accomplie sous pression constante, sera représentée par une ligne tracée dans le plan des (x, T). Une telle ligne sera, en général, une ligne brisée formée de segments analytiques différents; en effet, toute phase de la modification durant laquelle x va en croissant sera représentée par une ligne satisfaisant à l'équation différentielle

$$(29). \quad \ldots \ldots \frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x\, \partial T}dT + \left[\frac{\partial^2\Phi(x, T)}{\partial x^2} + g(x, T)\right]dx = 0.$$

Digitized by Google

Au contraire, toute phase de la transformation durant laquelle x va en diminuant sera représentée par une ligne satisfaisant à l'équation différentielle

$$(29^{bis}). \quad \frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x\,\partial T}dT + \left[\frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x^2} - g(x,T)\right]dx = 0.$$

L'équation différentielle (29) représente une famille de courbes; un arc de l'une quelconque de ces courbes ne figure une modification réalisable qu'autant qu'on le parcourt dans le sens des x croissants; nous donnerons à ces courbes le nom de *lignes ascendantes.*

L'équation différentielle (29^{bis}) définit une famille de courbes; un arc de l'une quelconque de ces courbes ne figure une modification réalisable qu'autant qu'on le parcourt dans le sens des x décroissants; nous donnerons à ces courbes le nom de *lignes descendantes.*

Nous supposerons que *par chaque point du plan, il passe une et une seule ligne ascendante, une et une seule ligne descendante.*

La ligne ascendante qui passe au point (T, x) y admet une tangente qui a pour coefficient angulaire, d'après l'équation (29),

$$(30). \quad \alpha(T,x) = -\frac{\dfrac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x^2} + g(x,T)}.$$

La ligne descendante qui passe au point (T, x) y admet une tangente qui a pour coefficient angulaire, d'après l'équation (29^{bis}),

$$(30^{bis}). \quad \delta(T,x) = -\frac{\dfrac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x^2} - g(x,T)}.$$

Digitized by Google

§ V. — *Déplacement de l'équilibre par les variations de température.*

L'égalité (2) demeurant applicable aux systèmes que nous étudions, on pourra encore appliquer à ces systèmes l'égalité

$$(15). \quad \frac{\partial \mathcal{F}(x, v, T)}{\partial T} = \frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T}.$$

En vertu des égalités (15) et (23), l'égalité (1) deviendra encore, pour ces systèmes :

$$(16). \quad EU(x, \Pi, T) = \Phi(x, \Pi, T) - T\frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial T} - \Pi u(x, \Pi, T),$$

en sorte que les égalités (17) et (18) demeureront exactes pour les modifications que nous étudions.

Imaginons une modification *virtuelle* qui, sous la pression constante Π, à la température constante T, ferait croître la variable x de dx. Une telle modification *absorberait* une quantité de chaleur $\lambda(x, \Pi, T)\,dx$ et l'on aurait, d'après l'égalité (18),

$$(31). \quad \lambda(x, \Pi, T) = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x} - T\frac{\partial^2 \Phi(x, \Pi, T)}{\partial x\, \partial T}\right].$$

Si λ est positif, nous dirons que la modification étudiée est *endothermique;* si λ est négatif, nous dirons que la modification étudiée est *exothermique.*

La modification que nous étudions pourrait évidemment être endothermique pour certaines valeurs des variables x, Π, T, et exothermique pour d'autres valeurs de ces mêmes variables. Dans ce qui va suivre, nous rejetterons cette hypothèse; nous supposerons, pour plus de simplicité, que $\lambda(x, \Pi, T)$ garde un signe invariable dans le champ des valeurs accessibles de x, Π, T. Si cette supposition simplificatrice n'était pas réalisée dans certains cas, $\lambda(x, \Pi, T)$ changerait de signe en s'annulant le long de certaines surfaces; ces surfaces partageraient le champ des variations possibles des variables x, Π, T, en domaines partiels; à l'intérieur de chacun de ces

Digitized by Google

domaines, $\lambda(x, \Pi, T)$ garderait un signe invariable ; on pourrait alors dire de chacun de ces domaines ce que nous allons dire de l'ensemble des valeurs accessibles des x, Π, T.

Cela posé, nous admettrons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *Toute modification réelle, accomplie sous pression constante, est soumise à la loi du déplacement de l'équilibre par les variations de la température.*

Cette hypothèse peut s'énoncer plus explicitement de la manière suivante :

Si la modification étudiée est endothermique, dans toute transformation réelle, accomplie sous pression constante, la variable x *et la température* T *subissent des variations de même signe.*

Si la modification étudiée est exothermique, dans toute transformation réelle, accomplie sous pression constante, la variable x *et la température* T *subissent des variations de signes contraires.*

Ces propositions peuvent se formuler de la manière suivante :

En toute transformation réelle, accomplie sous pression constante, on a

$$\lambda(x, \Pi, T) \frac{\partial x}{\partial T} > 0.$$

On peut encore les énoncer ainsi :

Le long de toute ligne ascendante, on a

(32). . . . . $\lambda(x, T)\, \alpha(x, T) > 0.$

Le long de toute ligne descendante, on a

(32bis) . . . . . $\lambda(x, T)\, \delta(x, T) > 0.$

Si la modification étudiée est une modification endothermique, les lignes ascendantes montent de gauche à droite ; les lignes descendantes descendent de droite à gauche (fig. 1).

Si la modification étudiée est une modification exothermique, les lignes

Digitized by Google

ascendantes montent de droite à gauche; les lignes descendantes descendent de gauche à droite (fig. 2).

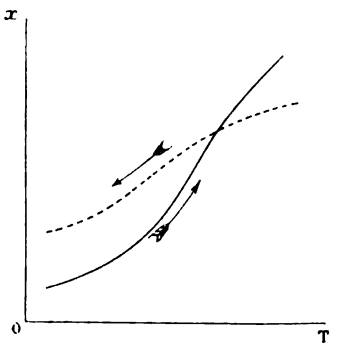


FIG. 1.

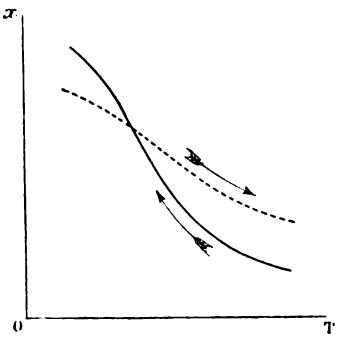


FIG. 2.

En vertu des égalités (30) et (30bis), les inégalités (32) et (32bis) deviennent :

$$\frac{\lambda(x,T)\dfrac{\partial^2\Psi(x,T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2\Psi(x,T)}{\partial x^2}+g(x,T)}<0,$$

$$\frac{\lambda(x,T)\dfrac{\partial^2\Psi(x,T)}{\partial x\,\partial T}}{\dfrac{\partial^2\Psi(x,T)}{\partial x^2}-g(x,T)}<0.$$

Les inégalités (27) et (27bis) nous montrent que, pour que ces dernières inégalités soient vérifiées, *il faut et il suffit que l'on ait, dans tout le champ des* (T, x), *l'inégalité :*

(33). . . . . $\lambda(x,T)\dfrac{\partial^2\Psi(x,T)}{\partial x\,\partial T}<0.$

§ VI. — *Cycles fermés. — Ligne des états naturels.*

Une transformation du système, accomplie sous pression constante, est représentée dans le plan des (x, T) par une ligne brisée formée de portions de lignes ascendantes et de portions de lignes descendantes.

Digitized by Google

Il peut arriver qu'une telle transformation ramène les variables x et T à leurs valeurs primitives; la transformation constitue alors un cycle fermé (fig. 3).

La possibilité de cycles fermés suppose la possibilité de *cycles fermés simples*, composés d'une seule ligne ascendante et d'une seule ligne descendante (fig. 4), se coupant seulement en deux points A, B, que l'on nomme les *sommets du cycle*. On le démontrerait par un procédé analogue à celui que nous avons employé, pour démontrer une proposition semblable, dans notre Mémoire : *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.*

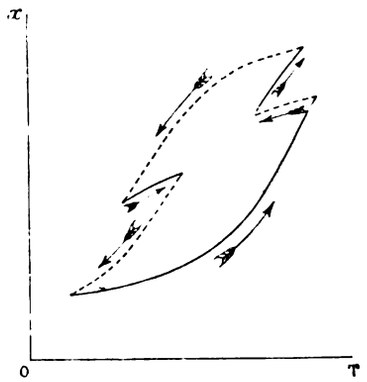


FIG. 3.

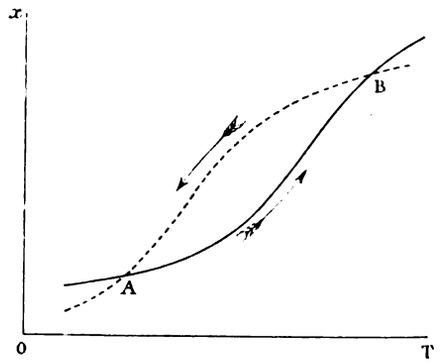


FIG. 4.

Il est facile de voir que la quantité

$$\alpha(x, T) - \delta(x, T)$$

a nécessairement des signes opposés aux deux sommets d'un cycle fermé simple. Or, les égalités (30) et (30bis) donnent

$$(54). \quad \alpha(x, T) - \delta(x, T) = \frac{2\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial T}\,g(x, T)}{\left[\frac{\partial^2 \Phi(x, T)}{\partial x^2}\right]^2 - [g(x, T)]^2},$$

égalité qui peut encore s'écrire

$$(55). \quad \lambda(x, T)\left[\alpha(x, T) - \delta(x, T)\right] = \frac{2\lambda(x, T)\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial T}\,g(x, T)}{\left[\frac{\partial^2 \Phi(x, T)}{\partial x^2}\right]^2 - [g(x, T)]^2}.$$

Digitized by Google

Si nous tenons compte des inégalités (27), (27bis) et (33), cette égalité nous enseigne que *la quantité*

$$\lambda(x, T)\left[\alpha(x, T) - \vartheta(x, T)\right]$$

a, en tout point (T, x), *un signe opposé à celui de la quantité* g(x, T).

Or, la quantité $\lambda(x, T)$ a, dans tout le champ des valeurs accessibles de x, T, un signe constant. La proposition que nous venons d'établir entraîne donc la conséquence suivante :

Aux deux sommets d'un cycle fermé simple, la fonction g(x, T) *a des signes opposés.*

Si l'on se souvient que la possibilité des cycles fermés est subordonnée à la possibilité des cycles fermés simples, on voit que l'on peut énoncer les propositions suivantes :

La possibilité de cycles fermés est subordonnée à l'existence, dans la région accessible du plan des (T, x), *d'une ligne réelle définie par l'équation*

$$(36) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad g(x, T) = 0.$$

Cette ligne partage le plan en deux régions qui correspondent à des signes opposés de la fonction g(x, T). *Les deux sommets d'un cycle fermé simple ne se trouvent jamais dans la même région.*

Nous dirons que tout système de valeurs de T, x, qui vérifie l'équation (36), correspond à un *état naturel* du système; la ligne représentée par cette équation est la *ligne des états naturels.*

Les égalités (34) et (36) nous montrent qu'*en tout point de la ligne des états naturels, la ligne ascendante et la ligne descendante sont tangentes entre elles.*

Les deux sommets d'un cycle fermé simple étant de part et d'autre de la ligne des états naturels, chacun des côtés de ce cycle rencontre la ligne des états naturels en un nombre impair de points; dorénavant, *nous réserverons le nom de cycles fermés simples à ceux dont chaque côté ne rencontre la ligne des états naturels qu'en un seul point.*

Digitized by Google

Au sujet de la ligne des états naturels, nous ferons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE. — *La loi du déplacement de l'équilibre par variation de température s'étend au déplacement de l'état naturel par variation de température.*

Plus explicitement, *si la modification étudiée est endothermique, les deux variables* x *et* T *éprouvent des variations de même signe, lorsque, sous une même pression, on passe d'un état naturel à un état naturel infiniment voisin.*

Si la modification étudiée est exothermique, les deux variables x *et* T *éprouvent des variations de signes contraires, lorsque, sous une même pression, on passe d'un état naturel à un état naturel infiniment voisin.*

Soient (x, T) et $(x + \Delta x, T + \Delta T)$ deux points infiniment voisins sur la ligne des états naturels. L'hypothèse précédente équivaut à cette proposition : *En tout point de la ligne des états naturels, on a*

$$(37). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \lambda(x, T)\frac{\Delta x}{\Delta T} > 0.$$

Le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta T}$ n'étant autre chose que le coefficient angulaire de la tangente à la ligne des états naturels, l'inégalité (37) entraîne les conséquences suivantes :

Si la modification étudiée est endothermique, la ligne NN′ des états naturels monte de gauche à droite (fig. 5).

Si la modification étudiée est exothermique, la ligne NN′ des états naturels descend de gauche à droite (fig. 6).

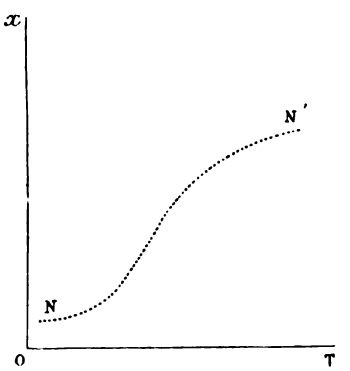


FIG. 5.

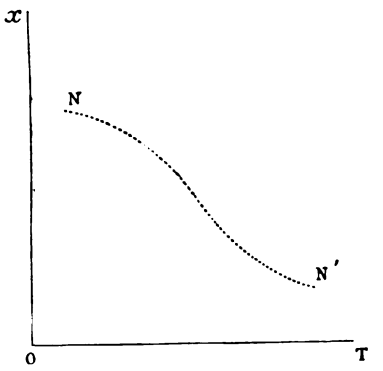


FIG. 6.

Digitized by Google

Les égalités

$$g(x, T) = 0,$$
$$g(x + \Delta x, T + \Delta T) = 0,$$

donnent

$$\frac{\Delta x}{\Delta T} = -\frac{\frac{\partial g(x, T)}{\partial T}}{\frac{\partial g(x, T)}{\partial x}} \quad (38)$$

En sorte que l'inégalité (37) peut encore s'écrire

$$\lambda(x, T)\frac{\frac{\partial g(x, T)}{\partial T}}{\frac{\partial g(x, T)}{\partial x}} < 0. \quad (39)$$

§ VII. — *Distinction de deux catégories de systèmes. Stabilité ou instabilité des états naturels.*

La fonction $g(x, T)$ est égale à 0 en tous les points de la ligne des états naturels; cette ligne partage le plan en deux régions; dans chacune de ces régions, $g(x, T)$ a un signe invariable; le signe qu'offre $g(x, T)$ dans une région est contraire au signe qu'offre $g(x, T)$ dans l'autre région. Dès lors, on voit que le système étudié appartient forcément à l'une des deux catégories dont voici la définition :

PREMIÈRE CATÉGORIE. — *La fonction* $g(x, T)$ *est négative dans la région située au-dessous de la ligne des états naturels et positive dans la région située au-dessus de la ligne des états naturels.* En d'autres termes, *en tout point de la ligne des états naturels, on a*

$$\frac{\partial g(x, T)}{\partial x} > 0. \quad (40)$$

DEUXIÈME CATÉGORIE. — *La fonction* $g(x, T)$ *est positive dans la région située au-dessous de la ligne des états naturels et négative dans la region*

Digitized by Google

située au-dessus. En d'autres termes, *on a, en tout point de la ligne des états naturels,*

$$(40^{\text{bis}}) \quad \frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x} < 0.$$

Au § VI, nous avons trouvé que le produit

$$\lambda(x, \mathrm{T})\left[\alpha(x, \mathrm{T}) - \delta(x, \mathrm{T})\right]$$

avait, en tout point, un signe opposé à celui de la fonction $g(x, \mathrm{T})$.

Considérons un cycle fermé simple ; nommons *premier sommet* celui de ses sommets qui est au-dessous de la ligne des états naturels et *deuxième sommet*, celui qui est au-dessus de la ligne des états naturels. En réunissant les renseignements que nous venons de rappeler, nous trouverons que la quantité

$$\alpha(x, \mathrm{T}) - \delta(x, \mathrm{T})$$

prend les signes suivants aux deux sommets d'un cycle fermé simple :

(41)

		SIGNE DE $(\alpha - \delta)$ au premier sommet d'un cycle fermé simple.	SIGNE DE $(\alpha - \delta)$ au second sommet d'un cycle fermé simple.
Première catégorie.	Modification endothermique $\lambda > 0$	$\alpha - \delta > 0$	$\alpha - \delta < 0$
	Modification exothermique $\lambda < 0$	$\alpha - \delta < 0$	$\alpha - \delta > 0$
Seconde catégorie.	Modification endothermique $\lambda > 0$	$\alpha - \delta < 0$	$\alpha - \delta > 0$
	Modification exothermique $\lambda < 0$	$\alpha - \delta > 0$	$\alpha - \delta < 0$

Nous allons voir que les systèmes de la première catégorie diffèrent des systèmes de la seconde catégorie par un caractère physique très important.

Considérons un système maintenu *longtemps* sous une pression *à peu près constante* et à une température *à peu près constante ;* supposons que l'état initial de ce système ne soit pas un état naturel.

La température T éprouve des oscillations très petites et très nombreuses

Digitized by Google

autour d'une valeur constante θ; la pression Π éprouve des oscillations très petites et très nombreuses autour d'une valeur constante ϖ.

Pour chaque intervalle de temps infiniment court, on peut écrire la relation générale :

$$(26) \qquad \frac{\partial^2\Phi(x,\Pi,T)}{\partial x\,\partial T}\delta T + \frac{\partial^2\Phi(x,\Pi,T)}{\partial x\,\partial \Pi}\delta\Pi + \frac{\partial^2\Phi(x,\Pi,T)}{\partial x^2}\delta x + g(x,\Pi,T)\,|\delta x| = 0.$$

Soit t_0 l'instant initial. Soit t_1 un instant postérieur à t_0. Nous pouvons toujours prendre t_1 assez voisin de t_0 pour que, dans l'intervalle de temps compris entre t_0 et t_1, le système n'ait pas franchi la ligne des états naturels. Intégrons l'équation précédente depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = t_1$. Nous aurons :

$$(42). \qquad \left[\frac{\partial\Phi(x,\Pi,T)}{\partial x}\right]_{t=t_0}^{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1} g(x,\Pi,T)\,|\delta x| = 0.$$

Soient x_0 et x_1 les valeurs de la variable x pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$; Π et T, ayant, à tout instant, des valeurs très peu différentes de ϖ et θ, on pourra, en ne négligeant que des quantités très petites, écrire l'équation (42) sous la forme

$$(43). \qquad \frac{\partial\Phi(x_1,\varpi,\theta)}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi(x_0,\varpi,\theta)}{\partial x_0} + \int_{t_0}^{t_1} g(x,\varpi,\theta)\,|\delta x| = 0.$$

D'ailleurs, on peut écrire

$$(44). \qquad \frac{\partial\Phi(x_1,\varpi,\theta)}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi(x_0,\varpi,\theta)}{\partial x_0} = \frac{\partial^2\Phi(\xi,\varpi,\theta)}{\partial\xi^2}(x_1 - x_0),$$

ξ étant une valeur de x comprise entre x_0 et x_1; de même, on peut écrire :

$$(45). \qquad \int_{t_0}^{t_1} g(x,\varpi,\theta)\,|\delta x| = g(X,\varpi,\theta)\int_{t_0}^{t_1}|\delta x|,$$

X étant une autre valeur de x comprise entre x_0 et x_1.

En vertu des égalités (44) et (45), l'égalité (43) devient

$$(46). \qquad x_1 - x_0 = -\frac{g(X,\varpi,\theta)}{\dfrac{\partial^2\Phi(\xi,\varpi,\theta)}{\partial\xi^2}}\int_{t_0}^{t_1}|\delta x|.$$

Digitized by Google

Bien que les oscillations subies par la température et la pression soient très petites, comme elles sont en même temps très fréquentes, la quantité $\int_{t_0}^{t_1} |dx|$ ne pourra pas, en général, être très petite; d'ailleurs, comme le système n'a pas passé par un état naturel, la quantité $g(X, \varpi, \theta)$ est assurément différente de 0. L'égalité (46) nous fournit donc ce premier théorème :

Si l'on prend un système dans un état différent d'un état naturel et si l'on maintient A PEU PRÈS *constantes la pression qu'il supporte et la température à laquelle il est porté, les oscillations très petites, mais très fréquentes, de la température et de la pression feront varier* x *de telle façon qu'au bout d'un temps fini, cette quantité aura subi une variation finie.*

Toutes choses égales d'ailleurs, la variation de x sera d'autant plus grande que les oscillations de la pression Π et de la température T seront plus fréquentes et plus amples; par exemple, x variera plus vite si le corps est maintenu dans une étuve mal réglée que s'il est conservé dans une étuve bien réglée; il n'y a pas lieu de parler de la *vitesse de transformation du système* dans des conditions données de température et de pression; *le temps n'influe pas directement sur la modification;* il n'influe que par l'intermédiaire des petites variations qu'il apporte d'une manière inévitable aux conditions physiques que l'on essaye de maintenir constantes.

La quantité $g(X, \varpi, \theta)$ tend vers 0 lorsque l'état du système tend vers l'état naturel relatif à la pression ϖ et à la température θ, en sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

Toutes choses égales d'ailleurs, la variation de x *est d'autant plus lente que le système est plus voisin d'un état naturel.*

Revenons à l'égalité (46).

$\int_{t_0}^{t_1} |dx|$ est une quantité essentiellement positive.

D'après l'inégalité (13), $\frac{\partial^2 \Phi(\xi, \varpi, \theta)}{\partial \xi^2}$ est également une quantité positive.

L'égalité (46) nous montre donc que la différence $(x_1 - x_0)$ a assurément le signe de $-g(X, \varpi, \theta)$. Mais, lorsque x varie de x_0 à x_1, $g(x, \varpi, \theta)$ ne change pas de signe, puisque le système ne passe pas par un état naturel; $g(X, \varpi, \theta)$ a donc même signe que $g(x_0, \varpi, \theta)$ et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

La quantité $(x_1 - x_0)$ *est de signe contraire à* $g(x_0, \varpi, \theta)$.

Digitized by Google

Si nous rapprochons cette proposition des caractères qui distinguent les deux catégories de systèmes, nous arrivons aux conclusions suivantes :

SYSTÈMES DE LA PREMIÈRE CATÉGORIE. — *On maintient un tel système sous une pression* A PEU PRÈS *constante et à une température* A PEU PRÈS *constante. Si l'état initial du système est au-dessous de la ligne des états naturels, la variable* x *augmente graduellement. Si l'état initial du système est au-dessus de la ligne des états naturels, la variable* x *diminue graduellement.*

SYSTÈMES DE LA SECONDE CATÉGORIE. — *On maintient un tel système sous une pression* A PEU PRÈS *constante et à une température* A PEU PRÈS *constante. Si l'état initial du système est au-dessous de la ligne des états naturels, la variable* x *diminue graduellement. Si l'état initial du système est au-dessus de la ligne des états naturels, la variable* x *augmente graduellement.*

Ces deux propositions peuvent se résumer en la suivante :

Un système est maintenu sous une pression A PEU PRÈS *constante et à une température* A PEU PRÈS *constante. Si le système appartient à la* PREMIÈRE CATÉGORIE, *son état varie de manière à s'approcher de plus en plus de l'état naturel relatif à cette pression et à cette température. Si le système appartient à la* DEUXIÈME CATÉGORIE, *son état varie de manière à s'éloigner de plus en plus de ce même état naturel.*

On peut encore dire sous une forme plus brève, mais moins précise :

Sous une pression A PEU PRÈS *constante et à une température* A PEU PRÈS *constante, l'état naturel est un état stable pour les systèmes de la* PREMIÈRE CATÉGORIE *et un état instable pour les systèmes de la* SECONDE CATÉGORIE.

§ VIII. — *Sens d'un cycle fermé.*

Le contour d'un cycle fermé peut être parcouru de telle sorte qu'un observateur qui accompagne le point décrivant ait constamment à sa gauche, ou constamment à sa droite, l'aire limitée par le contour. Dans le premier cas, le cycle est dit *sinistrorsùm ;* dans le second, il est dit *dextrorsùm.*

Considérons, en particulier, les cycles fermés simples.

Digitized by Google

Si la modification étudiée est endothermique, tout cycle simple sinistrorsùm aura la disposition représentée par la figure 7; tout cycle simple dextrorsùm aura la disposition représentée par la figure 8.

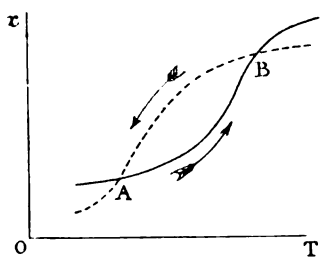


FIG. 7.

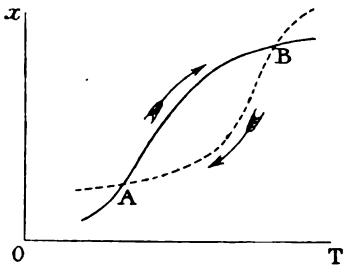


FIG. 8.

Si la modification étudiée est exothermique, tout cycle simple sinistrorsùm aura la disposition représentée par la figure 9; tout cycle simple dextrorsùm aura la disposition représentée par la figure 10.

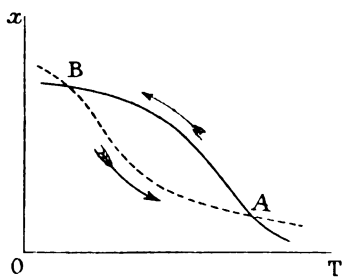


FIG. 9.

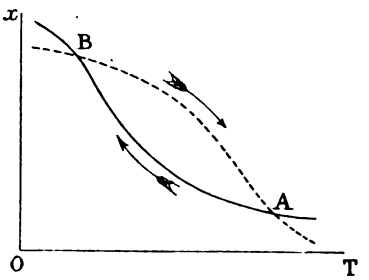


FIG. 10.

Nommons *sommet inférieur* d'un cycle fermé simple celui qui correspond à la moindre valeur de x, et *sommet supérieur* celui qui correspond à la plus grande valeur de x. Nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Un cycle simple est sinistrorsùm si la différence $(\alpha - \delta)$ *est négative au sommet inférieur et positive au sommet supérieur. Il est dextrorsùm si la différence* $(\alpha - \delta)$ *est positive au sommet inférieur et négative au sommet supérieur.*

Le premier sommet d'un cycle simple peut être en même temps le sommet inférieur, cas auquel le second sommet est le sommet supérieur; ou bien, au contraire, le premier sommet peut être le sommet supérieur, cas auquel

Digitized by Google

le second sommet est le sommet inférieur. En combinant la proposition précédente avec les inégalités (41), nous obtenons, à cet égard, les règles que voici :

		SENS du cycle.	Ordre du sommet qui joue le rôle de sommet : Inférieur.	Supérieur.	N° du cycle.
Première catégorie.	Modification endothermique $\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	second	premier	I
		Dextrorsùm	premier	second	II
	Modification exothermique $\lambda < 0$	*Sinistrorsùm*	premier	second	III
		Dextrorsùm	second	premier	IV
Seconde catégorie.	Modification endothermique $\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	premier	second	V
		Dextrorsùm	second	premier	VI
	Modification exothermique $\lambda < 0$	*Sinistrorsùm*	second	premier	VII
		Dextrorsùm	premier	second	VIII

Nous avons ainsi *huit types* de cycles, que représente la figure 11.

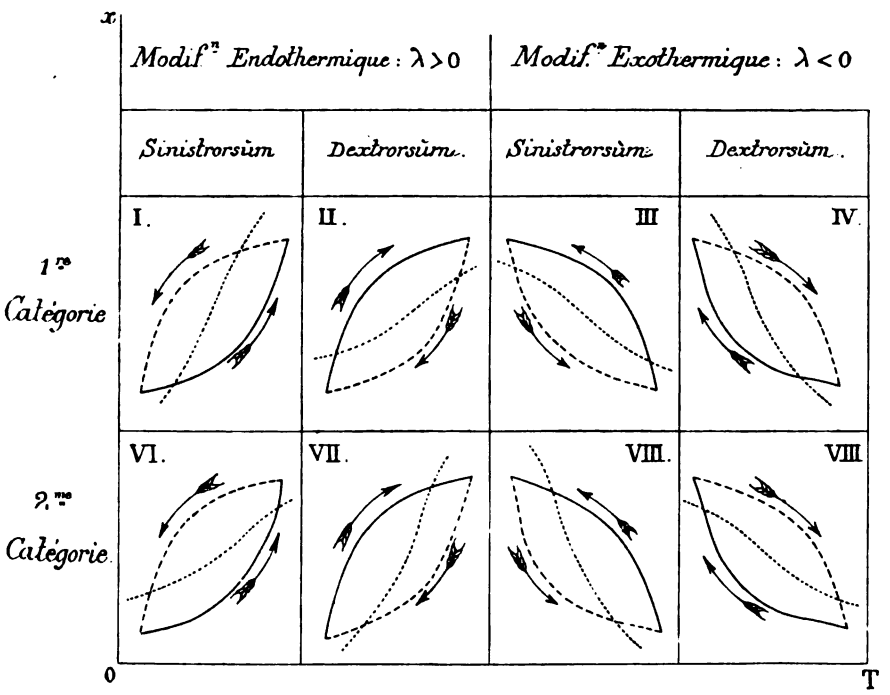


FIG. 11.

Considérons un point de la ligne des états naturels. En ce point, α et ∂

ont une valeur commune que nous désignerons par $\frac{dx}{dT}$. On voit sans peine qu'*aux deux points de rencontre du contour d'un cycle fermé simple avec la ligne des états naturels, la différence*

$$\frac{dx}{dT} - \frac{\Delta x}{\Delta T}$$

a le même signe.

L'inspection de la figure 11 nous montre sans peine que, dans chacun des huit cas que nous avons à considérer, ce signe est le suivant :

		SENS du cycle.	SIGNE DE $\frac{dx}{dT} - \frac{\Delta x}{\Delta T}$	N° du cycle
Première catégorie.	$\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	—	I
		Dextrorsùm	+	II
	$\lambda < 0$	*Sinistrorsùm*	—	III
		Dextrorsùm	+	IV
Seconde catégorie.	$\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	+	V
		Dextrorsùm	—	VI
	$\lambda < 0$	*Sinistrorsùm*	+	VII
		Dextrorsùm	—	VIII

Ce tableau peut se résumer dans les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un cycle simple soit sinistrorsùm, il faut et il suffit que ses côtés coupent la ligne des états naturels en des points où*

$$\left(\frac{dx}{dT} - \frac{\Delta x}{\Delta T}\right)$$

est négatif, si le système appartient à la première catégorie ; et en des points où la même quantité est positive, si le système appartient à la deuxième catégorie.

THÉORÈME II. — *Pour qu'un cycle simple soit dextrorsùm, il faut et il suffit que ses côtés coupent la ligne des états naturels en des points où*

$$\left(\frac{dx}{dT} - \frac{\Delta x}{\Delta T}\right)$$

Digitized by Google

est positif, si le système appartient à la première catégorie ; et en des points où la même quantité est négative, si le système appartient à la deuxième catégorie.

Ces théorèmes donnent une importance particulière au point de la ligne des états naturels où l'on a

$$\frac{dx}{dT} - \frac{\Delta x}{\Delta T} = 0. \qquad (47)$$

Nous nommerons ce point *point de passage* et nous le désignerons par la lettre Π (fig. 12).

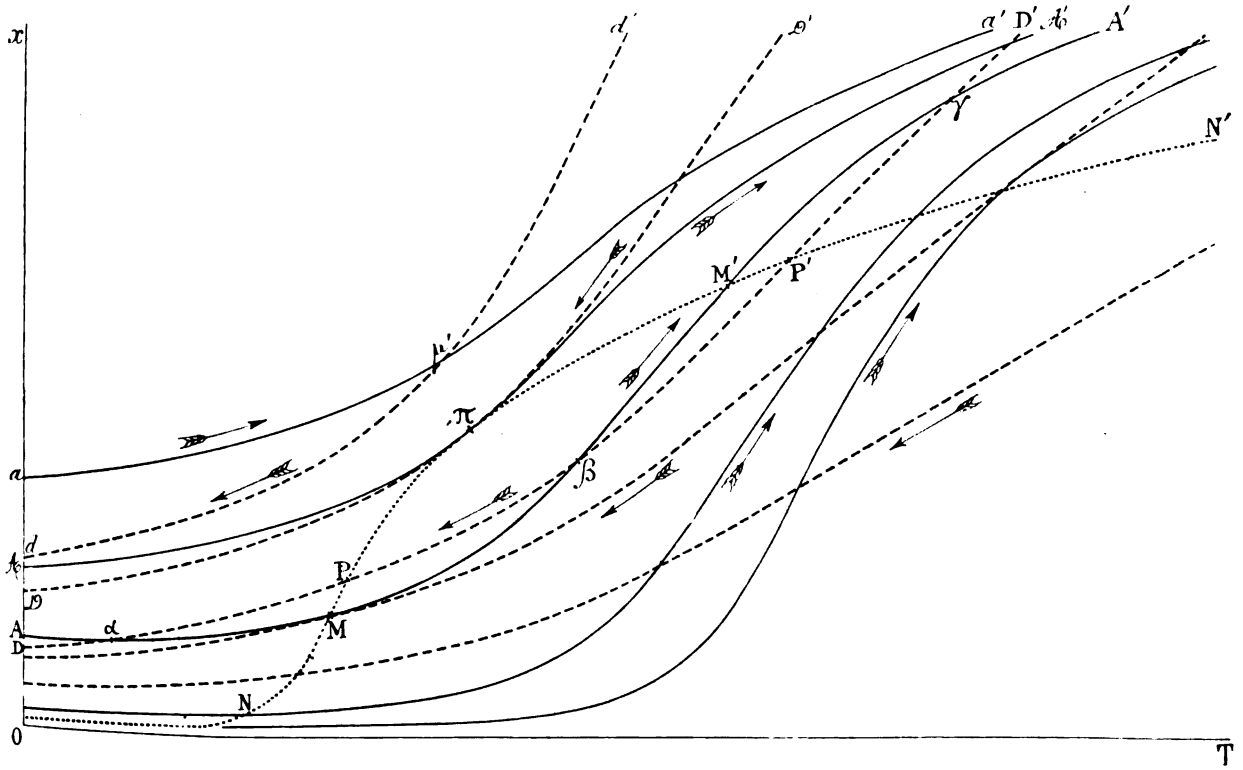


Fig. 12.

Pour qu'un système puisse offrir deux sortes de cycles simples, les uns sinistrorsùm, les autres dextrorsùm, il faut et il suffit qu'il existe au moins un point de passage sur la ligne des états naturels.

Pour simplifier, supposons qu'il existe *un seul* point de passage sur la ligne des états naturels.

Digitized by Google

Ce point partage la ligne des états naturels en deux branches : NΠ, ΠN'. Les deux côtés d'un cycle fermé simple coupent toujours une même branche. S'ils coupent la première, le cycle est sinistrorsùm; s'ils coupent la seconde, le cycle est dextrorsùm.

L'égalité (47) montre qu'*au point de passage* Π, *la ligne ascendante et la ligne descendante sont non seulement tangentes entre elles, mais encore tangentes à la ligne des états naturels.*

Il est facile de voir, en outre, qu'*au point de passage* Π, *la ligne ascendante et la ligne descendante sont osculatrices entre elles,* et que *le point* Π *est le seul où se produise une semblable osculation.*

Le coefficient angulaire $\alpha(x, T)$ de la tangente à une ligne ascendante est donné par l'égalité

$$(30). \quad \left[\frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x^2} + g(x,T)\right]\alpha(x,T) + \frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x\,\partial T} = 0.$$

Le coefficient angulaire $\delta(x, T)$ de la tangente à la ligne descendante qui passe au même point (T, x) est donné par l'égalité

$$(30^{bis}). \quad \left[\frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x^2} - g(x,T)\right]\delta(x,T) + \frac{\partial^2\Phi(x,T)}{\partial x\,\partial T} = 0.$$

Ces égalités, différentiées, donnent :

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + g\right)\frac{d\alpha}{dT} + \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\alpha^2 + \left(2\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial T} + \frac{\partial g}{\partial T}\right)\alpha + \frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial T^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - g\right)\frac{d\delta}{dT} + \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\delta^2 + \left(2\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial T} - \frac{\partial g}{\partial T}\right)\alpha + \frac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial T^2} = 0.$$

En un point de la ligne des états naturels, on a

$$g(x,T) = 0, \quad \alpha(x,T) = \delta(x,T) = \frac{dx}{dT},$$

Digitized by Google

en sorte que les égalités précédentes donnent l'égalité

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}-\frac{d\delta}{d\mathrm{T}}\right)+2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{d\mathrm{T}}+\frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}\right)\frac{dx}{d\mathrm{T}}=0.$$

Mais on a

$$\frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial \mathrm{T}}}{\frac{\partial g}{\partial x}}. \qquad (38).$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire :

$$\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}-\frac{d\delta}{d\mathrm{T}}=\frac{2\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{d\mathrm{T}}}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}}\left(\frac{dx}{d\mathrm{T}}-\frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}}\right).$$

Les trois quantités

$$\frac{\partial g}{\partial x},\quad \frac{dx}{d\mathrm{T}},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$

ne devenant ni nulles, ni infinies dans le champ des valeurs accessibles des (x, T), on voit que, pour que l'on ait

$$\frac{d\alpha}{d\mathrm{T}}-\frac{d\delta}{d\mathrm{T}}=0,$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dx}{d\mathrm{T}}-\frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}}=0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Considérons la ligne ascendante $\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0'$ qui passe au point II. Elle touche en ce point la ligne des états naturels. Nous la nommerons *ligne ascendante de passage.*

Digitized by Google

La ligne ascendante de passage partage le faisceau des lignes ascendantes en deux *sous-faisceaux*.

Les lignes ascendantes AA′ du *premier sous-faisceau* ont, avec la ligne des états naturels, deux rencontres distinctes M et M′, tendant toutes deux vers le point Π lorsque la ligne AA′ tend vers la ligne de passage $\mathcal{A}\mathcal{A}'$. Ces deux rencontres n'existent plus pour une ligne ascendante *aa′* du *deuxième sous-faisceau*.

Considérons maintenant la ligne descendante $\mathcal{D}'\mathcal{D}$, qui touche, au point Π, la ligne des états naturels. Nous la nommerons *ligne descendante de passage*.

La ligne descendante de passage partage le faisceau des lignes descendantes en deux *sous-faisceaux*.

Une ligne descendante D′D du *premier sous-faisceau* a, avec la ligne des états naturels, deux rencontres distinctes, P et P′, qui, toutes deux, tendent vers le point Π lorsque la ligne D′D tend vers la ligne descendante de passage $\mathcal{D}'\mathcal{D}$. Ces deux rencontres n'existent plus pour une ligne descendante *d′d* du *second sous-faisceau*.

Une ligne ascendante AA′ du premier sous-faisceau et une ligne descendante D′D du premier sous-faisceau se rencontrent en trois points distincts α, β, γ, qui, tous trois, tendent à se confondre au point Π lorsque les lignes AA′, D′D tendent respectivement vers les lignes de passage $\mathcal{A}'\mathcal{A}$, $\mathcal{D}'\mathcal{D}$. Ces trois points servent de sommets à deux cycles fermés simples, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. L'un, le cycle $\alpha\beta$, est sinistrorsùm; l'autre, le cycle $\beta\gamma$, est dextrorsùm.

Une ligne ascendante *aa′* du second sous-faisceau et une ligne descendante *d′d* du second sous-faisceau se rencontrent en un seul point μ, qui tend vers le point Π lorsque les lignes *aa′*, *d′d*, tendent respectivement vers les lignes de passage $\mathcal{A}\mathcal{A}'$, $\mathcal{D}'\mathcal{D}$. Deux lignes du second sous-faisceau ne peuvent donc former un cycle simple.

On ne peut, non plus, composer un cycle fermé soit avec une ligne ascendante du premier sous-faisceau et une ligne descendante du second sous-faisceau, soit avec une ligne ascendante du second sous-faisceau et une ligne descendante du premier sous-faisceau. Dans un cas comme dans l'autre, un des côtés du cycle, celui qui appartient à un second sous-faisceau, ne rencontrerait pas la ligne des états naturels, ce qui est impossible.

Digitized by Google

On ne peut passer d'une manière continue d'un cycle sinistrorsùm à un cycle dextrorsùm que par l'intermédiaire d'un cycle évanouissant au point Π, ce qui justifie le nom de *point de passage* donné à ce point.

§ IX. — *Inégalité de Clausius.*

L'hypothèse de l'existence d'un point de passage et les conséquences qui s'en déduisent seront assurément exclues si l'on admet une dernière hypothèse que nous allons énoncer :

Considérons qu'un cycle fermé, accompli sous pression constante, est essentiellement un *cycle non-réversible*. On peut se proposer d'étendre à ce cycle l'inégalité de Clausius; cette extension constituera essentiellement une hypothèse, puisque les conditions requises pour la démonstration de l'inégalité de Clausius ne sont pas remplies par les systèmes dont nous étudions les modifications; cette hypothèse n'a rien de nécessaire, puisque les lois du déplacement isothermique de l'équilibre et du déplacement de l'équilibre par les variations de température, qui suffisent à exclure le mouvement perpétuel, pourraient subsister sans que l'inégalité de Clausius soit vérifiée. C'est pourquoi nous avons développé en premier lieu l'ensemble de la théorie sans faire usage de cette inégalité, dont nous allons, maintenant, admettre l'exactitude :

HYPOTHÈSE. — *Soit* dQ *la quantité de chaleur dégagée par le système pendant qu'il subit une modification élémentaire; soit* T *sa température à cet instant. Pour tout cycle fermé, décrit sous pression constante, on a l'inégalité*

$$\int \frac{dQ}{T} > 0. \qquad (48)$$

L'égalité (18) nous donne

$$\int \frac{dQ}{T} = -\frac{1}{E}\int \frac{1}{T} d\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right]$$
$$= -\frac{1}{E}\int \frac{1}{T^2}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dT.$$

Digitized by Google

L'inégalité (48) peut donc s'écrire

$$(49)\quad \dots\dots\dots \int \frac{1}{T^2}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dT < 0.$$

Supposons le cycle auquel s'étend cette intégration formé d'une seule boucle.

Si le cycle est *sinistrorsùm*, nous avons

$$(50)\quad \dots\dots \begin{cases} \int \frac{1}{T^2}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dT \\ = -\iint \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dx\, dT, \end{cases}$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire délimitée par le cycle.

Si, au contraire, le cycle est *dextrorsùm*, nous avons

$$(50^{bis})\quad \dots\dots \begin{cases} \int \frac{1}{T^2}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dT \\ = \iint \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dx\, dT, \end{cases}$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire délimitée par le cycle.

Ainsi, dans le cas d'un cycle sinistrorsùm, en vertu de l'égalité (50), l'inégalité (49) devient

$$(51)\quad \dots\dots \iint \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dx\, dT > 0,$$

tandis que dans le cas d'un cycle dextrorsùm, en vertu de l'égalité (50^{bis}), l'inégalité (49) devient

$$(51^{bis})\quad \dots\dots \iint \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x,T) - T\frac{\partial\Phi(x,T)}{\partial T}\right] dx\, dT < 0.$$

Digitized by Google

Si l'on se souvient que l'on a

$$(31). \quad \ldots \ldots \lambda(x, T) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(x, T) - T\frac{\partial \Phi(x, T)}{\partial T}\right],$$

les inégalités (51) et (51^{bis}) deviennent

$$(52). \quad \ldots \ldots \iint \frac{\lambda(x, T)}{T^2} dx\, dT > 0,$$

$$(52^{bis}) \quad \ldots \ldots \iint \frac{\lambda(x, T)}{T^2} dx\, dT < 0.$$

$\lambda(x, T)$ a, par hypothèse, dans le champ des valeurs accessibles de x et de T, un signe invariable. Si ce signe est le signe +, l'inégalité (52) est vérifiée, tandis que l'inégalité (52^{bis}) est impossible; si ce signe est le signe —, l'inégalité (52^{bis}) est vérifiée, tandis que l'inégalité (52) est impossible.

L'hypothèse que nous avons énoncée entraîne donc la proposition suivante :

Si la modification étudiée est une modification endothermique, tout cycle fermé, formé d'une seule boucle, est sinistrorsùm.

Si la modification étudiée est une modification exothermique, tout cycle fermé, formé d'une seule boucle, est dextrorsùm.

Appliquons, en particulier, ce théorème aux cycles fermés simples.

Parmi les huit types de cycles simples que nous avions classés (p. 27) et que nous avions représentés en la figure 11, il nous oblige à exclure quatre types de cycles, savoir ceux qui portaient les n^{os} II, III, VI, VII.

Il nous reste donc *quatre* types de cycles fermés simples qui sont caractérisés de la manière suivante :

		SENS du cycle.	N° du cycle.
Première catégorie.	Modification endothermique : $\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	1
	Modification exothermique : $\lambda < 0$	*Dextrorsùm*	2
Seconde catégorie.	Modification endothermique : $\lambda > 0$	*Sinistrorsùm*	3
	Modification exothermique : $\lambda < 0$	*Dextrorsùm*	4

Digitized by Google

Ces quatre types de cycles sont représentés en la figure 13.

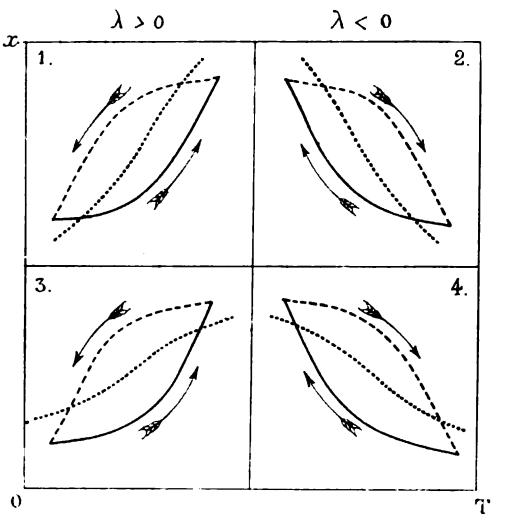


FIG. 13.

Aux deux points de rencontre d'un cycle fermé simple et de la ligne des états naturels, la différence

$$\left(\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}}\right)$$

a le même signe; comparons ce signe au signe qu'a $\lambda(x, \mathrm{T})$ pour la modification étudiée et au signe qu'a

$$\frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x}$$

tout le long de la ligne des états naturels. Si nous nous souvenons que les systèmes de la première catégorie sont caractérisés par l'inégalité

(40). . . . . $\frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x} > 0,$

tandis que les systèmes de la seconde catégorie sont caractérisés par l'inégalité

(40bis). . . . . $\frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x} < 0,$

Digitized by Google

nous obtenons les résultats suivants :

N° du cycle.			
1.	$\frac{\partial g}{\partial x} > 0,$	$\lambda > 0,$	$\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} < 0,$
2.	$\frac{\partial g}{\partial x} > 0,$	$\lambda < 0,$	$\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} > 0,$
3.	$\frac{\partial g}{\partial x} < 0,$	$\lambda > 0,$	$\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} > 0,$
4.	$\frac{\partial g}{\partial x} < 0,$	$\lambda < 0,$	$\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} < 0.$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

En vertu de l'inégalité de Clausius, on a, pour tout système, et en tout point de la ligne des états naturels, l'inégalité

$$(53). \quad \ldots \quad \lambda(x, \mathrm{T}) \frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x} \left(\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} \right) < 0.$$

Si l'on observe que l'on a

$$(31). \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(x, \mathrm{T}) = \dfrac{1}{\mathrm{E}} \dfrac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(x, \mathrm{T}) - \mathrm{T} \dfrac{\partial \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \right], \\ \dfrac{dx}{d\mathrm{T}} = - \dfrac{\dfrac{\partial^2 \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial x \, \partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial^2 \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial x^2}}, \end{array} \right.$$

$$(38). \quad \ldots \quad \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}} = - \frac{\dfrac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x}},$$

l'inégalité (53) peut s'écrire

$$(54). \quad \ldots \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(x, \mathrm{T}) - \mathrm{T} \frac{\partial \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \right] \cdot \frac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x} \cdot \left[\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial x \, \partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial^2 \Phi(x, \mathrm{T})}{\partial x^2}} - \frac{\dfrac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}}{\dfrac{\partial g(x, \mathrm{T})}{\partial x}} \right] > 0.$$

Digitized by Google

L'inégalité (53) montre que

$$\left(\frac{dx}{d\mathrm{T}} - \frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{T}}\right)$$

a le même signe tout le long de la ligne des états naturels, ce qui exclut l'hypothèse de l'existence d'un *point de passage.*

CHAPITRE II.

LES MODIFICATIONS PERMANENTES DU SOUFRE LIQUIDE.

§ I. — *Point de congélation du soufre liquide.*

Si, après avoir fondu du soufre, on porte le liquide à des températures variables, pour le refroidir ensuite et en déterminer la solidification par le contact d'un octaèdre, on trouve que la température de solidification, au lieu d'être fixe, comme pour la plupart des liquides, dépend des températures par lesquelles on a fait passer le soufre liquide : « La température de solidification, dit M. Gernez (*), est la plus élevée quand on a produit la fusion à la température la plus basse possible, par exemple à 121°; dans ce cas, elle atteint 117°,4; si l'on a porté le liquide à 144°, elle n'est plus que 113°,4; elle descend à 112°,4 pour le soufre maintenu cinq minutes à 170°, température où il est très visqueux et où, suivant les expériences de M. Berthelot, se produit le maximum de soufre insoluble. A partir de cette valeur, elle s'élève rapidement à 114°,4, température de solidification du soufre qui a été porté aux diverses températures comprises entre 200° et 447°. Cette dernière valeur est sensiblement la même que celle qui correspond à la solidification du soufre insoluble. »

Ainsi du soufre liquide, que l'on a chauffé et que l'on ramène à une température voisine de celle à laquelle il a été fondu, ne reprend pas son état

(*) D. Gernez, *Sur la détermination de la température de solidification des liquides et, en particulier, du soufre* (Journal de physique, 1re série, t. V, p. 212, 1876).

Digitized by Google

initial; il est affecté d'une modification permanente qui dépend de l'échauffement qu'on lui a fait subir et qui influe sur sa température de solidification.

En quoi consiste cette modification?

Les chimistes admettent, en général, que le soufre liquide est un mélange de deux soufres distincts, que nous désignerons par les lettres S et S'; au contact d'une parcelle de soufre solide, le liquide surfondu se solidifie; le solide obtenu est, lui aussi, formé par le mélange de deux soufres distincts, l'un, S, soluble dans le sulfure de carbone; l'autre, S', insoluble dans le sulfure de carbone. Ainsi donc, une masse M de soufre, liquide ou solide, se compose d'une masse $\mu = \frac{M}{1+x}$ de soufre à l'état S et d'une masse $\mu' = \frac{Mx}{1+x}$ de soufre à l'état S'. Le rapport $x = \frac{\mu'}{\mu}$ est ce que nous nommerons la *concentration* de ce soufre.

Lorsque nous touchons du soufre liquide surfondu avec une parcelle de soufre octaédrique, il se solidifie en une masse qui a l'apparence de soufre cristallisé octaédrique, mais qui est en réalité un mélange des deux soufres S et S' à l'état solide. Le point de congélation est une fonction de x que nous désignerons par $\Theta_1(x)$.

Les expériences de M. Gernez nous montrent que l'on obtient la plus grande valeur du point de congélation en prenant du soufre octaédrique produit par évaporation d'une solution sulfocarbonée, corps qui est absolument exempt de soufre insoluble, et en le fondant à la température la moins élevée possible, de manière à produire le moins possible de soufre insoluble. On peut donc admettre que $\Theta_1(x)$ atteint sa valeur maxima OM_0 (fig. 14) pour $x = 0$. $\Theta_1(x)$ décroît ensuite pour atteindre une valeur minima qui, d'après les expériences de M. Gernez, est 112°,4; cette valeur minima $X_1 m$ est atteinte pour une certaine valeur de x que nous désignerons par X_1. x continuant à croître, $\Theta_1(x)$ augmente; lorsque x croît au delà de toute limite, $\Theta_1(x)$ tend vers le point de congélation OM_1 du soufre entièrement insoluble obtenu en épuisant la fleur de soufre par le sulfure de carbone.

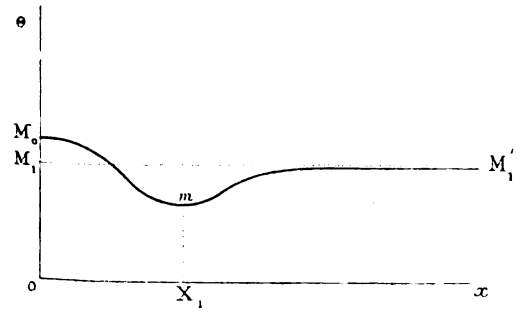


FIG. 14.

Digitized by Google

Si, au lieu de toucher le soufre liquide surfondu avec un cristal octaédrique, on le touche avec un cristal prismatique, le soufre cristallise sous forme prismatique ; d'ailleurs, le solide ainsi obtenu est un mélange des deux soufres S et S'. Le point de congélation sera une fonction de x, $\Theta_2(x)$, distincte de $\Theta_1(x)$; les expériences de M. Gernez montrent que l'allure de la fonction $\Theta_2(x)$ est analogue à l'allure de la fonction $\Theta_1(x)$; mais la valeur de x pour laquelle elle prend une valeur minima n'est pas nécessairement égale à X_1 ; nous la désignerons par X_2.

Enfin, on peut toucher le soufre liquide surfondu avec une parcelle empruntée à la nouvelle variété cristalline que M. Gernez (*) a découverte et qu'il a nommée *soufre nacré*. Le point de congélation sera une nouvelle fonction de x, $\Theta_3(x)$; bien que cette fonction n'ait pas été l'objet de déterminations directes, l'étude des phénomènes dont il sera question au paragraphe suivant conduit à penser que la fonction $\Theta_3(x)$, comme les fonctions $\Theta_1(x)$ et $\Theta_2(x)$, commence par décroître lorsque x croît à partir de 0, passe par une valeur minima, puis croît de nouveau pour tendre vers une limite finie lorsque x croît au delà de toute limite. La valeur de x pour laquelle $\Theta(x)$ passe par un minimum n'est nécessairement égale ni à X_1 ni à X_2; nous la désignerons par X_3.

§ II. — *Durée de solidification du soufre surfondu.*

Les modifications permanentes que le soufre liquide éprouve lorsqu'on le chauffe peuvent être mises en évidence par un autre procédé qui a permis à M. Gernez d'étudier toutes les particularités de cette transformation.

Prenons une substance dont la température de fusion a une certaine valeur Θ ; maintenons-la en surfusion à une température t, inférieure à Θ, dans un tube étroit; lorsque nous ferons parvenir, à la surface du liquide, une particule solide, cette particule deviendra le point de départ d'une solidification ; la surface de séparation du solide et du liquide se propagera dans

(*) D. GERNEZ, *Recherches sur la durée de solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété cristalline du soufre* (JOURNAL DE PHYSIQUE, 2e série, t. III, p. 58, 1884).

Digitized by Google

le tube; la longueur dont elle s'avancera dans un temps donné sera, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à ce temps; elle sera indépendante du diamètre du tube, du moins tant que ce diamètre demeurera inférieur à une certaine limite; elle ne dépendra que de la température t; nulle pour $t = \Theta$, elle ira en croissant avec $(\Theta - t)$. M. Gernez a vérifié ces lois en étudiant la solidification du phosphore (*).

Ces phénomènes, très simples en général, deviennent fort compliqués dans le cas du soufre.

Supposons, par exemple, que l'on solidifie le soufre par le contact d'une parcelle octaédrique. Pour croître d'une longueur donnée, 1 centimètre par exemple, la colonne solide mettra un certain temps Δ_1; à une température t, inférieure au point de congélation $\Theta_1(x)$ du soufre, Δ_1 dépendra de x et de $[\Theta_1(x) - t]$. On peut se rendre compte d'une manière suffisante des expériences en supposant que Δ_1 ne dépend pas explicitement de x et en posant

$$\Delta_1 = f_1[\Theta_1(x) - t],$$

$f_1(\zeta)$ étant une fonction qui est infinie pour $\zeta = 0$ et qui diminue sans cesse lorsque ζ augmente.

Supposons que l'on maintienne à la température t une valeur fixe. Δ_1 prendra sa plus petite valeur OP_0 (fig. 15) pour $x = 0$, croîtra avec x tant que x sera inférieur à X_1, passera par un maximum Op pour cette valeur de x, puis décroîtra et tendra vers une limite finie OP_1, supérieure à OP_0, lorsque x croîtra au delà de toute limite.

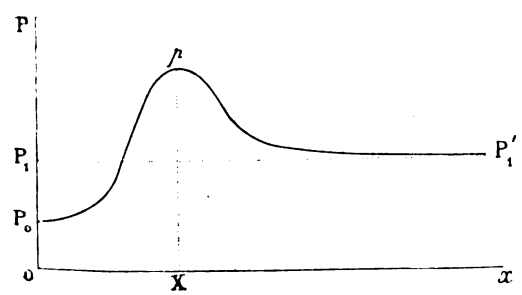


FIG. 15.

Au lieu de toucher le soufre surfondu avec une parcelle de soufre octaédrique, on peut le toucher soit avec une parcelle de soufre prismatique, soit avec une parcelle de soufre nacré; on obtient alors des valeurs diffé-

(*) D. GERNEZ, *Recherches sur la durée de solidification des corps surfondus* (JOURNAL DE PHYSIQUE, 2e série, t. II, p. 159, 1883).

Digitized by Google

rentes Δ_2, Δ_3, de la durée nécessaire pour que la solidification progresse de 1 centimètre. On peut écrire

$$\Delta_2 = f_2[\Theta_2(x) - t],$$
$$\Delta_3 = f_3[\Theta_3(x) - t].$$

Si l'on se donne la température t du bain de surfusion, Δ_2, Δ_3 deviennent des fonctions de x; Δ_2 est maximum pour $x = X_2$ et Δ_3 pour $x = X_3$.

Les principes posés dans ces deux paragraphes vont nous permettre d'étudier expérimentalement les modifications permanentes éprouvées par le soufre liquide.

§ III. — *Postulats. — Ordre des recherches expérimentales.*

Nous supposerons que les considérations développées dans le premier Chapitre soient applicables à la transformation du soufre S en soufre S'.

L'expérience a montré qu'à température constante et sous pression constante, la transformation du soufre S en soufre S' est accompagnée d'une notable absorption de chaleur : *La modification que nous étudions est donc une modification endothermique.* C'est le premier postulat que nous admettrons.

Nous admettrons ensuite ce second postulat : *La transformation, au sein du soufre liquide, du soufre* S *en soufre* S', *est une transformation de la première catégorie.*

Ces deux postulats nous suffiront à expliquer tous les faits révélés par l'expérience.

Les observations de M. Gernez (*) ont été faites de la manière suivante :

M. Gernez prend pour point de départ du soufre octaédrique obtenu par l'évaporation d'une solution de soufre dans le sulfure de carbone; ce corps, exempt de soufre insoluble, est ce que nous nommerons le *soufre normal.* Il fond ce soufre dans un bain dont la température est T, et l'y maintient

(*) D. Gernez, *Recherches sur la durée de solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété cristalline du soufre* (Journal de physique, 2e série, t. III, p. 58, 1884).

Digitized by Google

pendant un temps τ. Puis il le porte dans un bain dont la température t est inférieure au point de congélation du soufre et l'y laisse séjourner un temps τ'. Il le touche alors soit avec une parcelle de soufre octaédrique, soit avec un prisme, soit avec un fragment de soufre nacré, et observe le temps mis par la surface de séparation du solide et du liquide pour progresser d'une longueur donnée.

Pour une température donnée t, et pour une nature donnée du soufre ensemencé, ce temps dépend :

1° De la température T du bain de fusion;

2° De la durée τ du séjour dans ce bain;

3° De la durée τ' du séjour dans le bain de surfusion.

La théorie et l'expérience vont nous donner des indications absolument concordantes sur le sens dans lequel influe la grandeur de chacune de ces trois variables.

§ IV. — *Influence de la température* T *du bain de fusion.*

Prenons du soufre normal, absolument exempt de soufre insoluble dans le sulfure de carbone. Chauffons-le jusqu'à la température de fusion parfaitement fixe Θ. Il a pu, dans ce premier échauffement, se former une quantité très petite de soufre insoluble. Notre soufre liquide initial a donc une concentration très faible. Le point représentatif initial M_0 (fig. 16) a pour abscisse Θ et une très petite ordonnée ΘM_0.

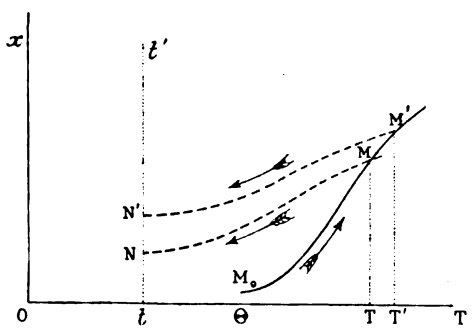


FIG. 16.

Élevons la température à partir de Θ; comme nous avons affaire à une modification endothermique, le point figuratif suit une ligne ascendante M_0M qui monte de gauche à droite. La concentration en soufre S' du liquide croît constamment au fur et à mesure que la température T s'élève.

La température ayant pris la valeur T et le point figuratif étant arrivé en M, abaissons la température; le point figuratif va suivre une ligne

Digitized by Google

descendante MN. Cette ligne rencontre en N la ligne tt' qui a pour abscisse la température du bain de surfusion. Le soufre liquide ramené dans ce bain renferme une proportion de soufre S′ mesurée par $x = t\mathrm{N}$.

Deux cas sont à considérer :

PREMIER CAS. *Le point* M *est au-dessous de la ligne des états naturels.* — Dans ce cas, comme le système étudié est un système de la première catégorie, on a, au point M,

$$\alpha(x, \mathrm{T}) - \delta(x, \mathrm{T}) > 0.$$

La ligne descendante MN est tout entière au-dessus de la ligne $\mathrm{M_0M}$. De plus, si l'on chauffe le soufre liquide non plus jusqu'à la température T, mais jusqu'à une température T′ supérieure à T, pour abaisser ensuite sa température jusqu'à t, le point figuratif suivra une nouvelle ligne descendante M′N′, située tout entière au-dessus de la ligne MN. Le soufre liquide, ramené à la température t, aura une concentration $x' = t\mathrm{N}'$ supérieure à $x = t\mathrm{N}$.

Le soufre liquide, ramené à une température donnée t, *renfermera d'autant plus de soufre insoluble qu'on aura porté le liquide à une température* T *plus élevée.*

DEUXIÈME CAS. *Le point* M *est au-dessus de la ligne des états naturels.* — Dans ce cas (fig. 17), on a, au point M,

$$\alpha(x, \mathrm{T}) - \delta(x, \mathrm{T}) < 0.$$

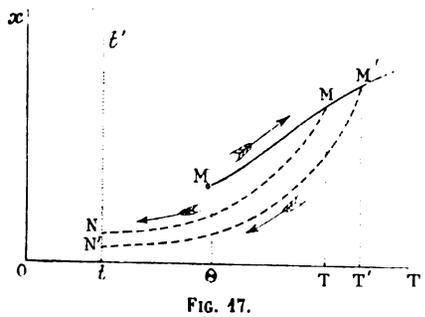


FIG. 17.

La ligne descendante MN est au-dessous de la ligne ascendante $\mathrm{M_0M}$. De plus, si l'on chauffe le soufre à une température T′, supérieure à T, pour abaisser ensuite sa température jusqu'à t, le point figuratif suivra une nouvelle ligne descendante M′N′, située tout entière au-dessous de la ligne MN. Le soufre liquide, ramené à la température t, aura une concentration $x' = t\mathrm{N}'$, inférieure à $x = t\mathrm{N}$.

Le soufre liquide, ramené à une température donnée t, *renfermera d'autant*

Digitized by Google

moins de soufre insoluble qu'on aura porté le liquide à une température T *plus élevée.*

L'expérience nous permettra donc de savoir si le point M est au-dessous ou au-dessus de la ligne des états naturels.

Ensemençons, dans le soufre surfondu à la température t, du soufre octaédrique et déterminons le temps mis par la colonne solide pour s'accroître d'une longueur donnée; lorsque le soufre a été porté à une température T peu supérieure au point de fusion, cette durée croît avec T (*); on peut affirmer qu'il en est de même de x. Donc, aux températures T peu supérieures au point de fusion, correspondent, sur la ligne ascendante fournie par le soufre normal, des points qui sont situés au-dessous de la ligne des états naturels. La modification étant exothermique et de la première catégorie, on voit sans peine qu'il en est de même pour les points de la même ligne ascendante qui correspondent aux températures plus élevées. On peut donc énoncer la proposition suivante :

La concentration x *du soufre liquide, amené en surfusion à une température donnée* t, *est d'autant plus grande que le liquide a été porté à une température* T *plus élevée.*

Cela posé, examinons les particularités que présentera la durée de solidification du soufre surfondu si l'on y sème, par exemple, une parcelle octaédrique.

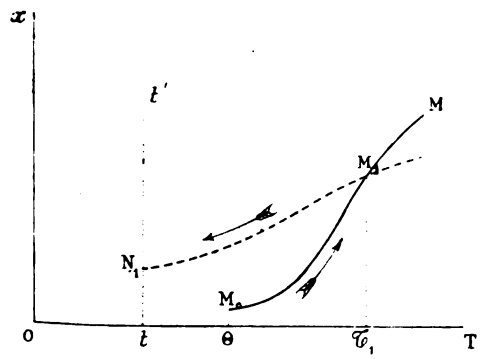


FIG. 18.

Sur la ligne tt', portons une ordonnée tN_1 (fig. 18) égale à la concentration que nous avons nommée X_1. La ligne descendante qui passe au point N_1 coupe la ligne ascendante fournie par le soufre normal en un point M_1, d'abscisse $\mathcal{T}_1$. Ce que nous avons dit au paragraphe II nous permet alors d'énoncer la proposition suivante :

La durée Δ_1 *nécessaire à la colonne solide pour s'allonger de 1 centimètre*

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 72.

Digitized by Google

varie avec la température la plus élevée T *à laquelle le soufre ait été porté; elle croît avec* T, *si* T *est inférieur à* $\mathfrak{T}_1$; *elle décroît lorsque* T *augmente, si* T *est supérieur à* $\mathfrak{T}_1$.

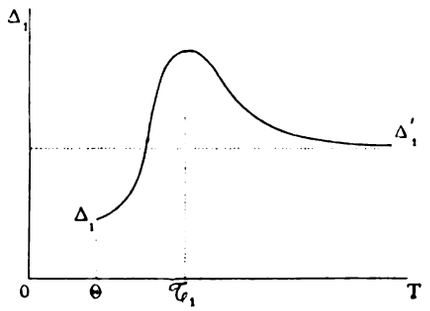


FIG. 19.

La courbe qui marque la variation de Δ_1 avec T a une forme analogue à celle que représente la figure 19.

A la proposition précédente, on peut adjoindre celle-ci :

Le point de congélation Θ_1 *du soufre liquide où l'on sème des octaèdres dépend de la température* T *à laquelle le soufre liquide a été porté. Il décroît lorsque* T *croît pour les valeurs de* T *inférieures à* $\mathfrak{T}_1$; *il croît avec* T *pour les valeurs de* T *supérieures à* $\mathfrak{T}_1$.

Ce dernier énoncé est vérifié par les expériences, dues à M. Gernez, que nous avons rapportées au § I. Quant au premier, il est contrôlé par les observations suivantes (*) :

Supposons le soufre maintenu en surfusion dans un bain dont la température est $t = 100°,7$ C. et semons-y des octaèdres; le temps exigé par la colonne solide pour grandir de 1 centimètre est $1^m\ 11^s$ lorsque la température T est égale à $129°,5$; elle croît jusqu'à 274 minutes lorsque la température T atteint 188°, puis diminue jusqu'à $15^m\ 45^s$ lorsque T croît jusqu'à 440°.

Au lieu de semer des octaèdres dans le liquide surfondu, nous pouvons y semer des prismes; les deux énoncés précédents demeureront valables à la condition de remplacer la température $\mathfrak{T}_1$ par une autre température $\mathfrak{T}_2$ définie au moyen de X_2, comme $\mathfrak{T}_1$ au moyen de X_1. Voici les expériences (**) qui confirment les propositions que l'on obtient ainsi :

Après avoir porté pendant cinq minutes le soufre liquide à une température T, on le ramène à une température fixe $t = 100°,3$, où il est surfondu,

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 72.
(**) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 63.

Digitized by Google

et on provoque la cristallisation en y semant du soufre prismatique; le temps exigé par la colonne solide pour grandir de 1 centimètre est $0^{sec.},50$ lorsque la température T est égale à 129°,5; il croît jusqu'à $25^{sec.}$ 59, valeur qu'il atteint pour une valeur de T égale à 173°,5; il diminue ensuite jusqu'à $16^{sec.},06$, lorsque T augmente de 173°,5 à 440°.

Enfin, on peut faire cristalliser le soufre surfondu en le touchant avec une parcelle de soufre nacré. On pourra énoncer encore des propositions semblables aux précédentes, à condition de remplacer les températures $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ par une température $\mathfrak{C}_3$, qui se déduit de X_3 comme $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ se déduisent de X_1 et de X_2. L'expérience montre (*) que cette température $\mathfrak{C}_3$ est voisine de 220°.

M. Gernez a interprété les résultats expérimentaux qu'il a obtenus en admettant que la température $\mathfrak{C}_1$ était celle où le soufre liquide présentait la plus grande concentration en soufre insoluble. Mais, s'il en était ainsi, les trois températures $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ devraient être identiques entre elles, tandis que les courbes tracées par M. Gernez donnent à peu près les valeurs suivantes pour ces trois températures :

$$\mathfrak{C}_1 = 190^\circ \text{ C.}$$
$$\mathfrak{C}_2 = 175^\circ$$
$$\mathfrak{C}_3 = 220^\circ$$

La théorie que nous proposons s'accorde pleinement avec un paradoxe signalé par M. Gernez (**) et qui est le suivant :

Si le liquide est porté à une température supérieure à la température $\mathfrak{C}_2$ qui correspond à la plus grande durée de solidification du soufre surfondu, « *bien que le liquide repasse à cette température qui correspond à un maximum de la durée d'accroissement,* lorsqu'on le ramène dans le bain de surfusion, il cristallise aussi rapidement que si on l'avait chauffé à une température notablement inférieure à celle-là ».

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 80.
(**) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 73.

Digitized by Google

§ V. — *Influence de la durée τ du séjour dans le bain de fusion.*

Prenons du soufre normal; fondons-le, chauffons-le à la température T, puis ramenons-le à la température t. Le point figuratif décrit le chemin M_0MN (fig. 20). Le soufre surfondu offre une concentration $x = tN$ de soufre insoluble.

Reprenons la même expérience, mais laissons le soufre séjourner un certain temps τ dans le bain de fusion dont la température demeure *à peu près,* mais non pas rigoureusement, constante.

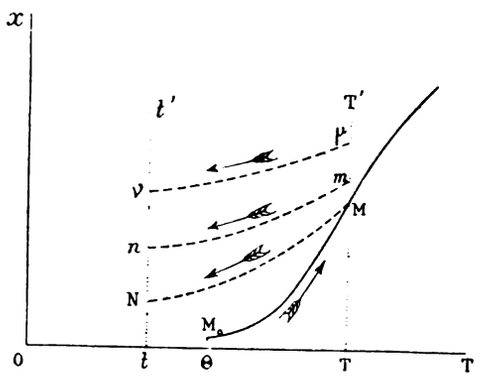


Fig. 20.

Nous avons vu que le point M était au-dessous de la ligne des états naturels; d'ailleurs, par hypothèse, la transformation que nous étudions est une transformation de la première catégorie. Donc, sous l'influence des petites oscillations de la température, la concentration x du soufre maintenu dans le bain de fusion ira en augmentant. Le point figuratif s'élèvera sur une parallèle TT' à Ox. Au bout d'un certain temps, il aura pris une position telle que m.

Si alors on refroidit le soufre, le point figuratif suivra la ligne descendante mn, tout entière située au-dessus de MN; lorsque le soufre aura repris la température t, il présentera une concentration $\xi = tn$ supérieure à $x = tN$.

D'ailleurs, le point n ne peut pas s'élever au-dessus du point N d'une quantité quelconque.

Soit μ le point où la ligne TT' rencontre la ligne des états naturels; soit $\mu\nu$ la ligne descendante qui passe par ce point. Quelque grande que soit la durée τ du séjour dans le bain de fusion à température T, le point m ne peut s'élever que jusqu'au point μ; la concentration du soufre liquide, ramené à la température t, a pour limite supérieure $t\nu$.

Digitized by Google

Nous pouvons, dès lors, énoncer les propositions suivantes :

Si l'on fait séjourner le soufre un certain temps τ *dans le bain de fusion dont la température* T *est sensiblement fixe, la concentration* x *du soufre ramené dans le bain de surfusion, dont la température est* t, *croîtra avec* x. *Cette concentration tendra vers une certaine limite qui dépend de la température* T.

Dans le soufre surfondu, semons un germe octaédrique et étudions comment varie la durée de solidification. Les résultats pourront présenter quelque complication tenant à ce qu'un accroissement de la concentration x amène une augmentation ou une diminution de la durée de solidification, selon que x est inférieur ou supérieur à X_1. Laissons de côté ces complications, qu'il serait aisé de discuter, et bornons-nous au cas simple où la limite t_ν est au plus égale à X_1. Dans ce cas, tout accroissement de la concentration du soufre surfondu correspondra à une augmentation de la durée de solidification. Dès lors, la proposition précédente se transformera en celle-ci : *La durée de solidification du soufre surfondu croît et tend vers une limite supérieure lorsqu'on fait croître la durée* τ *du séjour dans un bain de fusion de température à peu près fixe.*

Voici les résultats de trois couples d'expériences (*) comparatives dans lesquelles le soufre a été fondu à la même température T = 129°,5, mais maintenu dans le bain de fusion pendant des temps τ différents, puis laissé dans le bain de surfusion pendant le même temps, quinze minutes, avant d'être ensemencé en octaèdres.

		Durée de solidification pour 1 centimètre.
$t = 100°,5$	$\tau =$ 5m.	1m 16s
	$\tau =$ 35	13 15
$t = 100°,6$	$\tau =$ 5	1 8
	$\tau =$ 89	40 0
$t = 100°,2$	$\tau =$ 5	1 3
	$\tau =$ 154	76 0

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 70.

Digitized by Google

On peut opérer de même, mais en semant des prismes. On obtient alors les résultats suivants (*) :

		Durée de solidification pour 1 centimètre.
$t = 100°,5$	$\tau = 5^m$	$0^m,55^s$
	$\tau = 55$	4,66
$t = 100°,3$	$\tau = 5$	0,50
	$\tau = 60$	5,79
$t = 100°,6$	$\tau = 5$	0,56
	$\tau = 89$	8,48

L'accord entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience est donc complet.

§ VI. — *Influence de la durée τ' du séjour dans le bain de surfusion.*

La ligne des états naturels $\nu\nu'$ (fig. 21) coupe la ligne tt' au point ν. La modification étudiée étant de la première catégorie, la concentration du soufre surfondu, maintenu un temps τ' à la température à peu près constante t, est une fonction croissante ou une fonction décroissante de τ', selon que sa valeur initiale est inférieure ou supérieure à $t\nu$. Lorsque τ' croîtra au delà de toute limite, la concentration tendra, en tout cas, vers $t\nu$.

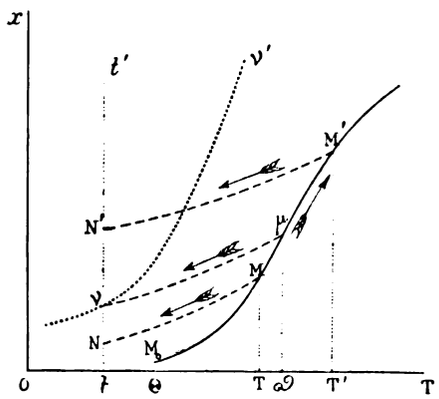


Fig. 21.

Considérons la ligne descendante $\mu\nu$ qui passe au point ν. Elle rencontre en μ la ligne ascendante relative au soufre normal. Soit ϑ l'abscisse du point μ. Si l'on chauffe du soufre liquide normal jusqu'à une température T, inférieure à ϑ, ce soufre, ramené à la température t, aura une concentration tN inférieure à $t\nu$. Si, au contraire, on chauffe

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 61.

Digitized by Google

du soufre liquide normal jusqu'à une température T', supérieure à ϑ, ce soufre, ramené à la température t, aura une concentration tN' supérieure à $t\nu$. Nous pouvons, dès lors, énoncer la proposition suivante :

Si l'on chauffe du soufre normal jusqu'à une certaine température T, *pour le ramener ensuite dans un bain de surfusion maintenu à une température à peu près constante* t, *la concentration de ce soufre est une fonction croissante ou une fonction décroissante de la durée* τ' *du séjour dans le bain de surfusion, selon que la température* T *est inférieure ou supérieure à la température* ϑ.

Supposons maintenant que nous ensemencions le soufre surfondu avec des germes prismatiques et observons la durée de solidification. Les résultats obtenus seront très simples si nous avons eu soin de ne porter le soufre liquide à aucune température supérieure à celle que nous avons nommée Θ_2; dans ces conditions, en effet, la concentration du soufre surfondu sera assurément inférieure à X_2; la durée de solidification Δ_2 sera une fonction croissante de la concentration; nous pourrons, dès lors, énoncer la proposition que voici :

La durée de solidification du soufre surfondu augmente ou diminue avec la durée τ' *du séjour dans le bain de surfusion, selon que la température* T *à laquelle le soufre liquide a été porté est inférieure ou supérieure à la température* ϑ.

Comparons cette loi avec les résultats de l'expérience :

1° Du soufre normal (*) a été chauffé pendant cinq minutes à 129°,5, puis plongé dans un bain de surfusion de température $t = 100°,3$. Après qu'il a séjourné un temps τ', on y sème des prismes. Si la durée de séjour dans le bain de surfusion a été $\tau' = 15^m$, la masse solide s'allonge de 1 centimètre en $0^s,50$. Si la durée du séjour dans le bain de surfusion a été $\tau' = 60^m$, la masse solide s'allonge de 1 centimètre en $0^s,66$.

2° Du soufre normal (**) est porté, pendant cinq minutes, à la température T = 219°. Il est ramené ensuite dans un bain de surfusion à la température $t = 101°$. Après l'y avoir fait séjourner un temps τ', on y sème du

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 62.
(**) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 62.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

MODIFICATIONS PERMANENTES DU SOUFRE PRISMATIQUE.

§ 1. — *Point de transformation et vitesse de transformation du soufre prismatique.*

Le soufre liquide est, en général, un mélange de deux corps que nous avons nommés S et S′, l'un étant un état allotropique de l'autre; lorsque le soufre liquide cristallise soit à l'état octaédrique, soit à l'état prismatique, il cristallise en masse, en sorte que le soufre solide, provenant de cette cristallisation, est non pas un corps entièrement défini, mais un mélange en proportions variables de deux soufres différents, S et S′, le premier soluble dans le sulfure de carbone, le second insoluble; pour définir l'état d'une masse de soufre, prismatique par exemple, il ne suffira pas de connaître sa température absolue T et son volume v; il faudra connaître encore quel est, pour cette masse de soufre prismatique, le rapport x de la masse μ' de soufre S′ à la masse μ de soufre S.

Une masse de soufre prismatique, de concentration x donnée, se transforme nécessairement (*) en octaèdres au contact d'une parcelle de soufre octaédrique, pourvu que la température T soit inférieure à une certaine température $H(x)$, variable avec la concentration x du soufre, mais toujours voisine de 97°. Inversement, aux températures supérieures au point de transformation $H(x)$, une masse de soufre octaédrique de concentration x se transforme nécessairement en prismes au contact d'une parcelle de soufre prismatique.

On rend compte de toutes les observations de M. Gernez en admettant la proposition suivante :

Le point de transformation $H(x)$ *est d'autant moins élevé que la concentration* x *est plus grande.*

(*) D. Gernez, *Sur le phénomène de la surfusion cristalline du soufre et sur la vitesse de transformation du soufre prismatique en octaédrique.* (Journal de physique, 2e série, t. II, p. 349, 1883.)

Digitized by Google

D'ailleurs, nous le répétons, les variations de $H(x)$ sont très petites.

Prenons, à une température θ inférieure à $H(x)$, une colonne de soufre prismatique obtenue en semant un prisme dans du soufre liquide surfondu, contenu dans un tube très fin. A la surface de cette colonne, écrasons une parcelle de soufre octaédrique; la transformation en octaèdres commence aussitôt; une différence de transparence permet de distinguer la partie de la colonne transformée en octaèdres de la partie demeurée à l'état prismatique. La surface de séparation s'avance de longueurs égales dans des temps égaux. Si nous désignons par D le temps que cette surface emploie à franchir une longueur de 1 centimètre, cette *durée de transformation* D sera une fonction des variables θ et x, ou, si l'on préfère, des variables $[H(x) - \theta]$ et x.

Supposons qu'on laisse à x une valeur invariable. D sera alors une simple fonction de $(H - \theta)$,

$$D = \varphi(H - \theta).$$

Étudions expérimentalement (*) comment cette fonction varie avec θ.

Elle diminue d'abord en même temps que θ, tant que θ demeure supérieur à 50°; mais lorsque θ, continuant à diminuer, tombe au-dessous de 50°, D prend des valeurs rapidement croissantes.

Nous aurons soin d'opérer toujours à des températures θ supérieures à celle pour laquelle D *passe par un minimum.*

Nous pourrons, comme première approximation, supposer que D ne dépend pas explicitement de x, mais seulement de $[H(x) - \theta]$ et écrire, d'une manière générale,

$$D = \varphi[H(x) - \theta].$$

Dans les limites où nous opérons, D est une fonction croissante de θ; φ est donc une fonction décroissante de la variable $[H(x) - \theta]$. D'ailleurs, $H(x)$ est une fonction décroissante de x. Donc, *si nous nous donnons la température θ à laquelle on produit la transformation, la durée de la transformation* D *croîtra constamment avec la concentration* x.

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 352.

Digitized by Google

Si l'on mesure dans deux circonstances différentes la durée de transformation à une température donnée θ, on pourra déterminer quelle est celle de ces deux circonstances où le soufre prismatique offrait la plus grande concentration.

§ II. — *Postulats. — Ordre des recherches expérimentales.*

La théorie des modifications permanentes du soufre prismatique repose sur deux postulats dont le premier est directement vérifié par l'expérience; du second nous trouverons de nombreuses vérifications indirectes :

1° *La transformation du soufre* S *en soufre* S', *au sein du soufre cristallisé prismatique, est une transformation endothermique;*

2° *Cette transformation appartient à la première catégorie.*

M. Gernez (*) observait la durée de transformation dans les conditions suivantes :

Du soufre *normal* était fondu, puis porté à une certaine température T où on le maintenait un temps τ; on retirait ensuite le tube du bain de fusion et on le faisait rapidement passer dans le bain de surfusion à la température t où il séjournait un temps τ'; on touchait alors le liquide avec l'extrémité d'un fil de platine portant un cristal prismatique, et des prismes se développaient aussitôt d'un bout à l'autre du tube. On portait le tube dans le bain à la température θ, où devait être étudiée la transformation en soufre octaédrique. On provoquait cette dernière au moyen d'un petit cristal octaédrique que l'on écrasait à la surface du soufre prismatique.

La concentration x peut varier pendant la congélation du soufre surfondu. Mais il nous est impossible de savoir de quelle manière elle varie. Nous ne pouvons donc discuter les résultats expérimentaux qu'en négligeant cette variation et en admettant qu'aussitôt après la congélation, au sein du soufre prismatique, x a sensiblement la même valeur qu'au sein du liquide, aussitôt avant la congélation. Nous verrons du reste que les explications qui font usage de cette supposition s'accordent complètement avec les résultats de l'expérience.

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 350.

Digitized by Google

Moyennant cette supposition, il nous est aisé de décrire le chemin parcouru par le point figuratif durant une expérience de M. Gernez. Le point figuratif commence par suivre la ligne ascendante M_0M (fig. 22) du soufre liquide

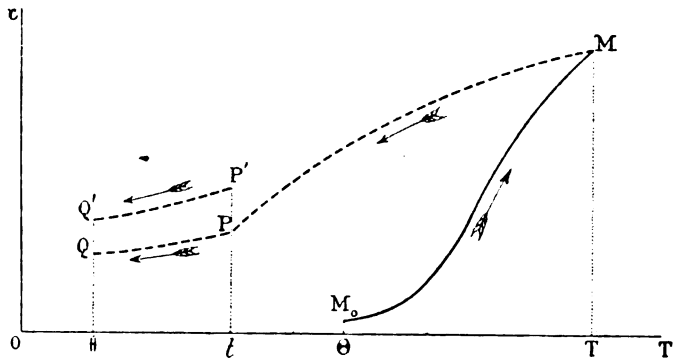


Fig. 22.

normal, jusqu'au point M dont l'abscisse est T; il prend ensuite une ligne descendante MP relative au soufre liquide et la suit jusqu'à la température t où l'on provoque la congélation; il est alors en P; après la congélation, il parcourt la ligne descendante PQ relative au soufre prismatique. Cette dernière ligne coupe en Q la parallèle à Ox dont l'abscisse est θ; θQ est la concentration du soufre prismatique dont on provoque la transformation en octaèdres. *A une température donnée θ, la durée de transformation sera d'autant plus grande que θQ sera plus grand.*

§ III. — *Influence du chemin parcouru par le point figuratif du soufre liquide.*

Si la ligne descendante du soufre prismatique, au lieu de partir du point P, partait du point P', de même abscisse t, mais d'ordonnée plus grande, elle rencontrerait la ligne $T = \theta$ en un point Q' plus élevé que le point Q. La durée de transformation du soufre serait plus grande dans le second cas que dans le premier. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les deux températures t *et* θ *demeurant fixes, la durée de transformation du soufre prismatique à la température* θ *sera d'autant plus grande que la concentration du soufre liquide qui a fourni les prismes à la température* t *était plus grande.*

Digitized by Google

Or, ce qui a été dit au chapitre précédent nous permet de savoir comment la concentration du soufre liquide, ramené à la température t, varie avec les diverses modifications que l'on a fait subir au soufre liquide. Nous pouvons donc prévoir le sens dans lequel ces modifications influeront sur la durée de la transformation du soufre prismatique à la température θ.

C'est ainsi que nous pourrons énoncer les deux propositions suivantes :

1° *Toutes choses égales d'ailleurs, la durée de transformation du soufre prismatique à la température θ est d'autant plus grande que le soufre liquide a été porté à une température plus élevée.*

Cette proposition est vérifiée par les observations de M. Gernez (*).

2° *Toutes choses égales d'ailleurs, la durée de transformation du soufre prismatique à la température θ croît avec la durée τ du séjour du soufre liquide dans un bain de fusion, dont la température* T *est sensiblement invariable.*

Cette proposition est également confirmée par les expériences de M. Gernez (**).

§ IV. — *Influence de la température* t *à laquelle les prismes ont été formés.*

Prenons du soufre normal; chauffons-le à la température T; le point figuratif décrit la ligne ascendante M_0M (fig. 23). Abaissons ensuite la

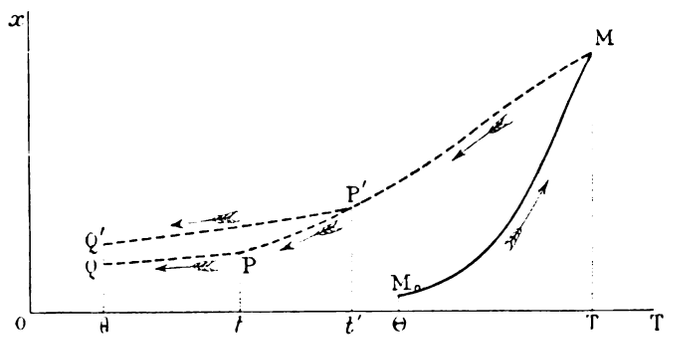


Fig. 23.

température du soufre liquide jusqu'à t; le point figuratif décrit la ligne

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 356.
(**) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 368.

Digitized by Google

descendante MP relative au soufre liquide. A la température t, provoquons la congélation du liquide sous forme de soufre prismatique et refroidissons celui-ci jusqu'à la température θ; le point figuratif décrit la ligne descendante PQ relative au soufre prismatique. Cette ligne coupe en Q la parallèle $T = \theta$ à Ox. θQ est la concentration du soufre prismatique amené à la température θ.

Répétons la même expérience, mais en provoquant la congélation du liquide à une température t', supérieure à t. Le point figuratif suivra la ligne descendante MP relative au liquide seulement jusqu'au point P'; en ce point, il prendra une ligne descendante P'Q', relative au solide. Cette ligne différera de PQ; elle rencontrera la ligne $T = \theta$ en un point Q', différent de Q. $\theta Q'$ sera, dans cette seconde expérience, la concentration du soufre solide ramené à la température θ.

La concentration $\theta Q'$ sera-t-elle inférieure ou supérieure à θQ?

Pour répondre à cette question, nous distinguerons deux cas principaux, séparés par un cas intermédiaire, un peu plus complexe, dont nous négligerons la discussion, d'ailleurs aisée.

PREMIER CAS PRINCIPAL. — *Dans la région où se trouvent les points* P, P', *les lignes descendantes* PQ, P'Q', *relatives au soufre solide, en traversant de droite à gauche la ligne descendante* MP'P *relative au liquide, passent de la région du plan située au-dessous de cette ligne à la région du plan située au-dessus.*

Ce cas est celui auquel correspond la figure 23.

Dans ce cas, on a évidemment

$$\theta Q' > \theta Q,$$

ce qui entraîne la proposition suivante :

Toutes choses égales d'ailleurs, la durée de transformation des prismes, à une température donnée θ, est d'autant plus grande que les prismes ont pris naissance à une température t *plus élevée.*

SECOND CAS PRINCIPAL. — *Dans la région où se trouvent les points* P, P', *les lignes descendantes* PQ, P'Q', *relatives au soufre solide, en traversant de*

Digitized by Google

droite à gauche la ligne descendante MP'P *relative au liquide, passent de la région du plan située au-dessus de cette ligne à la région du plan située au-dessous.*

Ce cas est celui auquel correspond la figure 24.

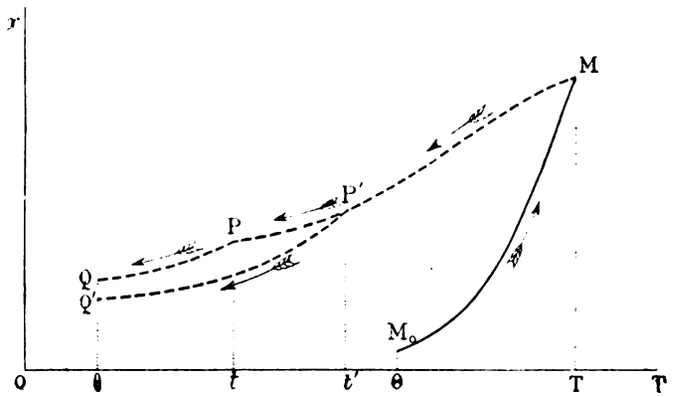


FIG. 24.

Dans ce cas, on a évidemment

$$\theta Q' < \theta Q,$$

ce qui entraine la proposition suivante :

Toutes choses égales d'ailleurs, la durée de transformation des prismes à une température donnée θ *est d'autant plus courte que les prismes ont pris naissance à une température* t *plus élevée.*

Les expériences de M. Gernez mettent en évidence ce fait capital : *C'est le premier cas qui est réalisé lorsque la température* T *à laquelle a été porté le soufre liquide est peu élevée au-dessus du point de fusion; c'est, au contraire, le second cas qui est réalisé lorsque la température* T *est fort élevée au-dessus du point de fusion.*

Voici les expériences qui établissent cette curieuse proposition :

PREMIER CAS. — Les tubes ont été chauffés (*) cinq minutes à la température T = 129°,5, portés dans les bains de surfusion à des températures *t*

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 353.

Digitized by Google

différentes, où ils sont restés cinq minutes, après lesquelles on a solidifié le soufre en prismes; pour tous les tubes de la même série, la transformation en octaèdres était étudiée à la même température.

Première série.

Températures t des bains de surfusion.	Durée de transformation pour 1 centimètre.	Température θ de la transformation.
78°,9	15m 16s	44°,8
87,8	20 22	»
100,1	50 59	»
114,0	81 48	»

Deuxième série.

79°,3	9m 50s	49°,6
88,4	18 45	»
100,0	50 0	»
112,2	50 0	»

Troisième série.

75°,8	5m 5s	52°,6
89,4	12 0	»
99,8	27 16	»
111,5	54 16	»

Second cas. — Le soufre (*) est resté cinq minutes dans le bain de fusion, dix minutes dans le bain de surfusion où l'on a provoqué la formation des prismes, qui ont été transportés dans un milieu à température constante $\theta = 13°$ et touchés par un octaèdre. La transformation a donné les durées suivantes :

Températures T du bain de fusion	Températures t du bain de surfusion.	Durée de la transformation pour 1 centimètre.
152°,5	88°,9	19h 23m
»	100,1	16 9
259,0	88,9	84 0
»	100,1	64 0

Ainsi, lorsque la concentration relative aux points P, P′ est peu considérable, les courbes descendantes du soufre prismatique ont, par rapport aux

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 354.

Digitized by Google

courbes descendantes du liquide, la disposition indiquée par la figure 23. Lorsque, au contraire, la concentration relative aux points P, P′ est notable, les courbes descendantes du soufre prismatique ont, par rapport aux courbes descendantes du liquide, la disposition indiquée par la figure 24.

En résumé, les lignes descendantes du soufre prismatique sont disposées, par rapport aux lignes descendantes du liquide, comme l'indique la figure 25.

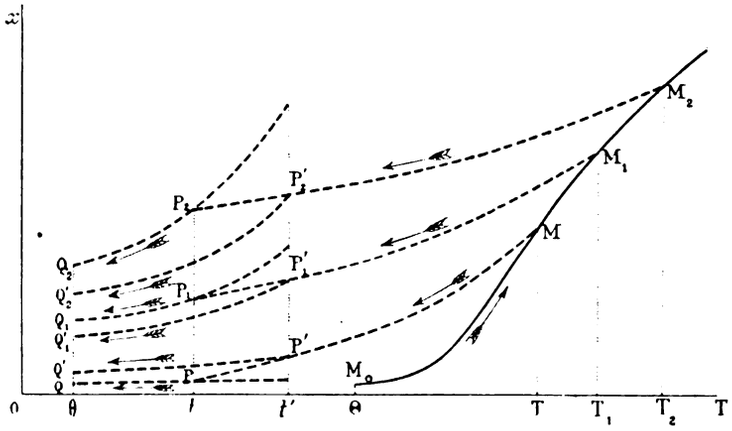


FIG. 25.

§ V. — *Influence de la durée du séjour des prismes dans le bain où ils ont pris naissance.*

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les prismes, aussitôt formés à la température t, étaient refroidis à la température θ où la transformation est étudiée. Dans ce cas, la ligne descendante relative au soufre prismatique,

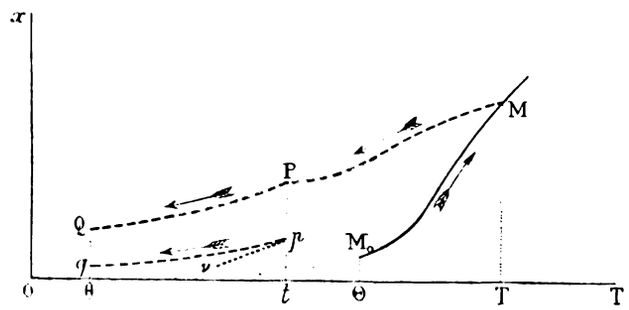


FIG. 26.

suivie par le point figuratif, est la ligne PQ (fig. 26). La durée de transformation observée est la durée relative à la concentration θQ.

Digitized by Google

Supposons maintenant qu'après avoir formé les prismes à la température t, on les laisse séjourner un temps τ' dans le bain dont la température est t, avant de les refroidir à la température θ où ils seront transformés en octaèdres.

Sous l'influence des petites oscillations inévitables que subit la température du bain de surfusion, le point figuratif, qui était d'abord en P, se déplacera de manière à se rapprocher du point p où la ligne $T = t$ rencontre *la ligne* νp *des états naturels du soufre prismatique.* La ligne descendante PQ varie, de manière à tendre vers la ligne descendante pq issue du point q; la concentration θQ du soufre prismatique, ramené à la température θ, varie de manière à tendre vers la concentration limite θq. De là, la proposition suivante :

Si, laissant constantes toutes les autres circonstances, on fait croître indéfiniment la durée τ *du séjour des prismes dans le bain à température* t *où ils ont pris naissance, la durée de transformation à la température* θ *varie et tend vers une limite qui dépend des températures* t *et* θ*, mais ne dépend pas de la température* T *à laquelle on a porté le soufre liquide.*

Cette proposition est confirmée par les expériences (*) rapportées dans le tableau suivant; ces expériences ont été faites avec des tubes chauffés cinq minutes à 129°,5, immergés dans le bain de surfusion et solidifiés en prismes; puis, l'un d'eux restant dans ce bain, l'autre était amené dans un autre milieu à température constante où l'on provoquait la transformation en éléments octaédriques; l'autre tube était ultérieurement traité de même et dans les mêmes conditions.

Durées τ' du séjour dans le bain de surfusion.	Température t du bain de surfusion.	Température θ de la transformation.	Durée de la transformation pour 1 centimètre.
0h 5m	89°2	34,8	23m 5s
0 35	»	»	7 8
0 5	81,0	43,1	17 51
1 5	»	»	5 33
0 5	89,7	67,8	25 0
4 5	»	»	7 24
0 5	99,8	43,1	44 7
4 5	»	»	17 20
5 55	»	»	17 2

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 355.

Digitized by Google

Ces nombres ne vérifient pas seulement la proposition précédente; ils nous fournissent un renseignement précieux : le point q est situé au-dessous du point Q, et par conséquent le point p au-dessous du point P, et cela même lorsque la température T (égale ici à 129°,5) est peu élevée au-dessus du point de fusion du soufre. Donc, *même lorsque la température* T *est peu élevée au-dessus du point de fusion du soufre, la ligne* MP *rencontre la droite* T = t *au-dessus de la ligne des états naturels du soufre prismatique.*

§ VI. — *Influence de la durée du séjour des prismes dans le bain où s'effectue la transformation.*

Le point P (fig. 27) est au-dessus du point p où la ligne des états naturels νp du soufre prismatique rencontre la ligne T = t, et cela, même si l'abscisse T du point M est peu supérieure au point de fusion du soufre. Le

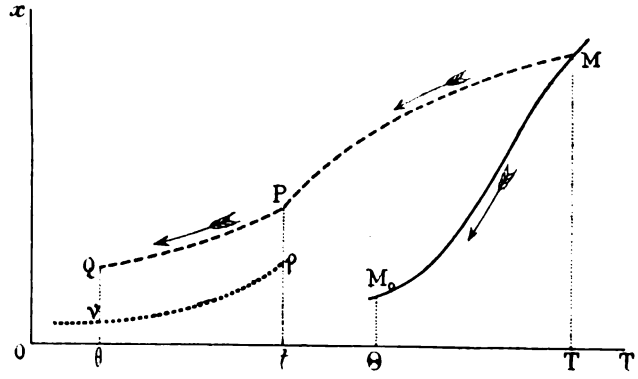


Fig. 27.

soufre prismatique appartenant à la *première catégorie* de corps susceptibles d'éprouver des modifications permanentes, on peut affirmer *a fortiori* que le point Q est au-dessus du point ν où la ligne T = θ rencontre la ligne des états naturels.

Cela posé, imaginons qu'avant de provoquer la transformation des prismes, nous les maintenions un certain temps τ'' dans un bain de température sensiblement constante et égale à θ. Le point Q se déplacera, sous l'influence des légères oscillations de la température et tendra vers le point ν; la

Digitized by Google

concentration du soufre prismatique qui était au début égale à θQ, diminuera et tendra vers θ_V, en sorte que l'on pourra énoncer la proposition suivante :

La durée de la transformation est une fonction décroissante du temps τ'' pendant lequel les prismes ont été maintenus à la température de transformation avant que l'on provoque le changement d'état; lorsque le temps τ'' croit au delà de toute limite, la durée de transformation tend vers une valeur limite qui dépend de la température θ, mais ne dépend pas des modifications antérieures subies par le soufre.

Pour vérifier cette proposition, il suffira de suivre longtemps la marche de la transformation en un tube maintenu à la température θ et portant des divisions de centimètre en centimètre; la surface de séparation du soufre transformé et du soufre prismatique franchira de plus en plus rapidement les divisions successives. Le tableau suivant résume des expériences (*) faites sur des tubes chauffés cinq minutes à 190°, 210° et 265°, immergés ensemble dans un bain à 88°,9, où ils ont séjourné dix minutes, après lesquelles on les a solidifiés en prismes, puis transformés en octaèdres dans un bain à 48°.

MOYENNE des durées de transformation pour un centimètre.	TUBE CHAUFFÉ à 190°.	à 210°.	à 265°.
Pendant les trois premières heures	78m 56'	88m 34'	150m 0'
» la quatrième heure	65 33	69 34	100 0
» la cinquième heure	52 10	50 0	88 53
» la sixième heure	31 34	38 0	66 40
» la septième heure	»	»	38 20

Ces expériences confirment nettement la proposition précédente.

§ VII. — *Propriétés du soufre prismatique qui a séjourné longtemps à la température ordinaire.*

Prenons pour point de départ notre soufre normal. Fondu à la température Θ, il suit la ligne ascendante normale M_0M (fig. 28), tandis que sa température s'élève de Θ à T. Refroidi ensuite à la température t, il décrit

(*) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 357.

Digitized by Google

une ligne descendante bien déterminée MP; tP est la concentration qu'il offre à la température t; c'est de cette concentration que dépend sa durée de solidification à la température t, sous forme de prismes par exemple. Si, une fois solidifié en prismes, on le refroidit jusqu'à la température θ, il y arrivera avec une nouvelle concentration bien déterminée θQ, de laquelle dépend sa durée de transformation en octaèdres à la température θ.

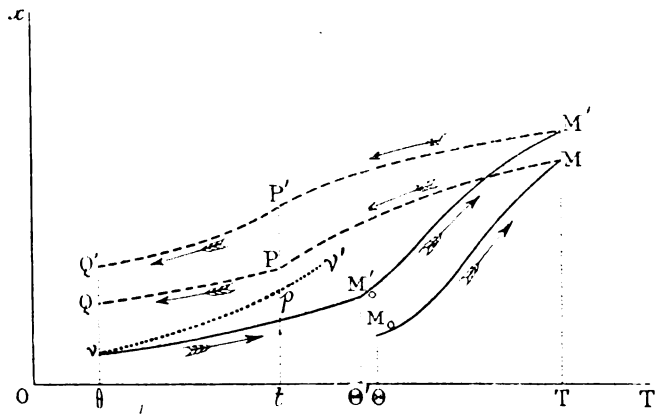


FIG. 28.

Laissons le séjourner très longtemps, sous forme de prismes, à une température sensiblement égale à θ qui peut être, par exemple, la température ordinaire; les petites variations de la température feront tendre l'état de ce soufre prismatique vers l'état naturel relatif à la température θ; le point figuratif, parti de la position Q, tend vers la position ν.

Cet état étant atteint, faisons décrire à notre soufre un chemin semblable à celui que nous avons fait décrire au soufre normal. Chauffons ce soufre prismatique jusqu'au point de fusion Θ', inférieur à Θ d'une petite quantité; le point figuratif suivra une ligne ascendante *bien déterminée*, $\nu M'_0$, située en entier au-dessous de la ligne $\nu\nu'$ des états naturels du soufre prismatique. En M'_0, le soufre fondra; une fois liquide, on élèvera sa température jusqu'à la valeur T; le point figuratif suivra une nouvelle ligne ascendante, M'_0M', bien déterminée, mais différente de M_0M. Si l'on refroidit ensuite le soufre jusqu'à la température t, le point figuratif suivra une ligne descendante bien déterminée, $M'P'$; à la température t, le liquide aura une concentration bien déterminée, tP', différente de tP, qui déterminera, à la température t,

Digitized by Google

sa durée de solidification à l'état de prismes, d'octaèdres ou de baguettes nacrées. Si, à cette température t, on le solidifie en prismes, pour le refroidir ensuite jusqu'à la température θ, le point figuratif suivra une ligne descendante bien déterminée, $P'Q'$; à la température θ, le soufre prismatique aura une concentration bien déterminée, $\theta Q'$, différente de θQ, qui déterminera sa vitesse de transformation en octaèdres.

Donc, *du soufre prismatique qui a été maintenu très longtemps à une basse température* θ, *la température ordinaire, par exemple, constitue un nouveau* SOUFRE NORMAL. *Chauffé dans un bain de fusion à une température donnée* T, *puis ramené dans un bain de surfusion à la température* t, *il présente des durées de solidification à l'état de prismes, d'octaèdres ou de baguettes nacrées, qui dépendent uniquement des deux variables* T *et* t. *Solidifié, à la température* t, *sous forme de prismes, et ramené à la température* θ, *il présente une durée de transformation en octaèdres qui ne dépend que des températures* T, t, θ. *Ces diverses durées ne dépendent pas des modifications que le soufre prismatique avait subies avant de séjourner longtemps à la température* θ. ELLES SONT DIFFÉRENTES DE CELLES QUE L'ON OBTIENT, POUR LES MÊMES VALEURS DES TEMPÉRATURES T, t, θ, LORSQU'ON PREND POUR POINT DE DÉPART LE SOUFRE OCTAÉDRIQUE NORMAL.

De nombreuses expériences de M. Gernez vérifient cette proposition; elles établissent, en outre, cette proposition complémentaire :

La ligne ascendante $M_0'M'$ *est un peu au-dessus de la ligne ascendante* M_0M.

De cette proposition se concluent celles-ci :

Les deux concentrations tP', $\theta Q'$, *sont respectivement supérieures d'une petite quantité aux deux concentrations* tP, θQ.

Passons brièvement en revue les diverses vérifications de ces propositions :

1° Fondu à la température T, puis ramené dans un bain de surfusion à la température t, le soufre prismatique qui a séjourné longtemps à la température ordinaire se congélera en prismes avec une durée de solidification indépendante des transformations qui ont précédé ce long repos; si la température T n'est pas très supérieure au point de fusion, cette durée sera un peu supérieure à celle que donnerait le soufre normal octaédrique dans les mêmes circonstances.

Digitized by Google

Cet énoncé résume de nombreuses expériences de M. Gernez (*).

2° Même énoncé pour la durée de la solidification sous forme octaédrique.

3° Même énoncé pour la durée de la solidification sous forme nacrée.

4° Si l'on fait cristalliser le soufre en prismes à la température t et qu'on le transforme en octaèdres à la température θ, on trouve une durée de transformation qui dépend des variables T, t, θ, mais qui ne dépend pas des modifications subies par le soufre prismatique avant son long repos à la température ordinaire. Cette durée est, toutes choses égales d'ailleurs, plus longue que lorsqu'on est parti du soufre normal octaédrique.

Les expériences de M. Gernez (**) fournissent des vérifications très nettes de cette proposition.

Voici des observations faites sur du soufre pour lequel on a

$$T = 130°, \qquad t = 90°,1, \qquad \theta = 42°,2.$$

	Durée de la transformation pour un centimètre.
On a pris initialement du soufre normal octaédrique. . . .	13m 30s
» » » »	13 0
On a fait subir au soufre des modifications variées, puis, sous forme prismatique, on l'a laissé 45 jours à 12°	73 8
Après d'autres modifications, on l'a laissé, sous forme prismatique, 81 jours à 12°	75 0

§ VIII. — *Influence des cristallisations successives, à l'état de soufre prismatique, sur la durée de solidification du soufre surfondu.*

Du soufre normal, fondu à la température Θ, est amené à la température T, puis refroidi à la température t. Le point figuratif décrit le chemin M_0MP (fig. 29). Le soufre liquide a, à la température t, une concentration tP dont dépend sa durée de solidification Δ, si on le touche avec un prisme.

(*) D. Gernez, *Recherches sur la durée de la solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété du soufre.* (Journal de physique, 2e série, t. III, pp. 65, 66, 67 et 81, 1884.)

(**) D. Gernez, *Sur le phénomène de la surfusion cristalline du soufre et sur la vitesse de transformation du soufre prismatique en octaédrique.* (Journal de physique, 2e série, t. IV, p. 359, 1885.)

Digitized by Google

Ce soufre étant cristallisé en prismes, chauffons-le à la température Θ', peu différente de Θ, où il fondra ; liquide, portons-le à la température T, et ramenons-le à la température t. Le point figuratif suivra le chemin $PM'_0M'P'$. Le soufre, ramené à la température t, aura une concentration tP', dont dépendra sa durée de solidification Δ', si on le touche avec un prisme.

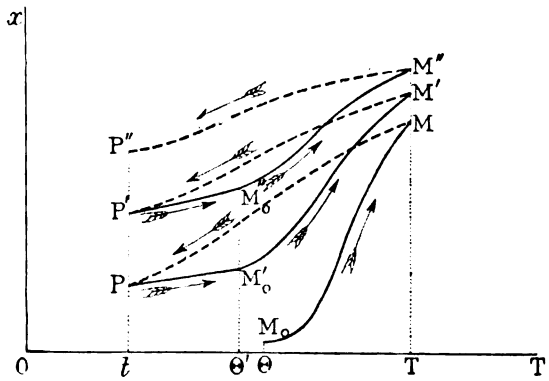


Fig. 29.

Si on recommence la même opération, le point figuratif suivra le chemin $P'M''_0M''P''$; le soufre liquide, ramené à la température t, aura une nouvelle concentration tP'' ; la durée de solidification de ce liquide, touché par un prisme, aura une valeur Δ''.

On voit ainsi qu'*une série de fusions et de cristallisations, produites dans des conditions de température identiques, fait croître la concentration du soufre surfondu et, par conséquent, la durée de solidification, tant que la concentration demeure inférieure à une certaine limite.*

« Soit, par exemple, du soufre nouveau maintenu, dans une première expérience, à 129°,5 pendant cinq minutes, puis laissé quinze minutes dans un bain à température constante de 100°,3 ; dans ces conditions, la durée de solidification, pour une longueur de 1 centimètre, est 0ˢ,46. Supposons qu'avec le même tube, dont tout le soufre a été transformé en prismes, on recommence l'expérience, dans les mêmes conditions,

(*) D. Gernez, *Recherches sur la durée de la solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété du soufre.* (Journal de physique, 4ᵉ série, t. III, p. 64, 1884.)

Digitized by Google

2, 3, 4, ... n fois; on trouve les valeurs suivantes pour la durée de solidification :

Première opération	0,46
Deuxième »	0,62
Troisième »	1,56
Quatrième »	1,84
Cinquième »	2,66
Sixième »	4,43
Septième »	5,88

» Dans une autre série d'expériences, qui ne différaient des précédentes qu'en ce que la température du bain de surfusion était de 99°,8 au lieu de 100°,3, les valeurs observées ont été :

Première opération	0,47
Deuxième »	0,73
Troisième »	0,85
Quatrième »	1,26
Cinquième »	2,47
Dixième »	8,50

» Ainsi, dans la première série d'expériences, après six opérations successives, la durée est devenue 12,78 fois plus longue, et dans la seconde série, après neuf opérations successives, elle est devenue environ 18 fois plus longue. »

CHAPITRE IV.

MODIFICATIONS PERMANENTES DU SOUFRE OCTAÉDRIQUE.

§ I. — *Point de transformation et durée de transformation du soufre octaédrique.*

Le soufre octaédrique peut se transformer en soufre prismatique au contact d'une parcelle de soufre prismatique (*); il suffit, pour cela, que la température soit supérieure à une certaine limite Z (x), variable avec la

(*) D. Gernez, *Sur le phénomène de la surchauffe cristalline du soufre et la vitesse de transformation du soufre octaédrique en prismatique.* (Journal de physique, 2e série, t. III, p. 287, 1884.)

Digitized by Google

concentration x, mais toujours supérieure à 97°,2. Ce point de transformation s'élève lorsque la concentration x augmente.

A une température donnée η (*), supérieure à $Z(x)$, la transformation du soufre octaédrique en soufre prismatique se produit avec une vitesse finie. La surface de séparation du soufre transformé et du soufre qui est encore octaédrique, met un certain temps pour franchir, dans un tube étroit, une longueur de 1 centimètre; pour une valeur donnée de la concentration x, cette durée de transformation est d'autant plus longue que la différence $[\eta - Z(x)]$ est plus petite; pour une valeur donnée de la température η, cette durée est d'autant plus longue que x est plus grand.

§ II. — *Influence de la température à laquelle a été porté le soufre liquide.*

On fond du soufre normal; on le porte à la température T; on le refroidit ensuite jusqu'à la température t où on le transforme en soufre octaédrique; ces octaèdres sont ensuite transformés en prismes à la température ζ. Par des considérations semblables à celles que nous avons développées au § III du Chapitre précédent, nous montrerons que la concentration du soufre octaédrique amené à la température ζ est, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grande que le soufre liquide a été porté à une température T plus élevée. Donc, *toutes choses égales d'ailleurs, la durée de transformation du soufre octaédrique sera d'autant plus longue que le soufre liquide aura été porté à une température plus élevée.*

« On a pris deux tubes (**) contenant du soufre qui n'avait pas encore été fondu, et l'on a chauffé pendant cinq minutes, l'un à 129°,5, l'autre à 187°,5; on les a immergés ensuite dans le même bain de surfusion à 87°,2 et l'on a semé des octaèdres dans les deux tubes. Quand tout le soufre a été octaédrique, on a mesuré la durée de dévitrification pour 1 centimètre et l'on a trouvé, à 100°, les nombres $23^m\ 52^s$ pour les cristaux du tube chauffé

(*) D. Gernez, *Sur le phénomène de la surchauffe cristalline du soufre et la vitesse de transformation du soufre octaédrique en prismatique.* (Journal de Physique, 2e série, t. III, p. 288, 1884.)

(**) D. Gernez, *loc. cit.*, p. 290.

Digitized by Google

antérieurement à 129°,5 et 29^{m} 36^{s} pour ceux du tube qui avait été chauffé à 187°,5. En variant les conditions de l'expérience, on trouve que l'influence de la température à laquelle le soufre a été porté primitivement est d'autant plus prononcée que les octaèdres ont été chauffés à température plus élevée. »

§ III. — *Influence de la température à laquelle les octaèdres ont été produits.*

Une expérience de M. Gernez est la suivante (*) :

1° On prend du soufre normal, on le chauffe à la température T = 129°,5; à une température t = 108°, on transforme le soufre liquide en octaèdres; on amène ces octaèdres à une température ζ = 100°,4; le point figuratif suit le chemin M_0MPR (fig. 30). La concentration du soufre octaédrique à la température ζ a pour valeur ζR.

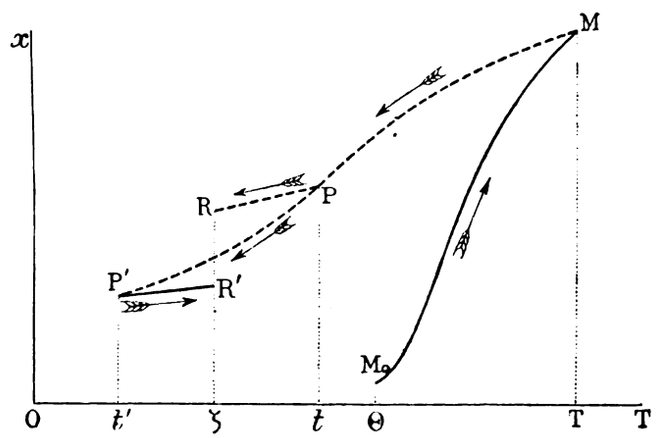


FIG. 30.

2° On prend du soufre normal, on le chauffe à la même température T = 129°,5. On le refroidit jusqu'à la température t' = 89°,8. On amène ensuite les octaèdres à la même température ζ = 100°,4. Le point figuratif suit le chemin $M_0MPP'R'$. La concentration du soufre octaédrique à la température ζ a pour valeur $\zeta R'$.

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 290.

Digitized by Google

La concentration $\zeta R'$ est distincte de la concentration ζR. Si, *ce qui semble probable,* les lignes ascendantes et descendantes du soufre octaédrique sont peu inclinées, la concentration ζR sera notablement supérieure à la concentration $\zeta R'$. La durée de transformation du soufre à la température ζ sera plus grande dans le premier cas que dans le second.

Effectivement, M. Gernez a trouvé que la durée de transformation, pour 1 centimètre était $35^m\,11^s$ dans le premier cas et $10^m\,25^s$ dans le second cas.

§ IV. — *Ligne des états naturels du soufre octaédrique.*

Le soufre octaédrique natif est du soufre demeuré très longtemps à la température ordinaire et, par conséquent, parvenu à l'état naturel. Ce soufre a exactement les mêmes propriétés (*) que le soufre octaédrique obtenu par évaporation d'une solution sulfocarbonée; or, pour ce dernier, on a nécessairement $x = 0$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante : ***La ligne des états naturels du soufre octaédrique est extrêmement voisine de la ligne*** **OT.**

§ V. — *Propriétés des fusions et des solidifications successives.*

Soit $\Theta\Theta'$ (fig. 31) la ligne

$$T = \Theta(x)$$

des points de fusion du soufre octaédrique.

Nous fondons un soufre octaédrique ayant une concentration quelconque. Le point figuratif part du point M_0 situé sur la ligne $\Theta\Theta'$. Nous chauffons le soufre liquide à la température T; le point figuratif décrit le chemin M_0M. Nous refroidissons le liquide à la température t; le point figuratif décrit le chemin MP. A la température t, nous le solidifions en octaèdres, que nous réchauffons jusqu'au point de fusion; le point figuratif décrit le chemin PM'_0.

(*) D. Gernez, *Recherches sur la durée de la solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété du soufre.* (Journal de physique, 2e série, t. III, p. 81, 1884.)

Digitized by Google

Si, parvenus à ce point, nous échauffons de nouveau le soufre liquide jusqu'à la température T, pour le refroidir à la température t, le point figuratif décrira le chemin $M'_0M'P'$. Le soufre liquide, ramené à la température t, y reviendra avec la concentration tP', généralement différente de tP.

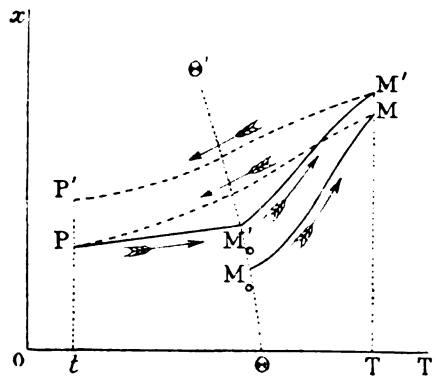


Fig. 31.

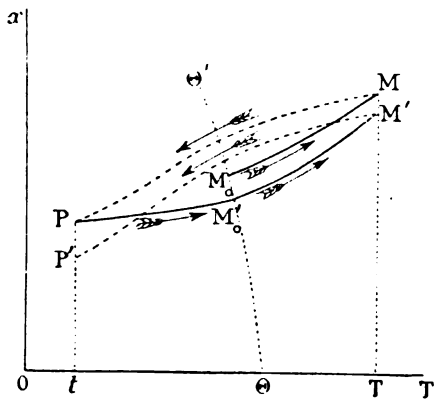


Fig. 32.

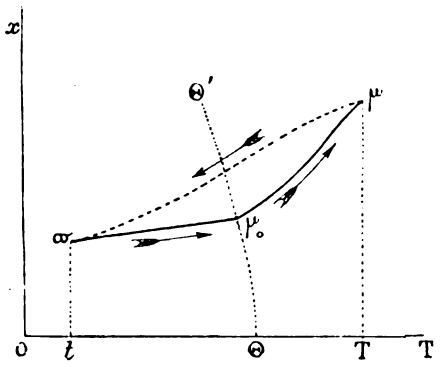


Fig. 33.

Trois cas sont à distinguer :

Premier cas. — *Le point* M'_0 *est au-dessus du point* M_0. C'est le cas auquel correspond la figure 31. Dans ce cas, le point P′ sera au-dessus du point P. En surfusion à la température t, le soufre qui a subi deux fusions aura une concentration plus grande que celui qui a subi une seule fusion.

Deuxième cas. — *Le point* M'_0 *est au-dessous du point* M_0. C'est le cas auquel correspond la figure 32. Dans ce cas, le point P′ sera au-dessous du point P. En surfusion à la température t, le soufre qui a subi deux fusions aura une concentration moindre que celui qui a subi une seule fusion.

Troisième cas. — *Le point* M'_0 *coïncide avec le point* M_0. Dans ce cas, le point P′ coïncide aussi avec le point P ; *le trajet du point figuratif est un cycle fermé* $\mu_0\mu\varpi\mu_0$ (fig. 33) qui peut-être décrit un nombre illimité de fois.

Digitized by Google

Lorsque nous avions affaire au soufre solide prismatique, le premier cas seul était réalisé, comme nous l'avons vu précédemment (Chapitre III, § VII). Au contraire, dans le cas du soufre octaédrique, les trois cas peuvent être réalisés. On peut en effet, pour ce corps, énoncer la proposition suivante :

Il existe, sur la ligne $\Theta\Theta'$, *un point* μ_0, *dépendant des températures* T *et* t, *pour lequel le soufre se trouve dans le troisième cas; si le point* M_0 *est au-dessous du point* μ_0, *le soufre se trouve dans le premier cas; si le point* M_0 *est au-dessus du point* μ_0, *le soufre se trouve dans le second cas.*

Cette proposition entraîne cette autre :

On répète une infinité de fois l'opération suivante : le soufre est fondu, porté à la température T, *refroidi à la température* t, *solidifié en octaèdres, réchauffé jusqu'au point de fusion.*

1° *Si la concentration initiale est faible, la concentration du soufre ramené à la température* t *va en croissant avec le nombre des opérations.*

2° *Si la concentration initiale est forte, la concentration du soufre ramené à la température* t *va en diminuant avec le nombre des opérations.*

3° *Dans les deux cas, lorsque le nombre des opérations augmente, la concentration du soufre ramené à la température* t *tend vers une limite* t_ϖ (*qui dépend des températures* T *et* t). *Une fois cette limite atteinte, la concentration du soufre liquide ramené à la température* t *ne varie plus par les solidifications et fusions successives.*

Le soufre normal, dont la concentration est très faible, est propre à vérifier la première partie de cette proposition. Voici une série d'expériences (*) où l'on avait constamment

$$T = 129°,5, \qquad t = 100°,5.$$

On déterminait les variations de la concentration du soufre liquide à la

(*) D. Gernez, *Recherches sur la durée de la solidification du soufre surfondu et sur une nouvelle variété du soufre.* (Journal de physique, 2e série, t. III, p. 73, 1884.)

Digitized by Google

température t par les variations de la durée de solidification sous forme octaédrique ; on obtenait les résultats suivants :

Première opération	1m 9s
Deuxième »	1 33
Troisième »	2 2
Quatrième »	2 19
Cinquième »	2 15
Sixième »	2 10
Septième »	2 25

Pour vérifier la seconde partie, il s'agit de faire franchir au soufre le point μ_0. Pour cela, le soufre étant amené à la concentration limite à la température t, $t\varpi$, on le cristallise en *prismes*, puis on chauffe les prismes jusqu'au point de fusion. La ligne ascendante tN_0 (fig. 34) du soufre prismatique étant beaucoup plus inclinée que la ligne ascendante $\varpi\mu_0$ du soufre octaédrique, rencontre la ligne $\Theta\Theta'$ en un point situé au-dessus du point μ_0. Une cristallisation sous forme de prismes suffit donc à faire passer le soufre au second cas, comme le montrent les observations (*) suivantes, où l'on a

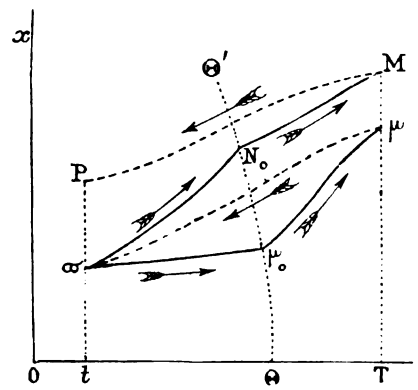


FIG. 34.

$$T = 129°,5, \qquad t = 100°,1.$$

		DURÉE de solidification.
Première opération	(octaèdres)	2m 54s
Deuxième »	(prismes)	»
Troisième »	(octaèdres)	1 24
Quatrième »	»	2 55
Cinquième »	»	2 20

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 74.

Digitized by Google

Enfin, lorsque la concentration à la température t a atteint la valeur t_ϖ, elle ne varie plus avec les opérations successives; c'est ce qui a lieu dans les expériences suivantes (*), où l'on a

$$T = 129°,5, \qquad t = 100°,5.$$

	DURÉE de solidification.
Première opération	2m 31'
Deuxième »	2 30
Troisième »	2 30
Quatrième »	2 24
Cinquième »	2 32
Sixième »	2 29
Septième »	2 32

Voici un nouveau phénomène, un peu plus compliqué que ceux que nous venons d'étudier, mais susceptible cependant d'une explication analogue.

Soient $\Theta\Theta'$ (fig. 35) la ligne des points de fusion du soufre octaédrique et $\Theta'\Theta'_1$ la ligne des points de fusion du soufre prismatique.

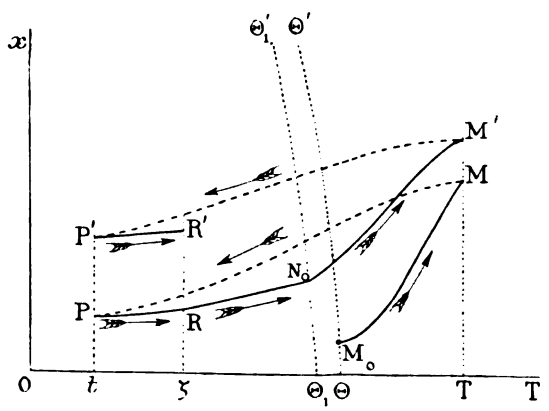


FIG. 35.

On fond du soufre octaédrique et on le chauffe jusqu'à la température T

(*) D. GERNEZ, *loc. cit.*, p. 75.

Digitized by Google

(chemin M_0M). On refroidit le liquide jusqu'à la température t (chemin MP). On fait cristalliser le liquide en octaèdres que l'on réchauffe jusqu'à la température ζ (chemin PR). On les transforme en prismes que l'on chauffe jusqu'au point de fusion (chemin RN_0). On recommence alors les mêmes opérations : le liquide est chauffé à la température T (chemin N_0M'); refroidi à la température t (chemin $M'P'$); cristallisé en octaèdres et réchauffé jusqu'à la température ζ (chemin $P'R'$) où l'on provoque une nouvelle transformation en prismes.

Trois cas sont à distinguer :

PREMIER CAS. — *La ligne ascendante* N_0M' *est au-dessus de la ligne ascendante* M_0M. C'est à ce cas qu'a trait la figure 35. Dans ce cas, le point R' est au-dessus du point R; la seconde transformation des octaèdres en prismes se produit plus lentement que la première.

DEUXIÈME CAS. — *La ligne ascendante* N_0M' *est au-dessous de la ligne ascendante* M_0M. C'est à ce cas que se rapporte la figure 36. Dans ce cas, le point R' est au-dessous du point R; la seconde transformation des octaèdres en prismes est plus rapide que la première.

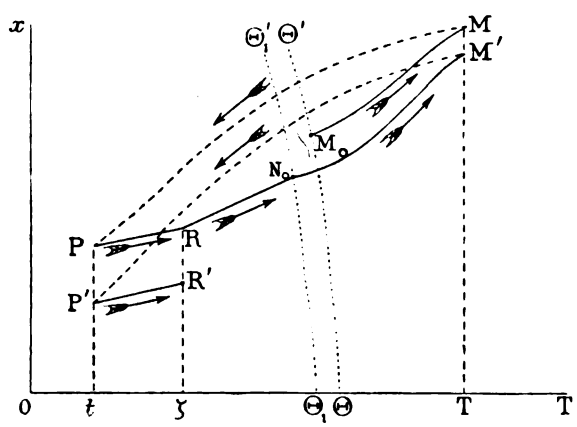


FIG. 36.

TROISIÈME CAS. — *Les deux lignes ascendantes* M_0M, N_0M' *se superposent*

Digitized by Google

en une seule ligne $\nu_0\mu_0\mu$. C'est le cas auquel se rapporte la figure 37. Nous avons alors un cycle $\nu_0\mu_0\mu\varpi\rho\nu_0$ qui peut être décrit indéfiniment; la durée de la transformation des octaèdres en prismes à la température ζ sera indépendante du nombre des opérations effectuées.

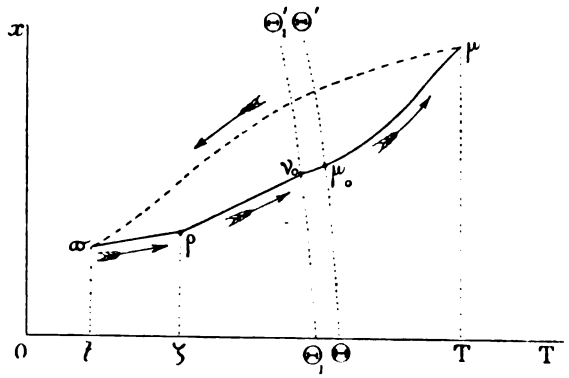


FIG. 37.

D'après les expériences de M. Gernez (*), le premier cas est réalisé lorsque la concentration qui correspond au point M_0 est inférieure à une certaine limite; le second, lorsque cette concentration est supérieure à cette même limite; lors donc que, laissant invariables les trois températures t, T et ζ, on répète indéfiniment la suite d'opérations que nous venons de décrire, on tend vers le troisième cas; la durée de transformation des octaèdres en prismes à la température ζ tend vers une limite qui dépend des températures t, T et ζ, mais qui ne dépend pas de l'état initial du soufre.

Imaginons que nous soyons dans les conditions prévues par le troisième cas; nous décrivons le cycle $\nu_0\mu_0\mu\varpi\rho\nu_0$ et le pouvons décrire indéfiniment; supposons qu'au moment où le soufre liquide arrive à la température t, et le point figuratif au point ϖ, nous congélions le liquide non plus sous forme d'octaèdres, mais sous forme de prismes. En réchauffant ensuite le soufre solide, nous suivrons non plus la ligne ascendante $\varpi\rho$ relative au

(*) D. GERNEZ, *Sur le phénomène de la surchauffe cristalline du soufre et la vitesse de transformation du soufre octaédrique en prismatique.* (JOURNAL DE PHYSIQUE, 2e série, t. III, p. 291, 1884.)

Digitized by Google

soufre octaédrique, mais la ligne ascendante ϖN_0 (fig. 38) relative au soufre prismatique. Comme les lignes ascendantes du soufre prismatique montent plus rapidement que les lignes ascendantes du soufre octaédrique, le point figuratif rencontrera la ligne $\Theta_1\Theta'_1$ en un point N_0 situé au-dessus du point ν_0. Fondons le soufre, chauffons le liquide à la température T, ramenons-le en surfusion à la température t, congelons-le en octaèdres et réchauffons ces

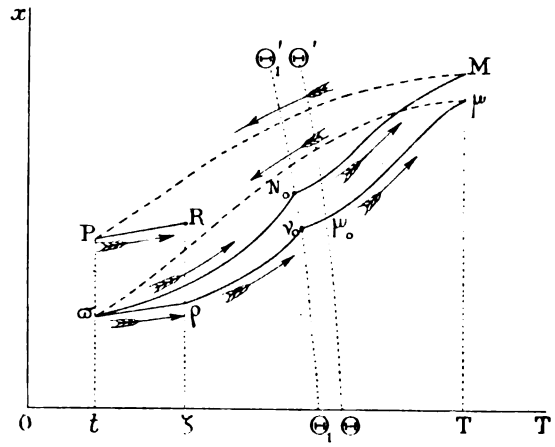


Fig. 38.

derniers à la température ζ. Le point figuratif occupera alors une position R; tR sera supérieure à $\zeta\rho$, en sorte que les octaèdres fournis par le soufre que l'on a congelé une fois à l'état de prismes se transformeront plus lentement en prismes que s'ils provenaient d'une suite d'opérations où la congélation aurait toujours été produite sous la forme octaédrique.

§. VI. — *Des cycles fermés le long desquels le soufre éprouve de brusques changements d'état.*

Les figures 33 et 37 nous représentent des cycles qui ont été réalisés dans les expériences de M. Gernez. On pourrait, par un procédé analogue à celui qui a servi à réaliser ces cycles, produire des cycles encore plus compliqués, par exemple le suivant, que nous représente la figure 39 :

En M_0, le soufre octaédrique se transforme en soufre liquide, qui est

Digitized by Google

porté à la température T (chemin M_0M), puis refroidi à la température t (chemin MP). Le liquide est congélé en octaèdres, que l'on refroidit jusqu'à la température ϑ (chemin PQ) et que l'on réchauffe ensuite jusqu'à la température ζ (chemin QR). Le soufre octaédrique est transformé en soufre prismatique que l'on chauffe jusqu'à la fusion (chemin RN_0). On élève ensuite la température du liquide de manière à ramener le point figuratif en M_0 (chemin N_0M_0).

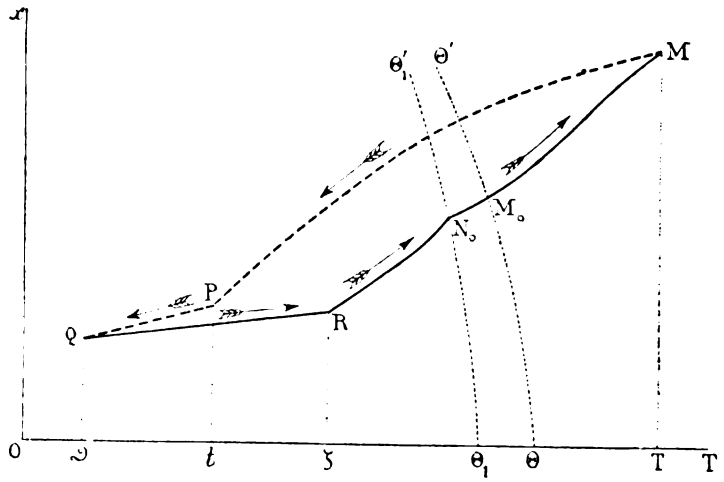


Fig. 39.

La région où se trouvent les points PQR est, comme nous l'avons établi (§ IV), au-dessus de la ligne des états naturels du soufre octaédrique; la ligne ascendante QR est donc, comme nous l'avons figurée, au-dessous de la ligne descendante PQ. Le cycle est formé d'une seule boucle et est sinistrosùm, tout comme les cycles représentés par les figures 33 et 37.

Un tel cycle satisfait-il à l'inégalité de Clausius? L'examen du sens dans lequel il est décrit ne suffit plus à répondre à cette question, car, en des points déterminés du contour qui figure ce cycle se sont produits des changements d'état pendant lesquels x et T demeurent invariables, tandis que des quantités considérables de chaleur sont dégagées ou absorbées; tel est le passage du soufre liquide à l'une des formes solides, ou la modification

Digitized by Google

inverse ; tel est le passage du soufre solide d'une forme cristalline à une autre.

Nous allons montrer comment on peut étudier de tels cycles et examiner s'ils vérifient ou non l'inégalité de Clausius.

Ayant seulement pour objet d'indiquer la méthode propre à cette étude, nous n'examinerons qu'un cycle très simple qui est le suivant :

Du soufre octaédrique est fondu à la température Θ ; la température du soufre liquide s'élève de Θ à T (chemin M_0M, fig. 40) ; on refroidit ensuite le liquide de T à t (chemin MP) ; à la température t, on congèle le liquide en octaèdres, que l'on refroidit jusqu'à la température ϑ (chemin PQ) ; on réchauffe ensuite les octaèdres de ϑ à Θ (chemin QM_0) et on les fond.

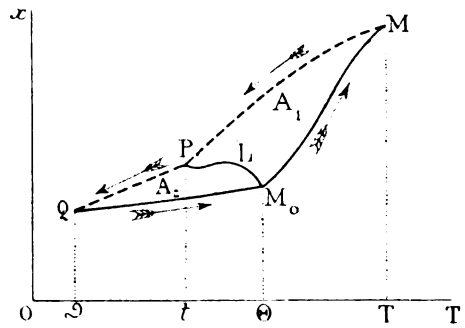


FIG. 40.

L'inégalité de Clausius est-elle vérifiée pour un semblable cycle ?

Soient $\Phi_1(x, T)$ ce que devient la fonction $\Phi(x, T)$ pour le soufre liquide et $\Phi_2(x, T)$ ce que devient la même fonction pour le soufre octaédrique ; soit ξ l'ordonnée du point M_0 ; soit ξ' l'ordonnée du point P. Nous aurons, pour le cycle considéré, l'égalité suivante :

$$E\int\frac{dQ}{T}=\frac{\Phi_1(\xi,\Theta)-\Phi_2(\xi,\Theta)}{\Theta}-\frac{\partial}{\partial\Theta}[\Phi_1(\xi,\Theta)-\Phi_2(\xi,\Theta)]$$

$$-\int_{M_0MP}\frac{d\left[\Phi_1(x,T)-T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]}{T}$$

$$-\frac{\Phi_1(\xi',t)-\Phi_2(\xi',t)}{t}+\frac{\partial}{\partial t}[\Phi_1(\xi',t)-\Phi_2(\xi',t)]$$

$$-\int_{PQM_0}\frac{d\left[\Phi_2(x,T)-T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]}{T}.$$

Digitized by Google

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} E\int \frac{dQ}{T} = &-\int_{M_0MP} \left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \\ &-\int_{PQM_0} \left[\Phi_2(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \end{aligned} \right.$$

Joignons les deux points M_0P par une ligne M_0LP, qui partage l'aire du cycle en deux parties; l'une, A_1, ayant pour contour M_0MPLM_0, l'autre, A_2, ayant pour contour PQM_0LP.

Nous aurons

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{M_0MP} \left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \\ &+\int_{PLM_0} \left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \\ &= -\iint_{A_1} \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]dx\,dT, \end{aligned} \right.$$

et, semblablement,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{PQM_0} \left[\Phi_2(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \\ &+\int_{M_0LP} \left[\Phi_2(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]\frac{dT}{T^2} \\ &= -\iint_{A_2} \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_2(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]dx\,dT. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (2) et (3), l'égalité (1) devient :

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} E\int \frac{dQ}{T} = &\iint_{A_1} \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x,T)\right]dx\,dT \\ &+\iint_{A_2} \frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_2(x,T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x,T)\right]dx\,dT \\ &+\int_{PLM_0} \left[\Phi_1(x,T) - T\frac{\partial\Phi_1(x,T)}{\partial T} - \Phi_2(x,T) + T\frac{\partial\Phi_2(x,T)}{\partial T}\right]\frac{dT}{T^2}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Si, dans notre masse de soufre liquide, la concentration x augmente de dx, il y a une absorption de chaleur $\lambda_1(x, T)dx$ et l'on a

$$(5). \quad E\lambda_1(x, T) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_1(x, T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_1(x, T)\right].$$

Si la même modification a lieu au sein du soufre octaédrique solide, il y a une absorption de chaleur $\lambda_2(x, T)\,dx$ et l'on a

$$(6). \quad E\lambda_2(x, T) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi_2(x, T) - T\frac{\partial}{\partial T}\Phi_2(x, T)\right].$$

Enfin, si notre masse de concentration x fond à la température T, il y a une absorption de chaleur $L(x, T)$ et l'on a

$$(7). \quad EL(x, T) = \Phi_1(x, T) - T\frac{\partial\Phi_1(x, T)}{\partial T} - \Phi_2(x, T) + T\frac{\partial\Phi_2(x, T)}{\partial T}.$$

En vertu des égalités (5), (6) et (7), l'égalité (4) devient :

$$\int\frac{dQ}{T} = \iint_{A_1}\frac{\lambda_1(x, T)}{T^2}dx\,dT + \iint_{A_2}\frac{\lambda_2(x, T)}{T^2}dx\,dT + \int_{PLM_0}\frac{L(x, T)}{T^2}dT.$$

Les trois quantités $\lambda_1(x, T)$, $\lambda_2(x, T)$, $L(x, T)$ sont positives ; d'autre part, Θ étant supérieur à t, on peut choisir la ligne PLM_0 de telle sorte que, du point P au point M_0, dT soit constamment positif le long de cette ligne ; on a donc

$$\int\frac{dQ}{T} > 0.$$

L'inégalité de Clausius régit le cycle considéré ; on montrerait d'une manière analogue qu'elle régit les autres cycles que nous avons signalés ; les modifications du soufre ne nous offrent aucune exception à cette célèbre inégalité

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

CHAPITRE PREMIER. — *Des modifications permanentes dans un système de température variable soumis à une action extérieure invariable* 4

§ I. — Rappel de quelques propriétés des systèmes qui n'offrent pas de modifications permanentes . . . . . *ib.*

§ II. — Modifications permanentes. — Point de départ de la théorie . . . 8

§ III. — Déplacement isothermique de l'équilibre 10

§ IV. — Lignes ascendantes et lignes descendantes 13

§ V. — Déplacement de l'équilibre par les variations de température . . . 15

§ VI. — Cycles fermés. — Ligne des états naturels 17

§ VII. — Distinction de deux catégories de systèmes. — Stabilité ou instabilité des états naturels. 21

§ VIII. — Sens d'un cycle fermé 25

§ IX. — Inégalité de Clausius 33

CHAPITRE II. — *Les modifications permanentes du soufre liquide*. 38

§ I. — Point de congélation du soufre liquide . . . . . *ib.*

§ II. — Durée de solidification du soufre surfondu 40

§ III. — Postulats. — Ordre des recherches expérimentales. 42

§ IV. — Influence de la température T du bain de fusion 43

§ V. — Influence de la durée τ du séjour dans le bain de fusion 48

§ VI. — Influence de la durée τ' du séjour dans le bain de surfusion. . . . 50

Digitized by Google

Pages.

CHAPITRE III. — *Modifications permanentes du soufre prismatique* 54

§ I. — Point de transformation et vitesse de transformation du soufre prismatique . . . . . *ib.*

§ II. — Postulats. — Ordre des recherches expérimentales. 56

§ III. — Influence du chemin parcouru par le point figuratif du soufre liquide. 57

§ IV. — Influence de la température *t* à laquelle les prismes ont été formés. . 58

§ V. — Influence de la durée du séjour des prismes dans le bain où ils ont pris naissance 62

§ VI. — Influence de la durée du séjour des prismes dans le bain où s'effectue la transformation. 64

§ VII. — Propriétés du soufre prismatique qui a séjourné longtemps à la température ordinaire 65

§ VIII. — Influence des cristallisations successives, à l'état de soufre prismatique, sur la durée de solidification du soufre surfondu 68

CHAPITRE IV. — *Modifications permanentes du soufre octaédrique* 70

§ I. — Point de transformation et durée de transformation du soufre octaédrique . . . . . *ib.*

§ II. — Influence de la température à laquelle a été porté le soufre liquide. . 71

§ III. — Influence de la température à laquelle les octaèdres ont été produits. 72

§ IV. — Ligne des états naturels du soufre octaédrique 73

§ V. — Propriétés des fusions et des solidifications successives . . . . . *ib.*

§ VI. — Des cycles fermés le long desquels le soufre éprouve de brusques changements d'état 80

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS

PAR

P. DUHEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

TROISIÈME MÉMOIRE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MODIFICATIONS PERMANENTES

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 3 août 1895.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES DÉFORMATIONS PERMANENTES

ET

L'HYSTERESIS.

TROISIÈME MÉMOIRE.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MODIFICATIONS PERMANENTES.

INTRODUCTION.

Dans un premier mémoire (*), nous avons posé les principes d'une théorie nouvelle susceptible de rendre compte des modifications permanentes; nous avons étudié les systèmes définis par leur température absolue T et une autre variable normale x; désignant par X l'action extérieure qui correspond à la variable x, nous avons développé notre théorie en supposant que la température absolue T fût maintenue constante et que les quantités x et X subissent seules des variations. Les lois des modifications permanentes isothermiques ainsi définies nous ont permis d'élucider les phénomènes d'*hysteresis magnétique*, dont l'étude nous avait suggéré nos hypothèses fondamentales, et aussi les déformations élastiques résiduelles pro-

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* Mémoire présenté à la Classe des sciences de l'Académie de Belgique, le 13 octobre 1894 (MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS ÉTRANGERS ET MÉMOIRES COURONNÉS DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, t. LIV).

Digitized by Google

duites par la traction, la flexion et la torsion. Chemin faisant, nous avons indiqué comment les variations de la température pouvaient, sans changement d'action extérieure, produire des modifications permanentes analogues à celles que produisaient, à température constante, les variations de l'action extérieure; nous avons montré, en particulier, que les phénomènes de trempe se laissaient aisément expliquer par des considérations de ce genre.

C'est à ce second cas particulier, c'est aux modifications permanentes produites par les variations de température dans un système soumis à une action extérieure constante, qu'est consacré notre second mémoire (*). Après y avoir posé les principes théoriques qui régissent de semblables modifications, nous avons appliqué ces principes à la discussion complète d'un cas particulier important; nous avons montré que notre théorie s'accordait, jusque dans les moindres détails, avec les nombreux documents expérimentaux recueillis par M. D. Gernez au cours de ses longues et minutieuses recherches sur les transformations du soufre.

L'examen des deux cas particuliers dont nous venons de parler a montré la portée physique de la nouvelle théorie; le moment nous semble venu de la traiter à un point de vue plus général; d'étudier des systèmes dont l'état est défini non seulement par la température absolue, mais par un nombre quelconque de variables normales; de développer les lois des modifications permanentes engendrées dans de semblables systèmes par les variations simultanées de la température et des actions extérieures; de rattacher par là la théorie des modifications permanentes à l'exposé général des principes de la thermodynamique que nous avons précédemment donné (**).

(*) *Sur les déformations permanentes et l'hysteresis.* Second mémoire : *Les modifications du soufre.* Mémoire présenté à la Classe des sciences de l'Académie de Belgique, le 2 mars 1895 (MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS ÉTRANGERS ET MÉMOIRES COURONNÉS DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE; t. LIV).

(**) *Commentaire aux principes de la thermodynamique,* 1re partie. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, 4e série, t. VIII, p. 269.) — 2e partie. (IBID., t. IX, p. 293.) — 3e partie. (IBID., t. X, p. 207.)

Digitized by Google

§ 1. — *Modifications réalisables, réversibles et irréversibles. — Modifications purement virtuelles.*

Considérons un système dont 0 et 1 sont deux états d'équilibre; il peut arriver qu'une modification réelle, variable d'une manière continue (*), et faisant passer le système de l'état 0 à l'état 1, ait pour limite une suite d'états d'équilibre du système. En général, cette suite d'états d'équilibre ne pourra pas être considérée comme une modification réelle, quoiqu'il en puisse être ainsi dans certains cas particuliers (**). A une telle suite d'états d'équilibre, qui, sans être par elle-même, en général, une modification réelle, constitue la limite d'une modification réelle variable d'une manière continue, nous donnerons le nom de *modification réalisable,* nom que l'on doit bien se garder de prendre au pied de la lettre et que l'on doit regarder comme une simple notation.

Lorsqu'une suite d'états d'équilibre ne constituera pas une modification réalisable, nous dirons qu'elle constitue une *modification purement virtuelle.*

Les modifications réalisables se distinguent en *modifications réversibles* et *modifications non réversibles.*

Une modification réalisable, conduisant le système de l'état 0 à l'état 1, est dite *réversible,* si la même suite d'états d'équilibre, prise en sens inverse, de l'état 1 à l'état 0, est encore réalisable; c'est-à-dire s'il existe une transformation réelle, menant le système de l'état d'équilibre 1 à l'état d'équilibre 0, variable d'une manière continue, et ayant pour limite la nouvelle suite d'états d'équilibre. Cette définition coïncide avec celle que nous avons donnée ailleurs (***).

Lorsque la suite d'états d'équilibre considérée, parcourue de l'état 0 à l'état 1, constitue une modification réalisable, tandis que, parcourue en sens

(*) Pour la définition de ce mot, voyez *Commentaire aux principes de la thermodynamique,* 2e partie, Chap. Ier, n° 8. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, t. IX, p. 305.)

(**) Voyez *loc. cit.*, n° 7. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, t. IX, p. 302.)

(***) Voyez *loc. cit.*, n° 8. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, t. IX, p. 307.)

Digitized by Google

contraire, elle constitue une modification purement virtuelle, on dit qu'elle est *irréversible* ou *non réversible*. Le *sens de parcours* d'une telle modification est le sens qui va de l'état 0 à l'état 1.

Au début de la deuxième partie de notre *Commentaire aux principes de la thermodynamique*, nous avons fait l'HYPOTHÈSE FONDAMENTALE SUIVANTE :

Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible.

Nous avons ajouté :

NOUS N'ÉTUDIERONS QUE LES SYSTÈMES QUI JOUISSENT DE CETTE PROPRIÉTÉ.

Les propositions établies dans les deux dernières parties de notre *Commentaire* ne sont donc applicables qu'à de tels systèmes.

Rappelons quelques-unes de ces propositions :

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, les variables *normales* (*), qui, avec la température absolue T, définissent l'état du système. Soient A, B, ..., N, les actions extérieures qui correspondent aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$. Le *travail externe* relatif à une modification élémentaire, réelle ou virtuelle,

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\nu, \quad \delta T,$$

du système, a pour expression

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\mathfrak{T}_e = A\delta\alpha + B\delta\beta + \cdots + N\delta\nu.$$

Le système admet un *potentiel thermodynamique interne*, fonction uniforme et continue des variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, T :

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T).$$

L'*énergie interne* $U(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T)$ est liée à cette fonction par la relation

$$(2). \quad \ldots \quad EU(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T) = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T) - T\frac{\partial}{\partial T}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T).$$

(*) Pour la définition de ce mot, voyez *Commentaire aux principes de la thermodynamique*, 3e partie, Chap. Ier, n° 3. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, t. X, p. 218.)

Digitized by Google

Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que sa température soit égale à celle des corps extérieurs et que l'on ait :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \\ B = \dfrac{\partial}{\partial \beta}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N = \dfrac{\partial}{\partial \nu}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T). \end{array}\right.$$

Ce sont les équations d'équilibre du système.

§ 2. — *Hypothèse fondamentale sur laquelle repose la théorie des modifications permanentes.*

Après avoir fait, au début de la deuxième partie de notre *Commentaire,* l'hypothèse fondamentale rappelée au numéro précédent, nous ajoutions (*) :

« Il faut bien se garder de croire que ces systèmes-là existent seuls dans la nature; il est aisé de prouver le contraire; les cycles d'*hysteresis magnétique,* par exemple, sont des modifications non réversibles, bien que ce soient des suites continues d'états d'équilibre. »

Ainsi, en admettant l'hypothèse en question, nous avons constitué une thermodynamique trop restreinte, une représentation trop particulière, dont se trouvent exclus, en particulier, tous les systèmes qui peuvent subir des modifications permanentes. Il nous faut constituer maintenant une thermodynamique plus large, plus compréhensive, qui renferme comme cas particulier la thermodynamique classique précédemment exposée, mais qui, en outre, soit apte à représenter les lois des systèmes qui subissent des modifications permanentes.

Dans cette thermodynamique, nous devons conserver tout ce qui, dans

(*) *Commentaire aux principes de la thermodynamique,* 2e partie, Chap. Ier, n° 8. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, t. IX, p. 307.)

Digitized by Google

l'ancienne thermodynamique, a été établi indépendamment de l'hypothèse considérée; telles sont les conséquences du principe de la *conservation de l'énergie* développées dans la première partie de notre *Commentaire;* telle est, également, la définition des variables normales. Nous devons, au contraire, rejeter tout ce dont la démonstration implique l'hypothèse en question; telles sont toutes les conséquences du *principe de Carnot et de Clausius;* si nous reprenons quelqu'une de ces conséquences, nous devrons la reprendre comme une nouvelle hypothèse.

Ces préliminaires posés, voici l'énoncé de l'HYPOTHÈSE FONDAMENTALE, généralement incompatible avec l'hypothèse rappelée au numéro 1, sur laquelle reposera toute notre théorie des modifications permanentes :

HYPOTHÈSE FONDAMENTALE. — *Si les variables normales* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$, *qui, avec la température absolue* T, *définissent l'état du système,* ONT ÉTÉ CONVENABLEMENT CHOISIES, *il existe une fonction uniforme et continue des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$, T.

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu, T),$$

qui jouit des propriétés suivantes :

A. *L'énergie interne* U *du système est liée à la fonction* $\mathcal{F}$ *par l'égalité*

$$(2). \quad \ldots \quad EU = \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}.$$

B. *Pour que le système soit en équilibre, il est nécessaire :*

1° *Que sa température soit égale à celle des corps extérieurs ;*

2° *Que l'on ait :*

$$(4). \quad \ldots \quad \begin{cases} M = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \ldots\ldots \\ N = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}. \end{cases}$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes.

Digitized by Google

C. *Considérons une suite d'états d'équilibre du système et imaginons que l'on parcoure cette suite dans un certain sens.*

Soient

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \ldots,\ \nu,\ \mathrm{T}$$

et

$$\alpha + d\alpha,\ \beta + d\beta,\ \ldots,\ \lambda + d\lambda,\ \mu + d\mu,\ \ldots,\ \nu + d\nu,\ \mathrm{T} + d\mathrm{T},$$

deux états voisins et successifs de cette suite, le second étant rencontré APRÈS *le premier dans le sens considéré.*

Soient

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L},\ \mathrm{M},\ \ldots,\ \mathrm{N},$$

les valeurs des actions extérieures dans le premier état et

$$\mathrm{A} + d\mathrm{A},\ \mathrm{B} + d\mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L} + d\mathrm{L},\ \mathrm{M} + d\mathrm{M},\ \ldots,\ \mathrm{N} + d\mathrm{N},$$

les valeurs des mêmes actions dans le second.

Pour que la suite d'états d'équilibre considérée, parcourue dans le sens considéré, soit une modification réalisable il faut et il suffit :

1° *Que les équations* (3) *soient vérifiées en chaque état de cette suite;*

2° *Que l'on ait, pour tout élément de cette suite :*

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
d\mathrm{A} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \nu}\,d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha\,\partial \mathrm{T}}\,d\mathrm{T} \\
&\quad + g_\alpha(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{N},\ \mathrm{T})\,|d\alpha|, \\
d\mathrm{B} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\,\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\,\partial \nu}\,d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta\,\partial \mathrm{T}}\,d\mathrm{T} \\
&\quad + g_\beta(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{N},\ \mathrm{T})\,|d\beta|, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d\mathrm{L} &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \beta}\,d\beta + \ldots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \nu}\,d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda\,\partial \mathrm{T}}\,d\mathrm{T} \\
&\quad + g_\lambda(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{N},\ \mathrm{T})\,|d\lambda|.
\end{aligned}\right.$$

$g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\lambda$, *étant des fonctions continues et uniformes des variables*

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu,\ \ldots,\ \nu,\ \mathrm{T},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \ldots,\ \mathrm{L},\ \mathrm{M},\ \ldots,\ \mathrm{N}$$

et

$$|d\alpha|,\ |d\beta|,\ \ldots,\ |d\lambda|,$$

désignant les valeurs absolues de $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\lambda$.

Digitized by Google

Les équations (4) différentiées, donneraient des égalités de même forme que les égalités (5), mais où les fonctions $g_\mu, \ldots, g_\nu$, analogues à $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\lambda$, seraient identiquement nulles. Les variables $\mu, \ldots, \nu$, peuvent donc être regardées comme des variables analogues aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, mais pour lesquelles les fonctions $g_\mu, \ldots, g_\nu$, sont constamment égales à 0.

Il est facile de voir que l'hypothèse nouvelle implique, comme cas extrêmement particulier, l'hypothèse trop restreinte rappelée au numéro 1, en sorte que la théorie déduite de l'hypothèse nouvelle contiendra l'ancienne thermodynamique. L'hypothèse nouvelle redonne l'hypothèse ancienne si l'on suppose qu'aucune des variables définissant le système n'appartient au groupe $\alpha, \ldots, \lambda$, mais qu'elles appartiennent toutes au groupe $\mu, \ldots, \nu$. Dans ce cas, en effet, considérons une suite d'états d'équilibre, parcourue dans le sens qu'il nous plaira; d'après (B) les équations (4) seront vérifiées en tout état de cette suite; dès lors, d'après (C), comme il n'existe aucune variable du groupe $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, cette suite sera réalisable; toute suite d'états d'équilibre constitue donc une modification réalisable, et cela, dans quelque sens qu'on la suppose parcourue; elle constitue donc une modification réversible.

Mais si l'hypothèse nouvelle redonne l'hypothèse ancienne dans ce cas particulier, elle est, en général, incompatible avec elle.

Supposons, en effet, qu'il existe, parmi les variables normales qui définissent le système, des variables du groupe $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, pour lesquelles les fonctions $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\lambda$ ne sont pas identiquement nulles; considérons une suite d'états d'équilibre, et supposons que, lorsqu'on passe de l'un de ces états à un état voisin, l'une au moins des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, change de valeur. Supposons que cette suite d'états d'équilibre, *parcourue dans un sens donné,* constitue une modification réalisable; pour chaque élément de cette suite, les égalités (5) sont vérifiées. Cette suite, *parcourue en sens inverse,* constituera-t-elle encore une modification réalisable? Pour qu'il en soit ainsi, il faudrait que les quantités

$$d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda, d\mu, \ldots, d\nu, d\mathrm{T},$$
$$d\mathrm{A}, d\mathrm{B}, \ldots, d\mathrm{L},$$

Digitized by Google

qui vérifient les égalités (5), vérifient aussi les égalités

$$(5^{bis}).\quad \left\{\begin{array}{l} dA = \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha^2}\,d\alpha + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\beta + \cdots + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial\nu}\,d\nu + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\,\partial T}\,dT \\ \quad - g_\alpha(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T)\,|d\alpha|, \\ dB = \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta^2}\,d\beta + \cdots + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial\nu}\,d\nu + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\beta\,\partial T}\,dT \\ \quad - g_\beta(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T)\,|d\beta|, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dL = \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\alpha}\,d\alpha + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\beta}\,d\beta + \cdots + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial\nu}\,d\nu + \dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\,\partial T}\,dT \\ \quad - g_\lambda(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T)\,|d\lambda|. \end{array}\right.$$

Or, pour que les égalités (5^{bis}) soient compatibles avec les égalités (5), il faudrait que l'on ait :

$$(6).\quad \left\{\begin{array}{l} g_\alpha(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T) = 0, \\ g_\beta(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\lambda(\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \nu,\ A,\ B,\ \ldots,\ N,\ T) = 0, \end{array}\right.$$

ce qui n'a pas lieu en général.

Donc, en vertu de notre hypothèse fondamentale, *une modification réalisable n'est pas, en général, une modification réversible.*

Toutefois, *une modification réalisable est assurément réversible dans le cas particulier où elle n'est accompagnée d'aucun changement de valeur des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

§ 3. — *Des variables privilégiées.*

Il est facile de voir que si l'on faisait un changement quelconque de variables normales :

$$\begin{array}{l} \alpha = a(\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \nu'), \\ \beta = b(\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \nu'), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \nu = n(\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \nu'), \end{array}$$

Digitized by Google

les égalités (5) ne se transformeraient pas, en général, en égalités de même forme. Nous nommerons *variables privilégiées,* des variables normales pour lesquelles les égalités (5) sont de la forme indiquée.

Un système de variables privilégiées étant donné, on en peut former une infinité d'autres. Si les variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ sont des variables pivilégiées, le changement de variables

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha = a(\alpha'), \\ \beta = b(\beta'), \\ \cdots\cdots \\ \lambda = l(\lambda'), \\ \mu = m(\mu', \ldots, \nu'), \\ \cdots\cdots \\ \nu = n(\mu', \ldots, \nu'), \end{array}\right.$$

fournira un nouveau système de variables privilégiées $\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \mu', \ldots, \nu'$.

L'existence de variables privilégiées est une hypothèse qui n'est pas exacte dans tous les cas, dans le cas, par exemple, de la théorie générale de l'aimantation. NOUS N'ÉTUDIERONS DANS CE MÉMOIRE QUE LES CAS OÙ CETTE HYPOTHÈSE EST VÉRIFIÉE.

§ 4. — *Loi du déplacement isothermique de l'équilibre.*

Outre la supposition fondamentale, indiquée au numéro 2, sur laquelle repose toute la théorie, nous admettrons diverses autres hypothèses; ces hypothèses consisteront, en général, à étendre aux systèmes doués de modifications permanentes certaines conséquences du principe de Carnot et de Clausius, conséquences dont la légitimité est établie seulement pour les systèmes privés de modification permanente.

Prenons un système en équilibre aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$, imposons des variations infiniment petites $d\alpha, d\beta, \ldots, d\lambda, d\mu, \ldots, d\nu$, en laissant T constant; calculons, au moyen des égalités (4) et (5), les valeurs correspondantes de $d\Lambda, d\mathrm{B}, \ldots, d\mathrm{L}, d\mathrm{M}, \ldots, d\mathrm{N}$. Nous aurons ainsi défini une

Digitized by Google

modification isothermique réalisable, au sujet de laquelle nous ferons l'hypothèse suivante :

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — *Toute modification isothermique réalisable vérifie la loi du déplacement isothermique de l'équilibre.*

C'est ce qu'exprime l'inégalité

$$(8). \quad \ldots\ldots . \; dA\,d\alpha + dB\,d\beta + \cdots + dL\,d\lambda + M d\mu + \cdots + N d\nu < 0.$$

Or, en vertu des égalités (4) et (5), cette inégalité peut s'écrire :

$$(9). \quad \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(d\alpha)^2 + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(d\beta)^2 + \cdots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2}(d\nu)^2 + 2\sum \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi\, \partial \psi} d\varphi\, d\psi \\ \quad + g_\alpha |d\alpha| d\alpha + g_\beta |d\beta| d\beta + \cdots + g_\lambda |d\lambda| d\lambda > 0, \end{cases}$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les combinaisons distinctes que l'on peut former avec deux lettres distinctes φ, ψ, prises parmi les lettres α, β, ..., ν.

Cette inégalité entraine une conséquence :

Donnons aux variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, des variations $-d\alpha, -d\beta, \ldots, -d\nu$, et déterminons de même une modification réalisable correspondante; en exprimant que cette modification est soumise à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, nous trouverons l'inégalité

$$(9^{bis}). \quad \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(d\alpha)^2 + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(d\beta)^2 + \cdots + \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2}(d\nu)^2 + 2\sum \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi\, \partial \psi} d\varphi\, d\psi \\ \quad - g_\alpha |d\alpha| d\alpha - g_\beta |d\beta| d\beta - \cdots - g_\lambda |d\lambda| d\lambda > 0. \end{cases}$$

La comparaison des inégalités (9) et (9^{bis}) entraine l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(d\beta)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2}(d\nu)^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi\, \partial \psi} d\varphi\, d\psi > 0.$$

Or, les variations $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\nu$ sont entièrement arbitraires. On arrive donc à la proposition suivante :

La forme quadratique

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} a^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} b^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2} n^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi\, \partial \psi} fg$$

Digitized by Google

est une forme définie positive des variables a, b, ..., n, *dont* f, g, *sont deux quelconques :*

$$(10). \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} a^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} b^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2} n^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho \, \partial \psi} fg > 0.$$

§ 5. — *Loi du déplacement de l'équilibre par variation de température.*

Les coefficients calorifiques du système en équilibre R_α, R_β, ..., R_ν, C sont donnés par les égalités (*)

$$(11). \quad \left\{ \begin{array}{l} ER_\alpha = E \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - A, \\ ER_\beta = E \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - B, \\ \cdots\cdots\cdots \\ ER_\nu = E \dfrac{\partial U}{\partial \nu} - N, \\ EC = E \dfrac{\partial U}{\partial T}, \end{array} \right.$$

qui peuvent encore s'écrire, en vertu de l'égalité (2) et des égalités (4),

$$(12). \quad \left\{ \begin{array}{l} ER_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} - T \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \, \partial T} - A, \\ \cdots\cdots\cdots \\ ER_\lambda = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} - T \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \, \partial T} - L, \end{array} \right.$$

$$(13). \quad \left\{ \begin{array}{l} ER_\mu = - T \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ ER_\nu = - T \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial T}, \end{array} \right.$$

$$(14). \quad EC = - T \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}.$$

(*) *Commentaire aux principes de la thermodynamique*, 1re partie, Chap. III, n° 3. (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES, t. VIII, p. 300.)

Digitized by Google

Cela posé, nous énoncerons l'hypothèse suivante :

DEUXIÈME HYPOTHÈSE. — *On considère une modification réalisable définie de la manière suivante :*

1° *On fait varier la température* T *de* dT;

2° *On maintient constantes certaines des actions* A, B, ..., N;

3° *On fait varier les autres actions extérieures de manière que celles des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ *auxquelles elles correspondent gardent des valeurs invariables.*

Soient $d\alpha, d\beta, \ldots, d\nu$, *les variations des quantités* $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, *certaines de ces variations étant égales à* 0.

Dans une modification purement virtuelle où les variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ *subiraient les mêmes variations* $d\alpha, d\beta, \ldots, d\nu$, *mais où la température* T *demeurerait invariable, le système dégagerait une quantité de chaleur*

$$dQ = -(R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \cdots + R_\nu d\nu).$$

La quantité de chaleur dQ *est de signe contraire à* dT.

Cette hypothèse s'exprime par l'inégalité

$$(15). \quad \ldots \quad (R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \cdots + R_\nu d\nu)dT > 0.$$

Si l'on suppose que l'on maintienne constantes non pas seulement certaines des actions extérieures A, B, ..., N, mais toutes ces actions, la proposition précédente redonne l'énoncé ordinaire de la loi du déplacement de l'équilibre par variation de température; cet énoncé est donc impliqué dans le précédent à titre de cas particulier.

Dans le cas où l'on maintient constants tous les paramètres de la classe $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et où on laisse varier seulement les paramètres $\mu, \ldots, \nu$, ou certains d'entre eux, la proposition précédente cesse d'être une hypothèse pour devenir un théorème démontrable.

En effet, en vertu des égalités (13), l'inégalité (15) devient alors :

$$(16). \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T} d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial T} d\nu\right) dT < 0$$

Digitized by Google

Soit μ un des paramètres qui changent de valeur; l'action correspondante M garde, par hypothèse une valeur invariable. La première des égalités (4) donne alors

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu^2} d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial \nu} d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T} dT = 0,$$

ce qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu^2} (d\mu)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial \nu} d\mu \, d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T} d\mu \, dT = 0.$$

Chacun des paramètres μ, ..., ν, dont la valeur varie dans la modification considérée, fournit une égalité analogue; si maintenant l'un de ces paramètres, ν par exemple, garde une valeur invariable, l'égalité

$$d\nu = 0$$

permettra aussi d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial \nu} d\mu \, d\nu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2} (d\nu)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial T} d\nu \, dT = 0.$$

Considérons les égalités

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu^2} (d\mu)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial \nu} d\mu \, d\nu = - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T} d\mu \, dT,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial \mu} d\nu \, d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2} (d\nu)^2 = - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial T} d\nu \, dT,$$

qui sont toutes démontrées et ajoutons-les membre à membre. Nous trouvons l'égalité :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu^2} (d\mu)^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2} (d\nu)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varphi \, \partial \psi} d\varphi \, d\psi = - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \, \partial T} d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \, \partial T} d\nu \right) dT,$$

φ, ψ étant deux quelconques des paramètres μ, ..., ν.

Digitized by Google

Or, en vertu de l'inégalité (10) le premier membre de cette égalité est essentiellement positif; l'inégalité (16) est donc démontrée.

La démonstration précédente ne peut évidemment plus se répéter dans le cas où certains des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ changent de valeur; la proposition énoncée devient alors, comme nous l'avons dit, une hypothèse.

De cette hypothèse, tirons une conséquence qui nous servira par la suite.

Supposons que l'on maintienne constante l'action A et que le paramètre α varie en même temps que T, tandis que les actions B, ..., N, changent de valeur de telle sorte que les paramètres $\beta, \ldots, \nu$, gardent des valeurs invariables. Les égalités (4) et (5) nous donneront alors :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} d\alpha + g_\alpha |dx| + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \, \partial T} dT = 0,$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} |d\alpha|^2 + g_\alpha |d\alpha| d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \, \partial T} d\alpha \, dT = 0.$$

Or, si l'on applique à la modification considérée l'inégalité (9^{bis}), on trouve que l'on doit avoir

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + g_\alpha |d\alpha| d\alpha > 0.$$

L'égalité précédente donne donc

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial T} d\alpha \, dT < 0.$$

D'autre part, l'inégalité (15) devient, dans ce cas,

$$R_\alpha \, d\alpha \, dT > 0.$$

Digitized by Google

La comparaison de ces deux inégalités donne la première des inégalités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} R_\alpha \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial T} < 0, \\ R_\beta \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial T} < 0, \\ \cdots\cdots \\ R_\nu \dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \partial T} < 0. \end{array}\right.$$

Les autres inégalités s'établissent d'une manière analogue. Pour les paramètres $\mu, \ldots, \nu$, ces inégalités sont des conséquences évidentes des égalités (13).

§ 6. — *Représentation d'une transformation. — Cycles fermés.*

Soit n le nombre des variables α, β, ..., ν. Considérons un espace à $(2n + 1)$ dimensions défini par les $(2n + 1)$ variables

$$\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N.$$

Si le système est en équilibre à la température T, pour des valeurs $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, des variables normales, sous des actions extérieures A, B, ..., N, cet état d'équilibre sera représenté par un *point* dans notre espace à $(2n + 1)$ dimensions.

Une suite d'états d'équilibre, constituant une modification soit réalisable, soit purement virtuelle, est représentée par une *ligne*.

Une ligne fermée représente une modification, réalisable ou purement virtuelle, que nous nommerons un *cycle*.

Considérons un *cycle réalisable*. L'action A doit, après le parcours de ce cycle, reprendre la valeur qu'elle avait au début, en sorte que l'on doit avoir

$$\int dA = 0,$$

Digitized by Google

l'intégrale s'étendant au parcours entier du cycle. On doit avoir de même

$$\int dB = 0, \ldots, \int dL = 0.$$

Mais le cycle étant réalisable, les égalités (4) et (5) sont constamment vérifiées. On doit donc avoir :

$$(18)\quad \ldots\ldots \begin{cases} \int g_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N)\,|d\alpha| = 0, \\ \int g_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N)\,|d\beta| = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int g_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N)\,|d\lambda| = 0, \end{cases}$$

les intégrales s'étendant au parcours entier du cycle et les actions M, ..., N, étant exprimées en fonction des variables α, β, ..., ν, T, par les égalités (4).

Considérons ce que devient la fonction g_α lorsqu'on y exprime M, ..., N, en fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, T par les égalités (4); supposons que cette fonction, que nous désignerous par γ_α, garde, le long du cycle, un signe invariable; la première des égalités (18) serait alors impossible. La fonction γ_α doit donc changer de signe le long du parcours du cycle, et comme elle est continue, elle s'annule en certains points du cycle. Ainsi, *la possibilité d'un cycle fermé réalisable est subordonnée à l'existence, sur le parcours de ce cycle, de points où γ_α s'annule.*

Ce résultat peut s'énoncer autrement.

Soit p le nombre des variables $\mu, \ldots, \nu$.

Les équations

$$(19)\quad \ldots\ldots \begin{cases} g_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N) = 0. \\ M = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \ldots\ldots \\ N = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}, \end{cases}$$

déterminent un espace à $(2n - p + 1)$ dimensions tracé dans l'espace

Digitized by Google

à $(2n + 1)$ dimensions que nous considérons. Désignons par $\mathcal{E}_\alpha$ cet espace. Le théorème précédent pourra s'énoncer ainsi :

La ligne fermée qui figure un cycle réalisable rencontre forcément l'espace $\mathcal{E}_\alpha$.

On démontrerait de même qu'elle rencontre les $(n - p - 1)$ espaces à $(2n - p + 1)$ dimensions $\mathcal{E}_\beta, \ldots, \mathcal{E}_\lambda$ que définissent les égalités

$$(19^{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{N}) = 0, \\ \mathrm{M} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \ldots \\ \mathrm{N} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}. \end{array} \right.$$

. . . . . .

$$(19^{ter}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{N}) = 0, \\ \mathrm{M} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \ldots \\ \mathrm{N} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}. \end{array} \right.$$

Toutefois, cette proposition souffre des exceptions si quelqu'un des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ garde une valeur invariable tout le long du cycle considéré. Supposons, par exemple, que les deux paramètres α et β varient seuls tandis que les autres paramètres tels que λ gardent des valeurs invariables. La ligne fermée qui représente le cycle devra rencontrer les deux espaces $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta$, mais elle ne rencontrera pas forcément les autres espaces tels que $\mathcal{E}_\lambda$.

Admettre que le système étudié peut décrire des cycles réalisables, c'est admettre l'existence réelle des espaces $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_\beta, \ldots, \mathcal{E}_\lambda$ dans le champ des états que le système peut atteindre. Nous n'étudierons que les systèmes pour lesquels cette supposition est réalisée.

Digitized by Google

§ 7. — *Espace des états naturels.*

Les $(n - p)$ espaces $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$, à $(2n - p + 1)$ dimensions se rencontrent suivant un espace à $(n + 1)$ dimensions, mené dans l'espace à $(2n + 1)$ dimensions que nous considérons. Cet espace à $(n + 1)$ dimensions est défini par l'ensemble des n équations :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} g_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{N}) = 0, \\ g_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{N}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{N}) = 0, \\ \mathrm{M} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{N} = \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}. \end{array}\right.$$

Cet espace, qui jouera un rôle fondamental dans notre théorie, est ce que nous nommerons l'*espace des états naturels*. Tout point de cet espace représentera un état d'équilibre du système, que nous nommerons un *état naturel*.

Examinons quelques-unes des propriétés qui caractérisent les états naturels.

1° Considérons un cycle infiniment petit. La courbe qui représente ce cycle rencontre forcément chacun des espaces $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$, en des points qui sont infiniment voisins les uns des autres et qui, par conséquent, sont infiniment voisins de points communs à la fois à tous les espaces $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$. D'où cette première propriété des états naturels :

Tous les points d'un cycle réalisable infiniment petit sont infiniment voisins d'un état naturel.

Ce théorème ne souffre d'exceptions que si quelques-uns des paramètres α, β, ..., λ gardent une valeur rigoureusement constante pendant le parcours du cycle; supposons, par exemple, que les deux paramètres α et β

Digitized by Google

varient seuls, tandis que les paramètres tels que λ gardent une valeur invariable; tous les points du cycle infiniment petit seront infiniment voisins de points communs aux deux espaces $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\beta$, mais ces derniers points n'appartiendront pas nécessairement aux autres espaces tels que $\mathcal{E}_\lambda$.

2° Prenons le système dans un état initial où les variables normales ont les valeurs $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \nu_0$. La température a la valeur T. Les actions extérieures ont les valeurs A, B, ..., N. Faisons subir au système une modification réalisable infiniment petite à la suite de laquelle la température T et les actions extérieures A, B, ..., N, reprennent leurs valeurs initiales. Les variables normales reprennent des valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1$, différentes, en général, de $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \nu_0$. Les différences

$$(\alpha_1 - \alpha_0), (\beta_1 - \beta_0), \ldots, (\nu_1 - \nu_0)$$

définissent ce que l'on nomme la *modification permanente* éprouvée par le système.

Les égalités (4) et (5) nous donnent :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_0 + \int g_\alpha |d\alpha| = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_0 + \int g_\beta |d\beta| = 0,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_0 + \int g_\lambda |d\lambda| = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_0 = 0,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_0 = 0,$$

les intégrales s'étendant à la modification considérée.

Digitized by Google

Cette modification étant infiniment petite, ainsi que les valeurs des quantités $(\alpha_1 - \alpha_0)$, $(\beta_1 - \beta_0)$, ... $(\nu_1 - \nu_0)$, ces égalités peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}(\beta_1 - \beta_0) + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \nu}(\nu_1 - \nu_0) + g_\alpha \int |d\alpha| = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \alpha}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}(\beta_1 - \beta_0) + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \nu}(\nu_1 - \nu_0) + g_\beta \int |d\beta| = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial \alpha}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial \beta}(\beta_1 - \beta_0) + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial \nu}(\nu_1 - \nu_0) + g_\lambda \int |d\lambda| = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \alpha}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \beta}(\beta_1 - \beta_0) + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu}(\nu_1 - \nu_0) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \partial \alpha}(\alpha_1 - \alpha_0) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \partial \beta}(\beta_1 - \beta_0) + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu^2}(\nu_1 - \nu_0) = 0.$$

Si les quantités $g_\alpha, g_\beta, \ldots, g_\lambda$ ne sont pas toutes égales à 0, ces équations donneront pour $(\alpha_1 - \alpha_0)$, $(\beta_1 - \beta_0)$, ... $(\nu_1 - \nu_0)$ des valeurs qui seront du même ordre de grandeur que $\int |d\alpha|, \int |d\beta|, \ldots, \int |d\lambda|$. D'où le théorème suivant :

Supposons qu'à partir d'un état initial qui n'est pas infiniment voisin d'un état naturel, la température et les actions extérieures éprouvent une perturbation infiniment petite après laquelle elles recouvrent leurs valeurs initiales ; le système éprouve une modification permanente qui est du même ordre de grandeur que la perturbation produite. Si, au contraire, l'état initial est infiniment voisin d'un état naturel, la modification permanente éprouvée par le système est infiniment petite par rapport à l'ordre de grandeur de la perturbation produite.

Ce théorème est en défaut dans le cas particulier où certains des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, demeurent rigoureusement constants pendant toute la durée de la perturbation produite. Supposons, par exemple, que, pendant

Digitized by Google

toute la durée de cette perturbation, les deux variables α et β changent seules de valeur, tandis que les autres variables du groupe $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ gardent des valeurs invariables. Pour que la modification permanente éprouvée par le système soit infiniment petite par rapport à la perturbation produite, il sera nécessaire et suffisant que l'état initial soit infiniment voisin d'un point commun aux deux espaces $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$.

3° Supposons que, par des moyens physiques quelconques, on cherche à maintenir constantes la température T et les actions extérieures A, B, ..., N. On ne pourra jamais réaliser ces conditions en toute rigueur; pratiquement, la température T et les actions extérieures éprouveront des oscillations très fréquentes entre des limites très voisines; soient T′, T″, les limites de la température; soient A′, A″; B′, B″; ...; N′, N″, les limites entre lesquelles oscillent les actions extérieures A, B, ..., N.

Laissons le système soumis pendant un certain temps à ces oscillations; écrivons que le système est à chaque instant sensiblement en équilibre, en sorte que les égalités (4) et (5) sont sensiblement vérifiées. Ces égalités nous permettront d'écrire, en désignant par l'indice 0 les valeurs initiales des diverses grandeurs considérées, et par l'indice 1 les valeurs finales,

$$A_1 - A_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_0 + \int_0^1 g_\alpha |d\alpha|,$$

$$B_1 - B_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_0 + \int_0^1 g_\beta |d\beta|,$$

. . . . . .

$$L_1 - L_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_0 + \int_0^1 g_\lambda |d\lambda|,$$

$$M_1 - M_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_0,$$

. . . . . .

$$N_1 - N_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_0.$$

Digitized by Google

Les quantités $(A_1 - A_0)$, $(B_1 - B_0)$, ..., $(N_1 - N_0)$ sont au plus égales, en valeur absolue, aux différences $(A'' - A')$, $(B'' - B')$, ..., $(N'' - N')$. Si donc nous convenons de négliger les quantités qui sont de l'ordre de grandeur de ces différences, les égalités précédentes deviendront :

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_1 = \displaystyle\int_0^1 g_\alpha \,|d\alpha|, \\ \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right)_1 = \displaystyle\int_0^1 g_\beta \,|d\beta|, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right)_1 = \displaystyle\int_0^1 g_\lambda \,|d\lambda|, \\ \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}\right)_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_0 - \left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}\right)_1 = 0. \end{array}\right.$$

Supposons que l'état initial du système ne soit pas un état naturel; quelque étroitement resserrées que soient les oscillations de la température et des actions extérieures, après un nombre suffisamment grand de telles oscillations le système aura éprouvé une modification de grandeur finie.

L'état initial n'étant pas un état naturel, l'une au moins des quantités $g_\alpha, g_\beta, \ldots g_\lambda$ — soit g_α — a, dans cet état initial, une valeur différente de 0 et dont le signe est bien déterminé. Cette quantité $g\alpha$ ne pourrait changer de signe sans une variation finie des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \nu$; admettre qu'elle a changé de signe entre l'instant initial et l'état final, ce serait admettre le théorème à démontrer. Supposons donc que cette quantité ait gardé un signe invariable. Nous pourrons alors écrire

$$\int_0^1 g_\alpha \,|d\alpha| = \gamma_\alpha \int_0^1 |d\alpha|,$$

γ_α étant une des valeurs prises par g_α durant la modification considérée.

Digitized by Google

D'autre part, chaque oscillation subie par la température et les actions extérieures apporte à l'intégrale $\int_0^1 |d\alpha|$ un contingent du même ordre de grandeur que l'oscillation; chacun de ces apports a beau être extrêmement petit, comme ils sont tous positifs, on pourra les prendre assez nombreux pour que leur somme atteigne une valeur finie. La première des égalités (21) nous montre alors que la différence

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right)_0$$

doit avoir une valeur finie, ce qui ne peut être, à moins que l'une au moins des différences

$$(\alpha_1 - \alpha_0), (\beta_1 - \beta_0), \ldots, (\nu_1 - \nu_0)$$

ait une valeur finie.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Ainsi, un système pris dans un état initial qui n'est pas un état naturel et soumis à une température et à des actions extérieures à peu près constantes, éprouve à la longue une modification finie qui semble spontanée; cette modification est en réalité l'effet d'oscillations très petites et très nombreuses de la température et des actions extérieures, oscillations que l'on ne peut éviter.

L'état d'un système porté à une température à peu près constante et soumis à des actions extérieures à peu près constantes, ne peut être un état permanent que si cet état est un état naturel.

Il faut d'ailleurs se garder d'en conclure que tout état naturel soit assurément un état permanent. Dans le cas où le système est défini par une seule variable normale du groupe $\alpha, \ldots, \lambda$, on peut distinguer d'une manière précise dans quels cas un état naturel est ou n'est pas permanent. Le cas général ne comporte pas de règle aussi simple.

Digitized by Google

§ 8. — *Des modifications pseudo-réversibles.*

Prenons deux points A, B, infiniment voisins, représentant deux états d'équilibre du système. En général, il ne sera pas possible de faire passer par ces deux points un cycle réalisable infiniment petit. En effet, la ligne fermée qui représenterait un tel cycle devrait rencontrer chacun des espaces E_α, E_β, ..., E_λ, ce qui n'est pas possible si les points A, B sont à distance finie de l'espace des états naturels. Mais cette impossibilité disparaît si les deux points A et B appartiennent à l'espace des états naturels. On peut donc, sans contradiction avec ce qui précède, admettre l'hypothèse suivante :

TROISIÈME HYPOTHÈSE. — *Si les deux points* A *et* B, *infiniment voisins l'un de l'autre, appartiennent à l'espace des états naturels ou en sont infiniment voisins, on peut, par ces deux points, faire passer un cycle réalisable infiniment petit* AMBM'A.

Dans la démonstration qui précède, nous avons admis que la ligne représentative d'un cycle réalisable devait rencontrer chacun des espaces E_α, E_β, ..., E_λ. Cette condition cesse d'être nécessaire si quelques-unes des variables α, β, ..., λ gardent une valeur constante tout le long du parcours du cycle. Si, par exemple, les paramètres γ, ... λ, gardent, le long du cycle, des valeurs invariables, la ligne représentative est assujettie seulement à rencontrer les espaces E_α, E_β. Dans ce cas, on aura, tout le long du cycle :

$$dC = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \gamma} d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \gamma} d\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \gamma} d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \partial \gamma} d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \partial \gamma} dT,$$

. . . . . .

$$dL = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \lambda} d\alpha + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \lambda} d\beta + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \lambda} d\mu + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \nu \partial \lambda} d\nu + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \partial \lambda} dT,$$

égalités qui, jointes aux égalités

$$d\gamma = 0, \ldots, d\lambda = 0,$$

Digitized by Google

montrent que les quantités

$$C - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}$$

gardent, le long du cycle, des valeurs constantes.

Il n'y aura donc pas contradiction à admettre l'hypothèse suivante :

TROISIÈME HYPOTHÈSE GÉNÉRALISÉE. — *Deux points* a, b, *infiniment voisins l'un de l'autre, sont aussi infiniment voisins de chacun des espaces* E_α, E_γ. *En ces deux points, les paramètres*

$$\alpha, \beta, \mu, \ldots, \nu, T$$

ont des valeurs différentes; mais les paramètres $\gamma, \ldots, \lambda$ *ont la même valeur; en outre, les quantités*

$$C - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}$$

ont la même valeur au point a *et au point* b. *Par ces deux points, on peut faire passer un cycle réalisable infiniment petit* ambm'a.

Dans l'énoncé de cette hypothèse, nous avons supposé que deux des paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ variaient seuls; nous aurions pu supposer que trois, quatre, ... ou un seulement d'entre eux soient susceptibles de varier, et énoncer une hypothèse analogue.

Si l'on prend deux points infiniment voisins a *et* b, *et si l'on suppose que les quantités*

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda,$$

$$A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, B - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}$$

aient la même valeur au point a *et au point* b, *on pourra, par ces deux points, faire passer un cycle réalisable infiniment petit, le long duquel*

Digitized by Google

α, β, ..., λ *garderont des valeurs invariables; un tel cycle sera réversible.*

Considérons une ligne a_0a_n tracée tout entière en l'espace des états naturels. Divisons cette ligne, du point a_0 au point a_n, en segments infiniment petits a_0a_1, a_1a_2, ... , $a_{n-1}\,a_n$.

Soient : $a_0m_1a_1m_1'a_0$ un cycle réalisable infiniment petit passant par les points a_0a_1;

$a_1m_2a_2m_2'a_1$ un cycle réalisable infiniment petit passant par les points a_1a_2; ...

a_{n-}, $m_na_nm_n'a_{n-}$, un cycle réalisable infiniment petit passant par les points $a_{n-1}\,a_n$.

La ligne sinueuse $a_0m_1a_1m_2a_2$, ... $a_{n-1}\,m_na_n$ est une ligne réalisable qui s'écarte infiniment peu, le long de son parcours, de la ligne considérée $a_0a_1a_2$ ... $a_{n-1}\,a_n$.

La ligne sinueuse $a_nm_n'a_{n-1}$ ... $a_2m_2'a_1m_1'a_0$ est une ligne réalisable qui s'écarte infiniment peu, le long de son parcours, de la ligne considérée, suivie en sens inverse a_na_{n-1} ... $a_2a_1a_0$.

Ainsi, une modification purement virtuelle, formée par une suite d'états naturels, s'écarte toujours infiniment peu, en quelque sens qu'on la suive, d'une modification réalisable. C'est ce caractère que nous exprimerons en disant qu'*une suite continue d'états naturels constitue une modification pseudo-réversible.*

Ce qui précède, permet d'étendre à d'autres cas cette notion de transformation pseudo-réversible.

Imaginons une ligne dont tous les points appartiennent à la fois à l'espace E_α et à l'espace E_β. Supposons que, tout le long de cette ligne, **on ait :**

$$d\gamma = 0, \ldots, d\lambda = 0,$$

$$d\left(C - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}\right) = 0, \ldots, d\left(L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

Une telle ligne représentera encore une *modification pseudo-réversible.*

Digitized by Google

Quant à une ligne le long de laquelle on aurait constamment

$$d\alpha = 0, d\beta = 0, \ldots, d\lambda = 0,$$

$$d\left(A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}\right) = 0, d\left(B - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right) = 0, \ldots, d\left(L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right) = 0,$$

$$M - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu} = 0, \ldots N - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu} = 0,$$

elle représenterait une *modification réversible.*

Par une extension naturelle de la célèbre proposition de Clausius, nous énoncerons l'hypothèse suivante :

QUATRIÈME HYPOTHÈSE. — *Pour tout cycle exclusivement formé de modifications réversibles ou pseudo-réversibles, on a l'égalité*

$$(22) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \int \frac{dQ}{T} = 0,$$

dQ *étant la quantité de chaleur dégagée pendant l'une des modifications élémentaires qui composent le cycle et l'intégrale s'étendant au cycle entier.*

§. 9. — *Entropie apparente et potentiel thermodynamique apparent.*

Considérons l'espace des états naturels, défini par les équations (20). Dans les équations

$$g_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N) = 0,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$g_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N) = 0,$$

remplaçons M, ..., N par leurs valeurs

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \ldots, \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T)$$

Digitized by Google

et résolvons les équations obtenues par rapport à A, B, ..., L; nous aurons les équations

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l} A = G_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \\ B = G_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \\ \cdots\cdots\cdots \\ L = G_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \end{array}\right.$$

qui, jointes aux équations

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} M = \dfrac{\partial}{\partial\mu}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \\ \cdots\cdots\cdots \\ N = \dfrac{\partial}{\partial\nu}\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T), \end{array}\right.$$

définiront l'espace des états naturels.

Considérons une modification virtuelle formée par une suite d'états naturels; les équations (23) et (24) sont vérifiées en tout point de la ligne qui représente cette modification.

La quantité de chaleur dQ dégagée par un élément d'une telle modification aura pour valeur, d'après les égalités (12), (13), (14) et (23),

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} EdQ = \left(T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial T} + G_\alpha - \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \left(T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\alpha\partial T} + G_\beta - \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta}\right)d\beta \\ \qquad\qquad + \cdots + \left(T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\lambda\partial T} + G_\lambda - \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)d\lambda \\ \quad + T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\mu\partial T}d\mu + \cdots + T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial\nu\partial T}d\nu + T\dfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial T^2}dT. \end{array}\right.$$

Si la modification considérée se ferme sur elle-même, l'égalité (22) doit être vérifiée; la quantité $\frac{dQ}{T}$ doit donc être la différentielle totale d'une fonction uniforme et continue de $\alpha, \beta, \ldots, \nu, T$; l'égalité (25) nous montre que, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que

$$\frac{1}{T}\left(G_\alpha - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\right)d\alpha + \frac{1}{T}\left(G_\beta - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta}\right)d\beta + \cdots + \frac{1}{T}\left(G\lambda - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)d\lambda$$

soit la différentielle totale d'une fonction uniforme et continue des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu, T$.

Digitized by Google

Il faut et il suffit évidemment pour cela qu'il existe une fonction uniforme et continue des seules variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, telle que l'on ait :

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} G_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left[\mathcal{F} + T\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\right], \\ G_\beta = \dfrac{\partial}{\partial\beta}\left[\mathcal{F} + T\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\right], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mathcal{F} + T\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)\right]. \end{array}\right.$$

Si nous comparons ces égalités (26) aux égalités (23) et (24), nous voyons que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Il existe une fonction uniforme et continue, $\varphi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, *des seules variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, *telle que les équations qui définissent l'espace des états naturels puissent se mettre sous la forme :*

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\mathcal{F} + T\varphi), \\ B = \dfrac{\partial}{\partial\beta}(\mathcal{F} + T\varphi), \\ \cdots\cdots \\ L = \dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\mathcal{F} + T\varphi), \\ M = \dfrac{\partial}{\partial\mu}(\mathcal{F} + T\varphi), \\ \cdots\cdots \\ N = \dfrac{\partial}{\partial\nu}(\mathcal{F} + T\varphi). \end{array}\right.$$

Cette fonction φ *est déterminée à une constante près.*

Prenons maintenant une modification pseudo-réversible, qui sans être une suite d'états naturels, soit commune aux espaces E_β, E_γ, ..., E_λ. Nous savons que, le long d'une telle modification les deux quantités α et $\left(A - \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\alpha}\right)$

Digitized by Google

doivent garder des valeurs invariables; nous poserons, en désignant par a la valeur invariable de cette dernière quantité,

$$(28) \quad A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = a;$$

$\beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$, T varient arbitrairement; mais entre ces variables et les actions A,... N, on a, outre l'égalité (28), les égalités :

$$(29) \quad \begin{cases} M = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \\ \cdots \\ N = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}, \end{cases}$$

$$(30) \quad \begin{cases} g_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N) = 0, \\ \cdots\cdots \\ g_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, A, B, \ldots, N) = 0. \end{cases}$$

Dans les équations (30), remplaçons les actions A, M, ..., N par leurs expressions déduites des égalités (28) et (29) et résolvons les équations obtenues par rapport aux actions B, ..., L. Nous trouverons

$$(31) \quad \begin{cases} B = G_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, a), \\ \cdots\cdots \\ L = G_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \nu, T, a). \end{cases}$$

Une modification pseudo-réversible du genre de celle que nous considérons peut donc se caractériser ainsi :

1° Les équations (28), (29) et (31) sont vérifiées en tout point de la ligne qui la représente;

2° Tout le long de cette ligne, on a

$$(32) \quad \alpha = \text{const.}, \qquad a = \text{const.}$$

Si une telle modification se ferme sur elle-même, elle doit vérifier l'égalité (22), en sorte que la quantité $\frac{dQ}{T}$ doit être une différentielle totale. En

Digitized by Google

vertu des égalités (12), (13) et (14), cette proposition, on le voit sans peine, peut s'énoncer ainsi :

L'expression

$$\frac{1}{T}\left(G_\beta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}\right) d\beta + \dots + \frac{1}{T}\left(G_\lambda - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}\right) d\lambda$$

est la différentielle totale d'une fonction de $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots, \nu, T, a$, toutes les fois que les égalités (32) sont vérifiées.

Cette proposition, à son tour, peut s'énoncer ainsi :

Il existe une fonction uniforme et continue des seules variables $\alpha, \beta, \dots, \lambda, a, \psi(\alpha, \beta, \dots, \lambda, a)$, telle que l'on ait :

$$G_\beta - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = T \frac{\partial}{\partial \beta} \psi(\alpha, \beta, \dots, \lambda, a),$$

. . . . . .

$$G_\lambda - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = T \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi(\alpha, \beta, \dots, \lambda, a).$$

Ces égalités, jointes aux égalités (31) et (29) permettent d'écrire que l'on a, en tout point de la modification réversible considérée,

$$(33). \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \dfrac{\partial}{\partial \beta}(\mathcal{F} + T\psi), \\ \cdots\cdots\cdots \\ L = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}(\mathcal{F} + T\psi), \\ M = \dfrac{\partial}{\partial \mu}(\mathcal{F} + T\psi), \\ \cdots\cdots\cdots \\ N = \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mathcal{F} + T\psi). \end{array} \right.$$

Mais, si l'on considère un groupe quelconque de valeurs de $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \dots, \nu, T$, on pourra toujours lui faire correspondre un des points de l'espace des états naturels. Par ce point, on pourra faire passer une modifi-

Digitized by Google

cation pseudo-réversible telle que celles que nous considérons. En ce point, les égalités (33) devront être vérifiées en même temps que les égalités (27); on aura donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \beta},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial \nu}.$$

Ces égalités ayant lieu quelles que soient les valeurs des variables $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, T, on voit que les égalités (33) pourront aussi bien s'écrire :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{\partial}{\partial \beta}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ L = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}), \\ M = \dfrac{\partial}{\partial \mu}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ N = \dfrac{\partial}{\partial \nu}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}). \end{array}\right.$$

En continuant de la sorte pour les diverses classes de modifications pseudo-réversibles, on trouvera par exemple que pour les modifications pseudo-réversibles tracées dans le seul espace E_α, modifications pour lesquelles on a

$$d\beta = 0, \ldots, d\lambda = 0,$$

on peut écrire à chaque instant les égalités

$$A = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}),$$
$$M = \frac{\partial}{\partial \mu}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$N = \frac{\partial}{\partial \nu}(\mathfrak{F} + T\mathfrak{p}).$$

Digitized by Google

Enfin, pour les modifications réversibles proprement dites, pour lesquelles on a

$$d\alpha = 0,\ d\beta = 0,\ \ldots,\ d\lambda = 0,$$

on peut écrire à chaque instant les égalités

$$M = \frac{\partial}{\partial \mu}(\mathcal{F} + T\gamma),$$

. . . . . .

$$N = \frac{\partial}{\partial \nu}(\mathcal{F} + T\gamma),$$

équivalentes aux égalités (24).

Toutes ces propositions se résument en une seule par la considération du travail virtuel

$$d\mathfrak{T}_e = A d\alpha + B d\beta + \cdots + N d\nu$$

effectué par les actions extérieures durant une modification élémentaire.

Cette proposition est la suivante :

Si l'on pose

(35). . $$F(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu, T) = \mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu, T) + T\gamma(\alpha, \beta, \ldots, \lambda),$$

le travail accompli par les actions extérieures durant une modification réversible ou pseudo-réversible a pour valeur

(36). . . . . $$d\mathfrak{T}_e = dF - \frac{\partial F}{\partial T} dT.$$

Les égalités (2) et (35) permettent d'énoncer ce théorème :

L'énergie interne U *du système est liée à la fonction* F *par l'égalité*

(37). . . . . $$EU = F - T\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Digitized by Google

La quantité de chaleur dQ, dégagée dans une modification quelconque, est donnée par l'égalité

$$EdQ = -EdU + d\mathfrak{E}_e.$$

En vertu des égalités (37) et (36), cette égalité donne le théorème suivant :

La quantité de chaleur dQ, *dégagée durant une modification réversible ou pseudo-réversible, est donnée par l'égalité*

$$(38). \quad \ldots \quad dQ = -Td\Sigma,$$

Σ *étant une fonction* de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$, T, *que définit l'égalité*

$$(39). \quad \ldots \quad E\Sigma = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}.$$

Les égalités (37) et (39) donnent l'égalité

$$(40). \quad \ldots \quad F = E(U - T\Sigma).$$

Si donc nous prenons un système susceptible d'éprouver des modifications permanentes, et si nous soumettons exclusivement ce système à des modifications pseudo-réversibles, nous pourrons écrire pour les trois fonctions U, Σ, F des égalités analogues de tout point à celles que vérifient l'énergie interne, l'entropie, et le potentiel thermodynamique interne d'un système dépourvu de modifications permanentes et que l'on transforme d'une manière réversible. C'est pourquoi nous dirons que Σ est l'*entropie apparente* de notre système et que F en est le *potentiel thermodynamique apparent.*

Cette proposition a une grande importance.

Considérons, par exemple, un système pour lequel les états naturels soient des états permanents. Faisons subir à la température de ce système et aux actions extérieures qu'il éprouve des variations excessivement lentes; l'état du système différera toujours très peu d'un état naturel; les théorèmes que

Digitized by Google

nous venons d'établir nous montrent qu'en traitant ces transformations très lentes comme nous traiterions les transformations réversibles d'un système incapable de modifications permanentes, nous ne commettrons aucune erreur.

Toutefois, nous n'avons encore justifié cette conclusion qu'en ce qui concerne l'usage des *égalités;* il nous reste à l'étendre aux *inégalités,* ce à quoi nous parviendrons en nous appuyant sur l'hypothèse suivante :

§ 10. — *Inégalité de Clausius.*

CINQUIÈME HYPOTHÈSE. — *Considérons un cycle, formé soit entièrement de modifications réalisables non réversibles, soit en partie de telles modifications et en partie de modifications réversibles ou pseudo-réversibles.*

Soit T *la température absolue du système pendant qu'il subit une des modifications élémentaires qui composent ce cycle; soit* dQ *la quantité de chaleur dégagée durant cette modification; l'inégalité de Clausius.*

$$(41) \quad \int \frac{dQ}{T} > 0,$$

où l'intégrale s'étend au cycle entier, est vérifiée.

Suivons les conséquences de cette hypothèse.

Considérons une modification réalisable non réversible allant du point figuratif $0\ (\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0, \mu_0, \ldots, \nu_0, T_0)$ au point figuratif $1\ (\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mu, \ldots, \nu_1, T_1)$.

Du point 0, faisons partir une ligne le long de laquelle on ait constamment

$$\alpha = \text{const.}, \ \beta = \text{const.}, \ \ldots, \ \lambda = \text{const.},$$

$$A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \text{const.}, \ B - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \text{const.}, \ \ldots, \ L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \text{const.}, \ M = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \ \ldots, \ N = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu},$$

et suivons-la jusqu'au point 5 où elle rencontre l'un des espaces $E_\alpha, E_\beta, \ldots, E_\lambda$; soit E_α. La ligne (5, 0) représentera une modification réversible.

Digitized by Google

Du point 5, faisons partir une ligne, tracée en l'espace E_z, le long de laquelle on ait constamment

$$\beta = \text{const.}, \ldots, \lambda = \text{const.},$$

$$B - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \text{const.}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \text{const.},$$

et suivons-la jusqu'au point 4 où elle rencontre l'espace des états naturels. La ligne (4, 5) représentera une modification pseudo-réversible.

De même, du point 1 faisons partir une ligne le long de laquelle on ait constamment

$$\alpha = \text{const.}, \ \beta = \text{const.}, \ldots, \lambda = \text{const.},$$

$$A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \text{const.}, \ B - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = \text{const.}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = \text{const.}, \ M = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mu}, \ldots, N = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \nu}$$

et suivons-la jusqu'au point 2 où elle rencontre l'un des espaces E_α, E_β, ..., E_λ; soit E_β. La ligne (1, 2) représentera une modification réversible.

Du point 2, faisons partir une ligne, tracée en entier en l'espace E_β, le long de laquelle on ait constamment

$$\alpha = \text{const.}, \ \gamma = \text{const.}, \ldots, \lambda = \text{const.},$$

$$A - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = \text{const.}, \ C - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma} = \text{const.}, \ldots, L - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} \text{ const.},$$

et suivons-la jusqu'au point 3 où elle rencontre l'espace des états naturels. La ligne (2, 3) représentera une modification pseudo-réversible.

Enfin, joignons le point 3 au point 4 par une ligne tracée tout entière en l'espace des états naturels. La ligne (3, 4) représentera une modification pseudo-réversible.

Considérons le cycle (0, 1, 2, 3, 4, 5, 0).

Il comprend :

Deux modifications réversibles, les modifications (1, 2) et (5, 0);

Digitized by Google

Trois modifications pseudo-réversibles, les modifications (2, 3), (3, 4), (4, 5);

Enfin, une modification réalisable non réversible, la modification (0, 1).

On doit donc avoir, pour un tel cycle,

$$\int \frac{dQ}{T} > 0,$$

inégalité que l'on peut écrire plus explicitement

$$(42) \quad \ldots \quad \int_{(0,1)} \frac{dQ}{T} + \int_{(1,2,\ldots,5,0)} \frac{dQ}{T} > 0.$$

Mais la modification (1, 2, 3, 4, 5, 0) étant, en entier, réversible ou pseudo-réversible, l'égalité (38) est vérifiée pour tout élément de cette modification, en sorte que l'on peut écrire

$$\int_{(1,2,\ldots,5,0)} \frac{dQ}{T} = \Sigma_1 - \Sigma_0.$$

L'inégalité (42) devient alors

$$\int_{(0,1)} \frac{dQ}{T} + \Sigma_1 - \Sigma_0 > 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_{(0,1)} \left(\frac{dQ}{T} + d\Sigma \right) > 0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour toute modification réalisable et non réversible. On en conclut le théorème suivant :

Pour toute modification réalisable et non réversible élémentaire, on a l'inégalité

$$(43) \quad \ldots \quad \frac{dQ}{T} + d\Sigma > 0.$$

Digitized by Google

Pour les systèmes non susceptibles d'éprouver des modifications permanentes, Clausius a donné le nom de *transformation non compensée* à la quantité

$$dP = \frac{dQ}{T} - dS,$$

S étant l'entropie du système. Nous étendrons cette définition aux systèmes capables de déformations permanentes et nous nommerons *transformation non compensée* la quantité

$$(44) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad dP = \frac{dQ}{T} - d\Sigma.$$

Moyennant cette définition, le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Toute modification réalisable non réversible est accompagnée d'une transformation non compensée positive.

Considérons, en particulier, une modification réalisable, non réversible, *isothermique*. L'inégalité (43), jointe à l'égalité, toujours vérifiée,

$$EdQ = -EdU + d\mathfrak{C}_e$$

donne

$$d\mathfrak{C}_e - EdU + ETd\Sigma = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (40) et en tenant compte de ce que la modification est isothermique,

$$(45) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d\mathfrak{C}_e - dF > 0.$$

Lorsqu'une modification élémentaire est réalisable, non réversible et isothermique, elle est accompagnée d'un travail non compensé $(d\mathfrak{C}_e - dF)$ *qui est toujours positif.*

Digitized by Google

§ 11. — *Mouvement d'un système qui admet des déformations permanentes.*

Jusqu'ici, nous avons étudié les *modifications réalisables* d'un système, qui sont, d'après la définition que nous en avons donnée au n° 1, certaines suites d'états d'équilibre. Proposons-nous maintenant d'étudier les *modifications réelles* du système.

Pour ne pas compliquer la question sans utilité, nous nous bornerons à étudier le *cas où les résistances passives sont toutes égales à* 0, et nous allons préciser de la manière suivante ce que nous entendons par ces mots :

Lorsque les résistances passives sont toutes égales à 0, dans un système dénué de modifications permanentes, la statique et la dynamique de ce système sont liées l'une à l'autre par le *Principe de d'Alembert ;* ce principe entraîne la conséquence suivante :

Étant donnée une modification élémentaire RÉELLE, *subie par le système sous les actions extérieures* A, B, ..., N ; $\mathfrak{T}$ *étant la force vive du système ;* $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\nu$, dT *les variations éprouvées par les variables normales qui définissent l'état du système ; on aura une modification élémentaire* RÉALISABLE *si l'on fait varier les paramètres* α, β, ..., ν, T *de* $d\alpha$, $d\beta$, ..., $d\nu$, dT, *les actions extérieures ayant pour valeurs respectives :*

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dfrac{d\alpha}{dt}}, \\ \mathrm{B} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \beta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dfrac{d\beta}{dt}}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{N} + \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \nu} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dfrac{d\nu}{dt}}. \end{array}\right.$$

Considérons maintenant un système susceptible de déformations permanentes. Dire que les résistances passives y sont toutes égales à 0, ce sera, pour nous, dire que la proposition précédente est applicable à ce système.

Digitized by Google

Prenons dès lors un système en mouvement et considérons la modification élémentaire qu'il subit entre les instants t et $(t+dt)$. En vertu des égalités (5) et (3) et du principe précédent, nous pourrons écrire, pour cette modification :

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} d\left(\mathrm{A}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\alpha}{dt}}\right)=\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha^2}d\alpha+\ldots+\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\nu}d\nu+\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\alpha\,\partial\mathrm{T}}d\mathrm{T}+g_\alpha|d\alpha|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\left(\mathrm{L}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\lambda}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\lambda}{dt}}\right)=\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\alpha}d\alpha+\ldots+\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\nu}d\nu+\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial\lambda\,\partial\mathrm{T}}d\mathrm{T}+g_\lambda|d\lambda|, \end{array}\right.$$

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{M}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\mu}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\mu}{dt}}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{N}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\nu}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\nu}{dt}}=\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\nu}. \end{array}\right.$$

Dans les équations (47), on a

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} g_\alpha=g_\alpha\left[\alpha,\beta,\ldots,\nu,\left(\mathrm{A}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\alpha}{dt}}\right),\ldots,\left(\mathrm{N}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\nu}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\nu}{dt}}\right),\mathrm{T}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_\lambda=g_\lambda\left[\alpha,\beta,\ldots,\nu,\left(\mathrm{A}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\alpha}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\alpha}{dt}}\right),\ldots,\left(\mathrm{N}+\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\nu}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dfrac{d\nu}{dt}}\right),\mathrm{T}\right]. \end{array}\right.$$

Ce sont ces équations qu'il y a lieu de considérer si l'on veut étudier les modifications permanentes par une méthode dynamique ; si l'on veut, par exemple, des oscillations d'un fil déduire les lois de la torsion de ce fil, comme l'ont fait Coulomb (*) d'abord, MM. Berson et Bouasse (**) ensuite.

(*) Biot, *Traité de physique expérimentale*, t. I, pp. 482 et suivantes.

(**) Berson et Bouasse, *sur l'élasticité de torsion d'un fil oscillant.* (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 48. 1894.)

Digitized by Google

De la définition posée, on déduira sans peine que, pour un système en mouvement, qui est susceptible de déformations permanentes, mais qui n'admet pas de résistance passive, toute modification élémentaire vérifie l'égalité

$$(44). \quad \frac{dQ}{T} - d\Sigma = d\mathrm{P},$$

$d\mathrm{P}$ étant une quantité qui est égale à O si les paramètres α, β, ..., λ demeurent invariables durant la modification considérée, et positive dans tout autre cas.

En outre, pour un tel système, on a l'égalité générale :

$$(50). \quad \mathrm{E}dQ + d\mathfrak{T} = -\mathrm{E}dU + d\mathfrak{T}_e.$$

Ces égalités vont nous permettre de donner une condition suffisante, sinon nécessaire, pour la stabilité d'un état naturel.

§ 12. — *Critérium de stabilité d'un état naturel.*

Considérons un état naturel. Soient a, b, ..., n, ϑ, les valeurs des variables privilégiées en cet état naturel; soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{M}$ les valeurs des actions extérieures. Nous avons :

$$(27). \quad \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}, \ \mathfrak{B} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}, \ \ldots, \ \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial l}, \ \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial m}, \ \ldots, \ \mathfrak{N} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial n}.$$

Ces égalités peuvent se mettre sous une autre forme.

Considérons la fonction de α, β, ..., ν, T :

$$(51). \quad \Phi = \mathfrak{F} - \mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta - \ldots - \mathfrak{N}\nu,$$

où $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{N}$ sont regardées comme des constantes. A la température T, sous des actions extérieures égales à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{N}$, le système sera en état

Digitized by Google

naturel si les variables privilégiées α, β, ..., ν ont les valeurs a, b, ..., n définies par les équations

$$(52). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

A cette proposition, nous joindrons le théorème suivant :

Si l'état naturel considéré correspond à un minimum de la fonction Φ, *considérée comme fonction des seules variables* α, β, ..., ν, *cet état naturel sera un état stable pour le système maintenu à une température* PHYSIQUEMENT *constante et soumis à des actions extérieures* PHYSIQUEMENT *invariables.*

Expliquons d'abord d'une manière précise le sens qu'il convient d'attribuer à ce théorème.

Maintenir la température *physiquement* constante et égale à ϑ, c'est astreindre les oscillations inévitables de la température autour de la valeur ϑ à demeurer comprises entre deux limites T' et T'' suffisamment rapprochées, l'écart entre ces limites étant d'autant plus petit en valeur absolue que les moyens expérimentaux employés pour régler la température sont plus parfaits.

De même, maintenir les actions extérieures *physiquement* constantes et égales respectivement à $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{N}$, c'est astreindre les oscillations inévitables des actions extérieures autour des valeurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{N}$ à s'effectuer entre des limites respectives A' et A'', B' et B'', ..., N' et N'', suffisamment rapprochées, l'écart de ces limites étant d'autant plus petit que les moyens expérimentaux employés sont plus parfaits.

Aux valeurs absolues des écarts $(\alpha - a)$, $(\beta - b)$, ..., $(\nu - n)$ faisons correspondre les limites supérieures D_α, D_β, ..., D_ν.

Aux valeurs absolues de

$$\frac{d\alpha}{dt}, \ \frac{d\beta}{dt}, \ \ldots, \ \frac{d\nu}{dt},$$

faisons correspondre des limites supérieures v_α, v_β, ..., v_ν.

Digitized by Google

Suppposons que, quelque voisines de O que soient ces limites, il soit possible

1° De prendre assez petites les valeurs absolues initiales $|\alpha_0 - a|$, $|\beta_0 - b|$, ..., $|\nu_0 - n|$ des écarts $(\alpha - a)$, $(\beta - b)$, ..., $(\nu - n)$;

2° De prendre assez petites les valeurs absolues initiales

$$\left|\frac{d\alpha}{dt}\right|_0, \left|\frac{d\beta}{dt}\right|_0, \ldots, \left|\frac{d\nu}{dt}\right|_0$$

des vitesses

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\nu}{dt};$$

3° De prendre assez petites les valeurs absolues

$$|T'' - T'|, |A'' - A'|, B'' - B'| \ldots, |N'' - N'|;$$

pour que les valeurs absolues des quantités

$$(\alpha - a), (\beta - b), \ldots, (\nu - n), \quad \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\nu}{dt},$$

demeurent toujours inférieures à leurs limites respectives

$$D_\alpha, D_\beta, \ldots, D_\nu, v_\alpha, v_\beta, \ldots, v_\nu.$$

Nous dirons que l'état naturel $(a, b, \ldots, n, \vartheta)$ est un état *stable* du système.

Ces définitions posées, venons à la démonstration de notre théorème.

Les limites $D_\alpha, D_\beta, \ldots, D_\nu, v_\alpha, v_\beta, \ldots, v_\nu$ étant données, il est évidemment permis, pour la démonstration, de remplacer certaines d'entre elles par des limites plus petites ; moyennant cette remarque, on pourra toujours supposer ces limites choisies de telle sorte que la supposition suivante soit exacte :

Toutes les fois qu'une ou plusieurs des quantités

$$\alpha, \beta, \ldots, \nu, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\nu}{dt}$$

deviennent égales en valeur absolue à leurs limites respectives $D_\alpha, D_\beta, \ldots$,

Digitized by Google

D_ν, v_α, v_β, ..., v_ν, les autres étant inférieures en valeur absolue à leurs limites respectives, la quantité

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \vartheta) + \mathfrak{T}$$

surpasse la quantité

$$\Phi(a, b, \ldots, n, \vartheta),$$

d'une quantité positive qui admet une limite inférieure Δ différente de zéro :

(55). . . . . $\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \nu, \vartheta) + \mathfrak{T} - \Phi(a, b, \ldots, n, \vartheta) \geq \Delta.$

Cela posé, considérons la modification que le système éprouve de l'instant t_0 à l'instant t, et évaluons la transformation non compensée

$$\int' \left(\frac{dQ}{T} - d\Sigma \right),$$

forcément positive, qui correspond à cette modification.

En vertu de l'égalité (50), nous aurons :

$$E \int' \left(\frac{dQ}{T} - d\Sigma \right) = - \int' \frac{d(E(U - T\Sigma))}{T} - E \int' \Sigma \frac{dT}{T}$$
$$- \int' \frac{d\mathfrak{T}}{T} + \int' \frac{A d\alpha + B d\beta + \cdots + N d\nu}{T}.$$

Cette égalité se met aisément sous la forme suivante :

(54). . . . $\left\{ \begin{array}{l} E \int' \left(\frac{dQ}{T} - d\Sigma \right) = - \frac{1}{\vartheta} \left[\Phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, \vartheta) + \mathfrak{T}_1 \right] . . . . . \text{(I)} \\ \qquad + \frac{1}{\vartheta} \left[\Phi(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \nu_0, T_0) + \mathfrak{T}_0 \right] . . . . . \text{(II)} \\ - \frac{1}{\vartheta} \left[\Phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, T_1) - \Phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, \vartheta) \right] . . . . . \text{(III)} \\ + \int' \left(\frac{1}{\vartheta} - \frac{1}{T} \right) (dF + d\mathfrak{T}) . . . . . \text{(IV)} \\ + \int' \left[\left(\frac{A}{T} - \frac{\mathfrak{A}}{\vartheta} \right) d\alpha + \left(\frac{B}{T} - \frac{\mathfrak{B}}{\vartheta} \right) d\beta + \cdots + \left(\frac{N}{T} - \frac{\mathfrak{N}}{\vartheta} \right) d\nu \right] . . . . \text{(V)} \\ - E \int' \frac{\Sigma}{T} dT. . . . . \text{(VII)} \end{array} \right.$

Digitized by Google

Il est clair qu'en choisissant les écarts

$$(T'' - T'),\ (A'' - A'),\ (B'' - B'),\ \ldots,\ (N'' - N')$$

assez petits en valeur absolue, on peut donner à chacun des termes (III), (IV), (V), (VI) une valeur aussi petite que l'on voudra ; on peut choisir les valeurs initiales des écarts $(\alpha - a)$, $(\beta - b)$, ..., $(\nu - n)$ et la force vive initiale assez petites pour que

$$\frac{1}{\vartheta}\left[\Phi(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \nu_0, T_0) + \mathfrak{T}_0\right]$$

diffère aussi peu que l'on voudra, en valeur absolue, de

$$\frac{\Phi(a, b, \ldots, n, \vartheta)}{\vartheta}.$$

L'égalité (54) peut donc s'écrire :

$$(55). \quad E\int\left(\frac{dQ}{T} - d\Sigma\right) = \varepsilon + \frac{1}{\vartheta}\left[\Phi(a, b, \ldots, n, \vartheta) - \Phi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \nu_1, \vartheta) - \mathfrak{T}_1\right],$$

ε étant une quantité que l'on peut rendre aussi petite que l'on voudra en valeur absolue ; en particulier, on peut s'arranger de telle sorte que ε soit assurément inférieur en valeur absolue à $\frac{\Delta}{\vartheta}$, pourvu seulement qu'aucune des quantités

$$(\alpha_1 - a), \ldots, (\nu_1 - n), \frac{d\alpha_1}{dt}, \ldots, \frac{d\nu_1}{dt}$$

ne surpasse sa limite respective D_α, ..., D_ν, v_α, ..., v_ν.

Dans ces conditions, on est assuré qu'aucune de ces quantités n'atteindra jamais sa limite, car, en vertu de l'inégalité (53), si une ou plusieurs d'entre elles atteignaient leurs limites respectives, le second membre de l'égalité (55) serait négatif, tandis que le premier membre est forcément positif.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Ainsi, à la température ϑ, sous les actions extérieures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{N}$, le

Digitized by Google

système peut se trouver dans un état naturel $a, b, \ldots, n$, défini par les égalités (52). *Cet état est assurément stable si la forme quadratique :*

$$(56). \quad \ldots \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial a^2}\mathfrak{a}^2 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}\mathfrak{b}^2 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$$

est une forme définie positive, p, q *étant deux quelconques des quantités* a, b, ..., n.

En vertu de la définition de la fonction Φ, donnée par l'égalité (51), cette proposition peut encore s'énoncer de la manière suivante :

L'état considéré est assurément stable si la forme quadratique

$$(56^{bis}). \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\mathfrak{a}^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\mathfrak{b}^2 + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q}$$

est une forme définie positive.

Au lieu de considérer un état naturel, on peut considérer un état du système qui appartienne aux espaces $\mathcal{E}_\beta, \ldots, \mathcal{E}_\nu$, mais point à l'espace $\mathcal{E}_\alpha$, et lui appliquer des raisonnements analogues.

Étant données la température ϑ et les actions extérieures $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{N}$, on pourra obtenir un semblable état en prenant à volonté la valeur a de la variable α ; les valeurs $b, \ldots, n$, des autres variables $\beta, \ldots, \nu$ seront alors définies par les équations

$$(57). \quad \ldots \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b} = 0, \ldots, \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0.$$

Supposons que l'on fasse varier l'action A de manière que le paramètre α garde une valeur *physiquement* constante et égale à a, tandis que la température T et les actions extérieures B, ..., N, gardent des valeurs *physiquement* constantes. *L'état considéré sera stable si la forme quadratique*

$$(58). \quad \ldots \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial b^2}\mathfrak{b}^2 + \ldots + \frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum\frac{\partial^2\Phi}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q},$$

Digitized by Google

où p, q *sont deux quelconques des quantités* b, ..., n, *est une forme définie positive. Cette forme peut encore s'écrire*

$$(58^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 F}{\partial b^2}\mathfrak{b}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

En continuant de la sorte, nous arriverons à considérer les états appartenant à un seul des espaces $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$, — soit à l'espace $\mathcal{E}_\alpha$ —. Si l'on se donne la température ϑ et les actions extérieures $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{M}$, on obtient un tel état en choisissant à volonté les valeurs b, ... l des variables β, ..., λ et en déterminant ensuite les valeurs a, m, ..., n de α, μ, ..., ν par les égalités

$$(59) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Supposons que l'on maintienne *physiquement* constantes la température T et les actions extérieures A, M, ..., N, tandis que les actions extérieures B, ..., L varieront de manière à maintenir les paramètres β, ..., λ, physiquement constants et égaux à b, ..., l. Dans ces conditions, *l'état considéré sera stable si la forme quadratique*

$$(60). \quad \ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\mathfrak{a}^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2}\mathfrak{m}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q},$$

où p, q *sont deux quelconques des lettres* a, m, ..., n, *est une forme définie positive. Cette forme peut encore s'écrire*

$$(60^{bis}) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}\mathfrak{a}^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\mathfrak{m}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}\mathfrak{n}^2 + 2\sum \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$

Enfin, nous serons amenés à considérer un état d'équilibre quelconque du système. Si nous nous donnons la valeur ϑ de la température T et les valeurs $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{M}$ des actions extérieures, nous obtiendrons un tel état en choisissant à volonté les valeurs $a, b, \ldots, l$ des paramètres α, β, ..., λ et

Digitized by Google

en déterminant les valeurs $m, \ldots, n$ des paramètres $\mu, \ldots, \nu$, par les relations

$$(61). \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Supposons que l'on maintienne *physiquement* constantes la température T et les actions M, ..., N, tandis que les actions A, B, ..., L varieront de telle sorte que les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ gardent des valeurs *physiquement* constantes. *L'état considéré sera stable, si la forme quadratique*

$$(62). \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} \mathrm{m}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \mathrm{n}^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \, \partial q} \mathrm{pq},$$

où p, q *sont deux quelconques des lettres* m, ..., n, *est une forme définie positive. Cette forme peut aussi s'écrire*

$$(62^{bis}) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial m^2} \mathrm{m}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial n^2} \mathrm{n}^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial p \, \partial q} \mathrm{pq},$$

ou bien encore, en vertu de l'égalité (35) qui définit F,

$$(62^{ter}) \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial m^2} \mathrm{m}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial n^2} \mathrm{n}^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p \, \partial q} \mathrm{pq}.$$

On remarquera que si l'hypothèse énoncée au n° 4 est vérifiée, la forme quadratique (62^{ter}) est certainement une forme définie positive, en sorte que tout état d'équilibre du système est stable si l'on suppose les paramètres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ maintenus physiquement constants.

§ 13. — *Loi du déplacement isothermique de l'état naturel.*

Considérons un état naturel $a, b, \ldots n, \vartheta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{N}$, et supposons que la forme quadratique (56) soit une forme définie positive ; l'état en question sera un état stable.

Imaginons que l'on maintienne constante la température ϑ et que l'on

Digitized by Google

fasse varier les actions extérieures de $d\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{B}$, ..., $d\mathfrak{N}$. Les valeurs de α, β, ..., ν qui correspondent à l'état naturel varient de da, db, ..., dn.

Les égalités (27), différentiées, nous donnent les égalités

$$d\mathfrak{A} = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b} db + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial n} dn,$$

$$d\mathfrak{B} = \frac{\partial^2 F}{\partial b\, \partial a} da + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} db + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial b\, \partial n} dn,$$

. . . . . .

$$d\mathfrak{N} = \frac{\partial^2 F}{\partial n\, \partial a} da + \frac{\partial^2 F}{\partial n\, \partial b} db + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} dn.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité par da, les deux membres de la seconde par db, ..., les deux membres de la dernière par dn, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous aurons :

$$d\mathfrak{A}\, da + d\mathfrak{B}\, db + \cdots + d\mathfrak{N}\, dn$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} da^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} db^2 + \cdots + \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} dn^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q} dp\, dq.$$

Si l'on se souvient que la forme quadratique (66) est une forme définie positive, on voit que l'on a

$$(65). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\mathfrak{A}\, da + d\mathfrak{B}\, db + \cdots + d\mathfrak{N}\, dn > 0.$$

Cette inégalité constitue la loi du déplacement isothermique de l'état naturel. On voit que *l'on doit restreindre cette loi aux états naturels stables.*

On voit que l'on peut énoncer une loi semblable, non plus pour un état naturel, mais pour un état qui appartient à la fois aux espaces $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$ sans appartenir à l'espace $\mathcal{E}_\alpha$. Seulement, en passant de l'un de ces états à un état infiniment voisin, on aura soin de maintenir constants non seulement la température, mais encore le paramètre α.

En poursuivant la démonstration de théorèmes du même genre, on

Digitized by Google

arrivera à établir une inégalité semblable à l'inégalité (64) pour le déplacement d'un état stable appartenant au seul espace $\mathcal{E}_x$; seulement, en passant d'un tel état à un autre tel état infiniment voisin, on devra garder des valeurs constantes non seulement à la température, mais encore aux paramètres $\beta, \ldots, \lambda$.

§ 14. — *Loi du déplacement de l'état naturel par variation de température.*

Considérons encore un état naturel $a, b, \ldots, n, \vartheta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{N}$, pour lequel la forme quadratique (56) soit une forme définie positive, c'est-à-dire un état naturel stable ; *on considère une modification pseudo-réversible décrite en l'espace des états naturels et soumise aux conditions suivantes :*

1° *La température* ϑ *varie de* $d\vartheta$;

2° *Certains des paramètres* a, b, ..., n *gardent des valeurs invariables ;*

3° *Les actions extérieures relatives aux paramètres qui varient, gardent des valeurs invariables.*

Dans ces conditions, on a

$$(64). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{R}_a da + \mathrm{R}_b db + \cdots + \mathrm{R}_n dn)\, d\vartheta > 0,$$

$\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b, \ldots, \mathrm{R}_n$ *étant les valeurs que prennent, en l'état naturel considéré, les quantités* $\mathrm{R}_\alpha, \mathrm{R}_\beta, \ldots, \mathrm{R}_\lambda$ *que définissent les égalités* (11).

Supposons, pour fixer les idées, que le paramètre a soit un des paramètres qui varient. L'action $\mathfrak{A}$ demeurera alors constante.

La première des égalités (27), différentiée, donnera :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\, \partial b} db + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\, \partial n} dn + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\, \partial \vartheta} d\vartheta = 0.$$

De cette égalité et d'autres égalités analogues, on déduira sans peine la nouvelle égalité :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\, \partial \vartheta} da + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\, \partial \vartheta} db + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial n\, \partial \vartheta} dn\right) d\vartheta$$

$$+ \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} da^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} db^2 + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial n^2} dn^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial p\, \partial q} dp\, dq = 0.$$

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 3

§ I. — Modifications réalisables, réversibles et irréversibles. Modifications purement virtuelles. 5

§ II. — Hypothèse fondamentale sur laquelle repose la théorie des modifications permanentes 7

§ III. — Des variables privilégiées 11

§ IV. — Loi du déplacement isothermique de l'équilibre 12

§ V. — Loi du déplacement de l'équilibre par variation de température . . 14

§ VI. — Représentation d'une transformation. Cycles fermés 18

§ VII. — Espace des états naturels 21

§ VIII. — Des modifications pseudo-réversibles 27

§ IX. — Entropie apparente et potentiel thermodynamique apparent . . . 30

§ X. — Inégalité de Clausius 38

§ XI. — Mouvement d'un système qui admet des déformations permanentes . 42

§ XII. — Critérium de stabilité d'un état naturel 44

§ XIII. — Loi du déplacement isothermique de l'état naturel. 51

§ XIV. — Loi du déplacement de l'état naturel par variation de température. . 53

CONCLUSION 54

ERRATA. — § 8 (p. 27), § 9 (p. 30), § 10 (p. 38), remplacer les symboles E_α, E_β, ..., E_λ par les symboles $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_\beta$, ..., $\mathcal{E}_\lambda$.

Digitized by Google

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE

SECONDE ESPÈCE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES, DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 2 février 1895.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE

SECONDE ESPÈCE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

INTRODUCTION.

1. Bien des géomètres, et non des moins illustres, ont étudié les séries hypergéométriques, introduites en analyse par l'immortel Gauss.

La notation $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, employée par ce géomètre, nous servira à désigner les séries générales

$$(1). \quad \left\{ \begin{array}{c} F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m; \rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}; x) = \\ 1 + \dfrac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}{1 \cdot \rho_1 \rho_2 \dots \rho_{n-1}} x + \dfrac{\alpha_1(\alpha_1+1)\dots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \rho_1(\rho_1+1)\dots\rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)} x^2 + \dots \end{array} \right.$$

Dans ces séries, les constantes se partagent en deux groupes : $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ sont les constantes du numérateur; $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}$, les constantes du dénominateur. Si m est égal à n ou lui est inférieur d'une unité, les séries hypergéométriques seront appelées de première espèce; si m est inférieur à $n-1$, les séries seront dites de seconde espèce. Les séries hypergéométriques de première espèce ont été étudiées récemment par un grand nombre de géomètres, parmi lesquels je citerai MM. Goursat, Thomae et Pochhammer (*).

(*) GOURSAT, *Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, série 2, t. XII).

ID., *Sur une classe d'intégrales doubles* (ACTA MATHEMATICA, t. V, 1884).

Digitized by Google

Les séries hypergéométriques de seconde espèce ont fait l'objet de plusieurs mémoires, dus à M. Pochhammer.

Si le groupe des constantes du numérateur fait défaut, nous désignerons, avec cet éminent géomètre, par $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}; x)$, la série

$$(2). \quad . \quad . \quad 1 + \frac{x}{1 \cdot \rho_1\rho_2 \dots \rho_{n-1}} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \rho_1(\rho_1+1)\,\rho_2(\rho_2+1) \dots \rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)} + \dots$$

Les séries (1) et (2) satisfont respectivement à une équation différentielle linéaire d'ordre n (*). Ces équations ont la forme

$$(3). \quad . \begin{cases} x^{n-1}\dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + L_i x^{n-i-1}\dfrac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \dots + L_{n-1}\dfrac{dy}{dx} \\ = x^m\dfrac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots + K_i x^{m-i}\dfrac{d^{m-i}y}{dx^{m-i}} + \dots + K_{m-1}x\dfrac{dy}{dx} + K_m y, \end{cases}$$

$$(4). \quad . \quad . \quad x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L'_1 x^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + L'_i x^{n-i-1}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \dots + L'_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Thomae, *Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen, insbesonders ueber die Reihe*

$$1 + \frac{a_0a_1a_2}{1 \cdot b_1b_2}x + \frac{a_0(a_0+1)\,a_1(a_1+1)\,a_2(a_2+1)}{1 \cdot 2 \cdot b_1(b_1+1)\,b_2(b_2+1)}x^2 + \dots$$

(Mathematische Annalen, t. II, 1870).

Id., *Ueber die Functionen, welche durch Reihen von der Form*

$$1 + \frac{pp'p''}{1 \cdot q'q''} + \frac{p}{1}\frac{p+1}{2}\frac{p'}{q'}\frac{p'+1}{q'+1}\frac{p''}{q''}\frac{p''+1}{q''+1} + \dots$$

dargestallt werden (Journal de Crelle, t. LXXXVII, 1879).

Pochhammer, *Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punckten* (Journal de Crelle, t. CII, 1888).

Id., *Ueber eine lineare Differentialgleichung n^ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punckte* (Journal de Crelle, t. CVIII, 1891).

Id., *Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten* (Mathematische Annalen, t. XXXVI, p. 84).

(*) Pochhammer, *Ueber Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe* (Mathematische Annalen, t. XXXVIII, 1891).

Id., *Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe* $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}; x)$ (Journal de Crelle, t. CX, 1892).

Digitized by Google

Les coefficients L_i, K_i, L'_i dépendent, les premiers, des constantes α et ρ, les seconds, des constantes ρ.

Pour opérer la réduction de ces équations, M. Pochhammer (*) emploie les transformations

$$(5). \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha} T dt,$$

$$(6). \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} t^{\rho} T dt,$$

dans lesquelles g et h sont des constantes et T une fonction de t seulement.

Ce géomètre montre ensuite que les équations (3) et (4) sont réductibles, la première, par les deux substitutions, la seconde, par la transformation (6), à deux équations différentielles exactement semblables aux proposées, mais d'ordre $n-1$. L'emploi répété de cette méthode conduit à une équation différentielle du deuxième ordre, dont les solutions principales sont représentées par des intégrales définies simples (**). Ainsi les solutions principales des équations (3) et (4) sont exprimables par des intégrales définies $(n-1)^{\text{uples}}$.

Sans avoir eu connaissance de ces divers travaux, j'avais opéré la réduction des équations (3) et (4), à la manière du savant géomètre de Kiel. Mais une étude approfondie de cette question nous a montré que cette réduction peut se faire par un procédé plus direct et plus élégant. Il a de plus l'avantage d'établir la liaison étroite qui existe entre les fonctions hypergéométriques de première et de seconde espèce (***).

(*) POCHHAMMER, *Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe* (JOURNAL DE CRELLE, t. CXII, 1893).

(**) ID., *Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten* (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XXXVI).

ID., *Ueber die Differentialgleichungen der Reihen* $\mathcal{F}(\rho, \sigma; x)$ *und* $\mathcal{F}(\rho, \sigma, \tau; x)$ (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XLI, 1893).

(***) Des modifications ont été introduites dans le mémoire depuis la date de sa présentation à l'Académie. La rédaction actuelle, remise au premier commissaire le 30 octobre 1894, comprend plusieurs changements aux §§ 15, 19, 20, 23, 25, 26. Toutefois les formules du § 15 n'ont pas été modifiées.

Digitized by Google

CHAPITRE PREMIER.

2. Nous nous proposons de prouver que l'intégrale définie

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots y = \int_g^h e^{(n-m)(ux)^{\frac{1}{n-m}}} u^{-\frac{n}{n-m}} V du,$$

dans laquelle g et h sont des constantes, est une solution particulière de l'équation différentielle (3), si V, qui est une fonction de u, satisfait à une équation hypergéométrique d'ordre $n - 1$, de la forme :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^{n-2}(u-1)\dfrac{d^{n-1}V}{du^{n-1}} + u^{n-3}(a_1 u - b_1)\dfrac{d^{n-2}V}{du^{n-2}} + \cdots + u^{n-i-1}(a_{i-1}u - b_{i-1})\dfrac{d^{n-i}V}{du^{n-i}} + \cdots \\ \qquad + (a_{n-2}u - b_{n-2})\dfrac{dV}{du} + a_{n-1}V = 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2, ... sont des constantes, et l'on sait que les fonctions hypergéométriques de première espèce satisfont précisément à des équations différentielles de cette forme.

Pour faciliter la démonstration de notre proposition, nous scinderons la transformation.

Posons

$$y = \int_g^h RV du,$$

où

$$R = e^{(n-m)u(x)^{\frac{1}{n-m}}}.$$

Si, le long du chemin d'intégration, les dérivées de R, par rapport à x, restent finies, on a par des différentiations successives :

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1+\frac{1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-2+\frac{2}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^2\,du + a_{1,2}x^{-2+\frac{1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

. . . . . .

$$\frac{d^iy}{dx^i} = x^{-i+\frac{i}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^i\,du + a_{1,i}x^{-i+\frac{i-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^{i-1}\,du + \cdots + a_{i-1,i}x^{-i+\frac{1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^n\,du + a_{1,n}x^{-n+\frac{n-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^{n-1}\,du + \cdots + a_{n-1,n}x^{-n+\frac{1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du.$$

Substituons ces diverses valeurs dans l'équation (3), après l'avoir multiplié par $x^{1-\frac{1}{n-m}}$; et ordonnons suivant les puissances décroissantes de $x^{\frac{1}{n-m}}$:

$$x^{\frac{n-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^n\,du + \cdots + \mathrm{P}_i x^{\frac{n-i-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^{n-i}\,du + \cdots \quad + \mathrm{P}_{n-1} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du =$$

$$x^{\frac{n-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^m\,du + \cdots + \mathrm{Q}_i x^{\frac{n-i-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}u^{m-i}\,du + \cdots + \mathrm{Q}_m x^{\frac{n-m-1}{n-m}} \int_g^h \mathrm{RV}\,du.$$

Intégrons par parties et choisissons les limites g et h, de telle sorte que la partie intégrée M, dont chaque terme contient ce facteur R, s'évanouisse, c'est-à-dire qu'on ait

$$(9). \quad \ldots \ldots \ldots \quad [\mathrm{M}]_{u=h} - [\mathrm{M}]_{u=g} = 0,$$

nous aurons

$$\frac{d^{n-1}[u^m(u^{n-m}-1)\mathrm{V}]}{du^{n-1}} + \frac{d^{n-2}[u^{m-1}(\mathrm{P}'_1u^{n-m}-\mathrm{Q}'_1)\mathrm{V}]}{du^{n-2}} + \cdots + \frac{d^{n-i-1}[u^{m-i}(\mathrm{P}'_iu^{n-m}-\mathrm{Q}'_i)\mathrm{V}]}{du^{n-i-1}} + \cdots$$

$$+ \frac{d^{n-m-1}[(\mathrm{P}'_mu^{n-m}\mathrm{Q}'_m)\mathrm{V}]}{du^{n-m-1}} + \frac{d^{n-m-2}(\mathrm{P}'_{m+1}u^{n-m-1}\mathrm{V})}{du^{n-m-2}} + \cdots + \mathrm{P}'_{n-1}u\mathrm{V} = 0;$$

ou

$$(10)\left\{\begin{array}{l} u^m(u^{n-m}-1)\dfrac{d^{n-1}\mathrm{V}}{du^{n-1}} + u^{m-1}(\mathrm{R}_1u^{n-m}-\mathrm{S}_1)\dfrac{d^{n-2}\mathrm{V}}{du^{n-2}} + \cdots + (\mathrm{R}_mu^{n-m}-\mathrm{S}_m)\dfrac{d^{n-m-1}\mathrm{V}}{du^{n-m-1}} \\ + \mathrm{R}_{m+1}u^{n-m-1}\dfrac{d^{n-m-2}\mathrm{V}}{du^{n-m-2}} + \cdots + \mathrm{R}_{m+i}u^{n-m-i}\dfrac{d^{n-m-i-1}\mathrm{V}}{du^{n-m-i-1}} + \cdots + \mathrm{R}_{n-1}u\mathrm{V} = 0. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Soit maintenant

$$\varphi = u^{n-m};$$

on a

$$\frac{dV}{du} = a_{1,1}\varphi^{1-\frac{1}{n-m}}\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2V}{d^2u} = a_{2,1}\varphi^{1-\frac{2}{n-m}}\frac{dV}{d\varphi} + a_{2,2}\varphi^{2-\frac{2}{n-m}}\frac{d^2V}{d\varphi^2},$$

. . . . . .

$$\frac{d^iV}{du^i} = a_{i,1}\varphi^{1-\frac{i}{n-m}}\frac{dV}{d\varphi} + a_{i,2}\varphi^{2-\frac{i}{n-m}}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \cdots + a_{i,i}\varphi^{i-\frac{i}{n-m}}\frac{d^iV}{d\varphi^i},$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n-m}V}{du^{n-m}} = a_{n-m,1}\frac{dV}{d\varphi} + a_{n-m,2}\varphi\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \cdots + a_{n-m,n-m}\varphi^{n-m-1}\frac{d^{n-m}V}{d\varphi^{n-m}},$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n-m+i}V}{du^{n-m+i}} = a_{n-m+i,1}\varphi^{1-\frac{i}{n-m}}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + a_{n-m+i,2}\varphi^{2-\frac{i}{n-m}}\frac{d^3V}{d\varphi^3} + \cdots + a_{n-m+i,n-m+i}\varphi^{n-m+i-1-\frac{i}{n-m}}\frac{d^{n-m+i}V}{d\varphi^{n-m+i}},$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n-1}V}{du^{n-1}} = a_{n-1,1}\varphi^{1-\frac{n-1}{n-m}}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + a_{n-1,2}\varphi^{2-\frac{n-1}{n-m}}\frac{d^3V}{d\varphi^3} + \cdots + a_{n-1,n-1}\varphi^{n-1-\frac{n-1}{n-m}}\frac{d^{n-1}V}{d\varphi^{n-1}}.$$

La substitution de ces diverses valeurs transformera l'équation (10) en la suivante

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi^{n-2}(\varphi-1)\dfrac{d^{n-1}V}{d\varphi^{n-1}} + \varphi^{n-3}(a_1\varphi - b_1)\dfrac{d^{n-2}V}{d\varphi^{n-2}} + \cdots + \varphi^{n-i}(a_{i-2}\varphi - b_{i-2})\dfrac{d^{n-i+1}V}{d\varphi^{n-i+1}} + \cdots \\ \qquad + (a_{n-2}\varphi - b_{n-2})\dfrac{dV}{d\varphi} + a_{n-1}V = 0. \end{array}\right.$$

De cette analyse, on conclut que l'intégrale définie

$$y = \int_g^h e^{(n-m)(\varphi x)^{\frac{1}{n-m}}}\varphi^{-\frac{n-m-1}{n-m}}V d\varphi$$

est une solution particulière de l'équation (3), si V satisfait à l'équation (11) et que les constantes g et h soient choisies de telle sorte que la relation (9) soit vérifiée identiquement.

Digitized by Google

La détermination directe des constantes a_1, b_1, a_2, b_2, ... exigerait des calculs pénibles; mais l'application de ce procédé à quelques exemples particuliers conduit, très simplement et par voie d'induction, à la loi de formation de ces coefficients.

3. Remarque. — Si k est le quotient entier de la division de $(n-1)$ par $(n-m)$, le coefficient différentiel

$$\frac{d^{k(n-m)+1}V}{du^{k(n-m)+1}}$$

ne contient pas les dérivées

$$\frac{dV}{d\varphi}, \quad \frac{d^2V}{d\varphi^2}, \quad \cdots \quad \frac{d^kV}{d\varphi^k};$$

mais cette circonstance n'altère en rien le résultat de notre analyse.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES FONCTIONS $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{n-1}; x)$.

4. Dans ce mémoire, nous ne nous occuperons que des fonctions $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{n-1}; x)$, nous réservant d'aborder prochainement l'étude des fonctions plus générales $F(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m; \rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{n-1}; x)$.

Si la série $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{n-1}; x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle (4), les coefficients L_1', L_2'... s'expriment linéairement au moyen de certaines fonctions symétriques des constantes $\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_{n-1}$. On sait en outre que, dans le domaine du point singulier $x = 0$, les $n-1$ solutions multiformes de cette équation sont représentées par les séries

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_1-\rho_1+1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x^{1-\rho_{n-1}}\mathcal{F}(2-\rho_{n-1}, \rho_1-\rho_{n-1}+1, \rho_2-\rho_{n-1}+1, \ldots \rho_{n-2}-\rho_{n-1}+1; x), \end{array} \right.$$

Digitized by Google

sous la condition cependant que les nombres ρ_i, $\rho_i - \rho_k$, ne soient ni nuls, ni égaux à un nombre entier, positif ou négatif. Cette hypothèse exclut l'existence d'intégrales logarithmiques, dans le domaine de ce point singulier.

Dans le cours de nos calculs, nous emploierons les abréviations suivantes :

$$[\rho]_\nu^+ = \rho(\rho+1)\dots(\rho+\nu-1),$$
$$[\rho]_0^+ = 1, \quad [1]_\nu^+ = 1.2.3\dots\nu.$$

Ainsi

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}; x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{x^\nu}{[1]_\nu^+ [\rho_1]_\nu^+ \dots [\rho_{n-1}]_\nu^+}.$$

Nous désignerons encore par $P^{(i)}_{\rho_{n-1}}$ la somme des produits que l'on obtient en prenant i à i de toutes les manières possibles, les $n-1$ facteurs $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}$.

Pour effectuer la réduction de l'équation (4), nous nous servirons de la transformation

$$y = \int_g^h e^{u\sqrt[n]{x}} u^{-\frac{n-1}{n}} V du.$$

Nous en ferons l'application à quelques exemples particuliers.

5. Application. — Soit

$$(13). \quad \dots \quad x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\rho_1 + \rho_2 + 1) x \frac{d^2y}{dx^2} + \rho_1\rho_2 \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Posons

$$y = \int_g^h RV du,$$

où nous faisons

$$R = e^{3u\sqrt[3]{x}}.$$

Par des différentiations successives, on a

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}} \int_g^h RuV du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-\frac{4}{3}} \int_g^h Ru^2 V du - \frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \int_g^h RuV du,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^{-\frac{6}{3}} \int_g^h Ru^3 V du - 2x^{-\frac{7}{3}} \int_g^h Ru^2 V du + \frac{10}{9} x^{-\frac{8}{3}} \int_g^h RuV du.$$

Digitized by Google

Par substitution de ces valeurs, l'équation (13) devient

$$(14)\quad x^{\frac{2}{3}}\int_g^h e^{3u\sqrt[3]{x}}(u^3-1)V\,du+x^{\frac{1}{3}}(\rho_1+\rho_2-1)\int_g^h e^{3u\sqrt[3]{x}}u^3V\,du+\left(\frac{2}{3}-\rho_1\right)\left(\frac{2}{3}-\rho_2\right)\int_g^h e^{3u\sqrt[3]{x}}uV\,du=0;$$

puis, en intégrant par parties et choisissant les constantes g et h telles que

$$[M]_{u=g}^{u=h}=\left[\frac{x^{\frac{1}{3}}}{3}e^{3ux^{\frac{1}{3}}}(u^3-1)V-\frac{1}{3^2}e^{3ux^{\frac{1}{3}}}\frac{d[(u^3-1)V]}{du}+\frac{\rho_1+\rho_2-1}{3}e^{3ux^{\frac{1}{3}}}u^2V\right]_{u=g}^{u=h}=0,$$

on aura

$$(u^3-1)\frac{d^2V}{d\varphi^2}+3(3-\rho_1-\rho_2)u^2\frac{dV}{d\varphi}+(4-3\rho_1)(4-3\rho_2)uV=0.$$

Soit maintenant

$$u^3=\varphi;$$

d'où

$$\frac{dV}{du}=3\varphi^{\frac{2}{3}}\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2V}{du^2}=6\varphi^{\frac{1}{3}}\frac{dV}{d\varphi}+3^2\varphi^{\frac{4}{3}}\frac{d^2V}{d\varphi^2}.$$

En conséquence,

$$(15)\qquad \varphi(\varphi-1)\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\left[\left(\frac{11}{3}-\rho_1-\rho_2\right)\varphi-\frac{2}{3}\right]\frac{dV}{d\varphi}+\left(\frac{4}{3}-\rho_1\right)\left(\frac{4}{3}-\rho_2\right)V=0.$$

C'est l'équation de Gauss et les constantes sont $\frac{4}{3}-\rho_1, \frac{4}{3}-\rho_2, \frac{2}{3}$.

6. Remarque. — Si les constantes de ρ_1 et ρ_2 satisfont aux conditions

$$\rho_1=\frac{1}{3},\quad \rho_2=\frac{2}{3},$$

l'équation (14) devient

$$x^{\frac{2}{3}}\int_g^h e^{3u\sqrt[3]{x}}(u^3-1)V\,du=0,$$

ou

$$u^3-1=0.$$

Digitized by Google

Si u est une racine cubique de l'unité, $e^{3u\sqrt[3]{x}}$ est une intégrale particulière de l'équation

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{9}\frac{dy}{dx}-y=0\ (^*).$$

7. Deuxième application. — Soit

$$(16).\quad\ldots\ldots\quad x^3\frac{d^4y}{dx^4}+A_1x^2\frac{d^3y}{dx^3}+A_2x\frac{d^2y}{dx^2}+A_3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

où

$$A_1=3+\rho_1+\rho_2+\rho_3=3+P^{(1)}_{\rho_3},$$
$$A_2=1+\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=1+P^{(1)}_{\rho_3}+P^{(2)}_{\rho_3},$$
$$A_3=\rho_1\rho_2\rho_3=P^{(3)}_{\rho_3}.$$

Posons

$$y=\int_g^h e^{4ux^{\frac{1}{4}}}V\,du=\int_g^h RV\,du.$$

Par suite,

$$\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{3}{4}}\int_g^h RVu\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x^{-\frac{6}{4}}\int_g^h RVu^2du-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}\int_g^h RVu\,du,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=x^{-\frac{9}{4}}\int_g^h RVu^3du-\frac{9}{4}x^{-\frac{10}{4}}\int_g^h RVu^2du+\frac{21}{4^2}x^{-\frac{11}{4}}\int_g^h RVu\,du,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=x^{-\frac{12}{4}}\int_g^h RVu^4du-\frac{18}{4}x^{-\frac{13}{4}}\int_g^h RVu^3du+\frac{111}{4^2}\int_g^h RVu^2du-\frac{3\ 7.11}{4^3}x^{-\frac{15}{4}}\int_g^h RVu\,du.$$

(*) C. Le Paige, *Note sur certaines équations différentielles.* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, année 1875-1876.)

Digitized by Google

Multiplions l'équation (16) par $x^{\frac{3}{4}}$ et ordonnons suivant les puissances descendantes de $x^{\frac{1}{4}}$:

$$x^{\frac{3}{4}}\int_g^h R(u^4-1)V\,du+x^{\frac{2}{4}}\left(\rho_1+\rho_2+\rho_3-\frac{3}{2}\right)\int_g^h RVu^2du$$
$$+x^{\frac{1}{4}}\left[\frac{111}{4^2}-\frac{9}{4}(3+\rho_1+\rho_2+\rho_3)+1+\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3\right]\int_g^h RVu^3du$$
$$+\left[-\frac{3.7.11}{4^3}+\frac{37}{4^2}(3+\rho_1+\rho_2+\rho_3)-\frac{3}{4}(1+\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)+\rho_1\rho_2\rho_3\right]\int_g^h RVudu=0.$$

Disposant ensuite des limites de manière que la partie intégrée disparaisse, on tire de cette équation la suivante :

$$(17)\quad\left\{\begin{array}{l}(u^4-1)\dfrac{d^3V}{du^3}+(18-4\rho_1-4\rho_2-4\rho_3)u^3\dfrac{d^2V}{du^2}\\ +\left[91-44(\rho_1+\rho_2+\rho_3)+16(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)\right]u^2\dfrac{dV}{du}\\ +(5-4\rho_1)(5-4\rho_2)(5-4\rho_3)uV=0.\end{array}\right.$$

Par la substitution

$$\varphi=u^4,$$

on a finalement :

$$(18)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi^2(\varphi-1)\dfrac{d^3V}{d\varphi^3}+\varphi\left[\left(\dfrac{27}{4}-\rho_1-\rho_2-\rho_3\right)\varphi-\dfrac{9}{4}\right]\dfrac{d^2V}{d\varphi^2}\\ +\left[\varphi\left\{\dfrac{151}{4^2}-\dfrac{14}{4}(\rho_1+\rho_2+\rho_3)+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3\right\}-\dfrac{3}{8}\right]\dfrac{dV}{d\varphi}\\ +\left(\dfrac{5}{4}-\rho_1\right)\left(\dfrac{5}{4}-\rho_2\right)\left(\dfrac{5}{4}-\rho_3\right)V=0,\end{array}\right.$$

équation hypergéométrique, à laquelle satisfait la fonction

$$F\left(\frac{5}{4}-\rho_1,\ \frac{5}{4}-\rho_2,\ \frac{5}{4}-\rho_3;\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4};\ \varphi\right).$$

8. Remarque. — Si

$$\rho_1=\frac{1}{4},\quad \rho_2=\frac{2}{4},\quad \rho_3=\frac{3}{4},$$

Digitized by Google

$e^{4ux^{\frac{1}{4}}}$ est une intégrale particulière de l'équation (16), u étant une des racines quatrièmes de l'unité.

9. TROISIÈME APPLICATION. — Soit enfin l'équation

$$(19). \quad \ldots \quad x^4\frac{d^5y}{dx^5} + A_1x^3\frac{d^4y}{dx^4} + A_2x^2\frac{d^3y}{dx^3} + A_3x\frac{d^2y}{dx^2} + A_4\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= 6 + P^{(1)}_{\rho_4}, \\ A_2 &= 7 + 3P^{(1)}_{\rho_4} + P^{(2)}_{\rho_4}, \\ A_3 &= 1 + P^{(1)}_{\rho_4} + P^{(2)}_{\rho_4} + P^{(3)}_{\rho_4}, \\ A_4 &= P^{(4)}_{\rho_4}. \end{aligned}$$

Par la substitution

$$y = \int_{\gamma}^{\lambda} e^{5ux^{\frac{1}{5}}} V du,$$

l'équation (19) devient :

$$\begin{aligned} &(u^5 - 1)\frac{d^4V}{du^4} + 5\left(6 - P^{(1)}_{\rho_4}\right)u^4\frac{d^3V}{du^3} + 5\left(59 - 21P^{(1)}_{\rho_4} + 5P^{(2)}_{\rho_4}\right)u^3\frac{d^2V}{du^2} \\ &+ 5\left[221 - 5.127P^{(1)}_{\rho_4} + 5.15P^{(2)}_{\rho_4} - 5^2P^{(3)}_{\rho_4}\right]u^2\frac{dV}{du} \\ &+ (6 - 5\rho_1)(6 - 5\rho_2)(6 - 5\rho_3)(6 - 5\rho_4)uV = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en faisant

$$\varphi = u^5 :$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi^3(\varphi - 1)\frac{d^4V}{d\varphi^4} + \varphi^2\left[\left(\frac{54}{5} - P^{(1)}_{\rho_4}\right)\varphi - \frac{24}{5}\right]\frac{d^3V}{d\varphi^3} + \varphi\left[\left(\frac{751}{5^2} - \frac{33}{5}P^{(1)}_{\rho_4} + P^{(2)}_{\rho_4}\right)\varphi - \frac{96}{5^2}\right]\frac{d^2V}{d\varphi^2} \\ &+ \left[\varphi\left(\frac{2669}{5^3} - \frac{223}{5^2}P^{(1)}_{\rho_4} + \frac{17}{5}P^{(2)}_{\rho_4} - P^{(3)}_{\rho_4}\right) - \frac{24}{5^3}\right]\frac{dV}{d\varphi} + \left(\frac{6}{5} - \rho_1\right)\left(\frac{6}{5} - \rho_2\right)\left(\frac{6}{5} - \rho_3\right)\left(\frac{6}{5} - \rho_4\right)V = 0. \end{aligned} \right.$$

Ici, les constantes du numérateur sont :

$$\frac{6}{5} - \rho_1, \quad \frac{6}{5} - \rho_2, \quad \frac{6}{5} - \rho_3, \quad \frac{6}{5} - \rho_4;$$

Digitized by Google

et celles du dénominateur :

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{4}{5}.$$

La loi de formation est évidente. Si l'équation proposée est du n^{me} ordre, pour la fonction hypergéométrique de première espèce, qui satisfera à l'équation auxiliaire d'ordre $n-1$, les constantes du numérateur et celles du dénominateur seront respectivement

$$\frac{n+1}{n} - \rho_1, \quad \frac{n+1}{n} - \rho_2, \ \ldots \ \frac{n+1}{n} - \rho_{n-1},$$

$$\frac{2}{n}, \quad \frac{3}{n}, \quad \ldots \frac{n-1}{n}.$$

10. Remarque. — Si u est une racine cinquième de l'unité, on vérifie aisément que $e^{5ux^{\frac{1}{5}}}$ est une intégrale particulière de l'équation (19), à la condition que les constantes $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ satisfassent aux conditions

$$\rho_1 = \frac{1}{5}, \quad \rho_2 = \frac{2}{5}, \quad \rho_3 = \frac{3}{5}, \quad \rho_4 = \frac{4}{5}.$$

Par le procédé employé par mon ancien et savant professeur de l'Université de Liége, M. C. Le Paige (*), on prouverait que l'équation du n^{me} ordre est intégrable, si les constantes $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}$ vérifient les relations

$$(21). \quad \ldots \quad \rho_1 = \frac{1}{n} \pm m, \quad \rho_2 = \frac{2}{n} \pm m, \ \ldots \ \rho_{n-1} = \frac{n-1}{n} \pm m,$$

m étant un nombre entier.

11. Admettons maintenant que h est une variable ; le coefficient différentiel du premier ordre de la fonction

$$y = \int_g^h e^{n\sqrt[n]{ux}}\, u^{-\frac{n-1}{n}}\, \mathrm{V}\, du$$

aura pour valeur

$$x^{\frac{n-1}{n}} \int_g^h e^{n\sqrt[n]{ux}}\, u^{-\frac{n-2}{n}}\, \mathrm{V}\, du + \left[e^{n\sqrt[n]{ux}}\, u^{-\frac{n-1}{n}}\, \mathrm{V} \right]_{u=h} \frac{dh}{dx}.$$

(*) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XLI, p. 1017.

Digitized by Google

Si h est égal à $\frac{\omega}{x}$, ω étant une quantité positive indéfiniment croissante, les dérivées successives de cette fonction conserveront la même forme que dans le cas où les limites g et h étaient constantes, à la condition que l'on choisisse pour $\sqrt[n]{\omega}$ une quelconque des n déterminations, dont la partie réelle est négative. La même conclusion subsiste pour g. On peut donc supposer

$$h = g = \frac{\omega}{x}.$$

De plus, la fonction M, dont chacun des termes contient le facteur $e^{n\sqrt[n]{ux}}$, s'évanouira identiquement aux limites, si l'on remplace V par une des solutions de l'équation hypergéométrique d'ordre $n-1$, dans le domaine

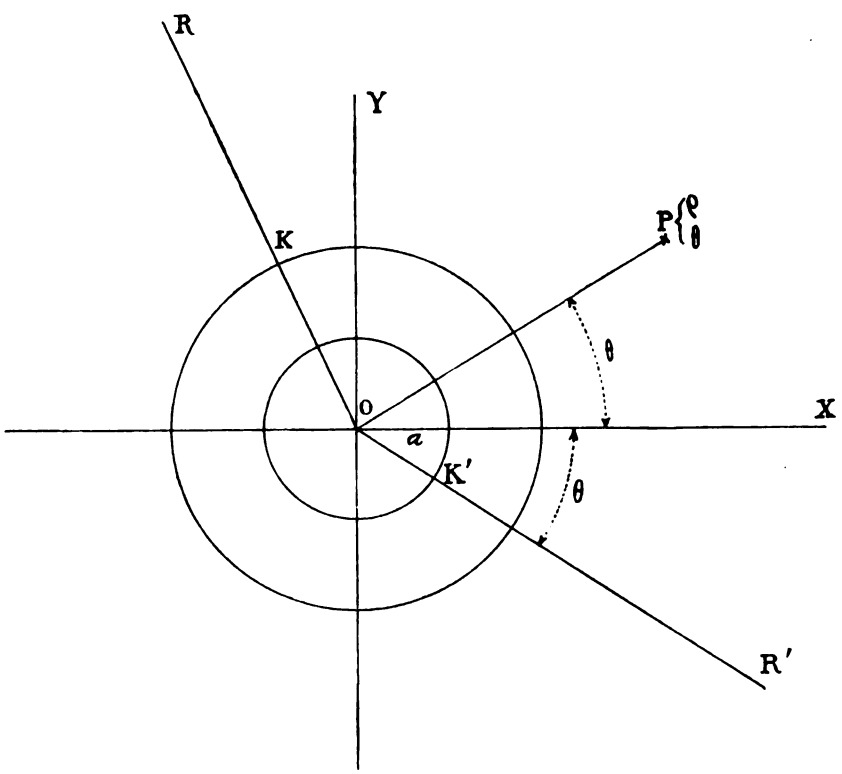


FIG. 1.

du point infini. Nous sommes ainsi amenés à la considération des intégrales définies prises suivant un circuit fermé.

Digitized by Google

Si x est l'affixe d'un point P du plan, dont l'argument est θ, $\frac{1}{x}$ sera l'affixe d'un point ayant $-\theta$ comme argument. Supposons que la variable u, partant du point infini sur le rayon vecteur OR', y revient, après avoir parcouru jusqu'au point K' la partie du rayon vecteur K'∞, et décrit, dans le sens direct, n fois la circonférence de rayon a. Une telle intégrale sera désignée par la notation.

$$\int_{-\infty}^{(0)^n} f(u)\,du.$$

Soit

$$n\sqrt[n]{ux} = v,$$

v étant une quantité complexe, dont la partie réelle est négative. Partageons la circonférence de rayon a en n parties égales, et joignons le centre à ces n points de division. Choisissons un quelconque des rayons, compris dans la partie du plan des x négatifs.

Soient

$$x = \rho e^{i\theta}, \quad u = \rho' e^{i\alpha};$$

d'où

$$v = n\sqrt[n]{\rho\rho'}\, e^{i\left(\frac{2k\pi+\alpha+\theta}{n}\right)}.$$

Si KR est le rayon vecteur correspondant à l'arc $\frac{2k\pi}{n}$, dont le cosinus est négatif, v parcourt cette droite quand la variable u décrit la partie du rayon vecteur K'R', dont l'argument α est égal à $-\theta$. En outre, si la variable u décrit n fois le cercle de rayon a, dont le centre est à l'origine, v parcourt une fois la circonférence ayant pour rayon $n\sqrt[n]{a\rho}$.

Posons maintenant, avec M. Pochhammer,

$$\overline{\Gamma}(a) = \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-1}\,du,$$

$$\overline{\Gamma}(a) = \int_{\infty k}^{(0)} e^u u^{a-1}\,du,$$

si le rayon vecteur OK est compris dans la région du plan, situé à gauche de l'axe des ordonnées.

Digitized by Google

On a de plus

$$(22). \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Gamma}(a+m) = (-1)^m a(a+1)\dots(a+m-1)\,\overline{\Gamma}(a), \\ \overline{\Gamma}(a-m) = (-1)^m \dfrac{\overline{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\dots(a-m)}. \end{array} \right.$$

m étant un nombre entier.

Appelons $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_{n-1}, \rho'_1, \rho'_2, \dots \rho'_{n-2}$, les $2n-3$ constantes d'une série hypergéométrique de première espèce, satisfaisant à une équation linéaire d'ordre $n-1$. Dans le domaine du point $u=\infty$, une des $n-1$ solutions de cette équation sera représentée par la série

$$(23). \quad u^{-\alpha'_1} F\left(\begin{matrix} \alpha'_1, \alpha'_1 - \rho'_1 + 1, \alpha'_1 - \rho'_2 + 1, \dots \alpha'_1 - \rho'_{n-2} + 1; \\ \alpha'_1 - \alpha'_2 + 1, \alpha'_1 - \alpha'_3 + 1, \dots \alpha'_1 - \alpha'_{n-1} + 1; \end{matrix} \frac{1}{u} \right).$$

Or

$$\alpha'_1 = \frac{n+1}{n} - \rho_1, \quad \alpha'_2 = \frac{n+1}{n} - \rho_2 \dots \alpha'_{n-1} = \frac{n+1}{n} - \rho_{n-1},$$

$$\rho'_1 = \frac{2}{n}, \quad \rho'_2 = \frac{3}{n} \dots \rho'_{n-2} = \frac{n-1}{n};$$

la solution (23) devient ainsi

$$V = u^{\rho_1 - \frac{n+1}{n}} F\left(\begin{matrix} \frac{1}{n} - \rho_1 + 1, \frac{2}{n} - \rho_1 + 1, \dots \frac{n-1}{n} - \rho_1 + 1; \\ \rho_2 - \rho_1 + 1, \rho_3 - \rho_1 + 1, \dots \rho_{n-1} - \rho_1 + 1; \end{matrix} \frac{1}{u} \right).$$

Alors une intégrale particulière de l'équation (4) sera

$$I_1 = \int_{\infty}^{u^{(n)''}} e^{n\sqrt[n]{ux}} u^{\rho_1 - 2} F\left(\begin{matrix} \frac{1}{n} - \rho_1 + 1, \frac{2}{n} - \rho_1 + 1, \dots \frac{n-1}{n} - \rho_1 + 1; \\ \rho_2 - \rho_1 + 1, \rho_3 - \rho_1 + 1, \dots \rho_{n-1} - \rho_1 + 1; \end{matrix} \frac{1}{u} \right) du.$$

Digitized by Google

Développons cette intégrale :

$$I_1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{1}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+ \left[\frac{2}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+ \cdots \left[\frac{n-1}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+}{[1]_m^+ [\rho_2 - \rho_1 + 1]_m^+ \cdots [\rho_{n-1} - \rho_1 + 1]_m^+} \int_{\frac{\infty}{x}}^{(0)''} e^{n\sqrt[n]{ux}} u^{\rho_1 - m - 2} du.$$

Soit

$$v = n\sqrt[n]{ux}.$$

Comme je l'ai dit plus haut, quand la variable u fait n révolutions autour de l'origine, la variable v ne décrit qu'une fois le lacet (0). De plus, v est une quantité complexe, dont la partie réelle est négative. Donc

$$\int_{\frac{\infty}{x}}^{(0)''} e^{n\sqrt[n]{ux}} u^{\rho_1 - m - 2} du = \frac{x^{1-\rho_1+m}\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n - nm)}{n^{n\rho_1 - n - nm - 1}}.$$

Mais

$$\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n - nm) = (-1)^{nm} \frac{\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n)}{(n\rho_1 - n - 1)(n\rho_1 - n - 2)\ldots(n\rho_1 - n - nm)},$$

$$\left[\frac{1}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+ = (-1)^m \frac{(n\rho_1 - n - 1)(n\rho_1 - 2n - 1)\ldots(n\rho_1 - nm - 1)}{n^m},$$

. . . . . .

$$\left[\frac{i}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+ = (-1)^m \frac{(n\rho_1 - n - i)(n\rho_1 - 2n - i)\ldots(n\rho_1 - nm - i)}{n^m},$$

. . . . . .

$$\left[\frac{n-1}{n} - \rho_1 + 1\right]_m^+ = (-1)^m \frac{(n\rho_1 - 2n + 1)(n\rho_1 - 3n + 1)\ldots(n\rho_1 - n(m+1) + 1)}{n^m}.$$

Observant maintenant que le produit de ces $m(n-1)$ facteurs peut être écrit

$$\begin{matrix} (n\rho_1 - n - 1)(n\rho_1 - n - 2)\ldots(n\rho_1 - 2n + 1) \\ (n\rho_1 - 2n - 1)(n\rho_1 - 2n - 2)\ldots(n\rho_1 - 3n + 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n\rho_1 - nm - 1)(n\rho_1 - nm - 2)\ldots(n\rho_1 - n(m+1) + 1) \end{matrix} \times \frac{(-1)^{m(n-1)}}{n^{m(n-1)}},$$

Digitized by Google

on aura finalement

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\infty}^{\epsilon(0)^n} e^{n\sqrt[n]{ux}}\, u^{\rho_1-2} F\left(\begin{matrix} \frac{1}{n}-\rho_1+1, \frac{2}{n}-\rho_1+1, \dots \frac{n-1}{n}-\rho_1+1; \\ \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \dots \rho_{n-2}-\rho_1+1; \frac{1}{u} \end{matrix}\right) du \\ = \dfrac{\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n)}{n^{n(\rho_1-1)-1}}\, x^{1-\rho_1} \mathfrak{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \dots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x). \end{array} \right.$$

12. On peut donner une autre forme à cette intégrale. Désignons par ϵ une quantité positive infiniment petite. Si x est l'affixe d'un point P, dont

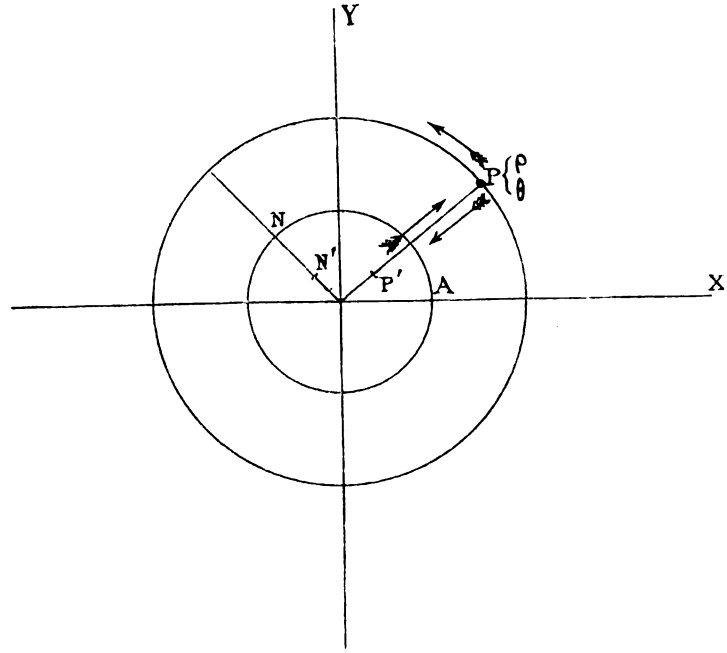


FIG. 2.

l'argument et le rayon vecteur sont θ et ρ, ϵx sera l'affixe d'un point P', voisin de l'origine. Posons maintenant

$$\frac{1}{v} = n\sqrt[n]{\frac{x}{u}},$$

d'où

$$v = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{\rho'}{\rho}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \alpha - \theta}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi + \alpha - \theta}{n}\right)\right],$$

α et ρ' désignant l'argument et le rayon vecteur de la variable u.

Digitized by Google

Choisissons le nombre entier k tel, que $\cos\frac{2k\pi}{n}$ soit négatif, et soit AN l'arc correspondant à cette valeur de k. Quand la variable u, partant du point P', y revient, après avoir décrit la droite P'P dans des sens opposés et n fois le cercle de rayon ρ, v parcourt la droite N'N, le cercle de rayon $\frac{1}{n}$ dans le sens positif, et enfin NN'.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$I_2 = \int_{(x}^{+(0)^n} e^{n\sqrt[n]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} F\left(\begin{matrix}\frac{1}{n}-\rho_1+1, \frac{2}{n}-\rho_1+1, \dots \frac{n-1}{n}-\rho_1+1;\\ \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \dots \rho_{n-1}-\rho_1+1; u\end{matrix}\right) du,$$

qu'on peut encore écrire

$$I_2 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{1}{n}-\rho_1+1\right]_m^+ \cdots \left[\frac{n-1}{n}-\rho_1+1\right]_m^+}{[1]_m^+ [\rho_2-\rho_1+1]_m^+ \cdots [\rho_{n-1}-\rho_1+1]_m^+} G_m,$$

si l'on pose

$$G_m = \int_{(x}^{+(0)^n} e^{n\sqrt[n]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1+m} du.$$

Soit maintenant

$$\frac{1}{v} = n\sqrt[n]{\frac{x}{u}};$$

d'où

$$G_m = \frac{x^{1-\rho_1+m}}{n^{n\rho_1-nm-n-1}} \int_p^{+(0)} e^{\frac{1}{v}} v^{nm-n\rho_1+n-1} dv.$$

p est l'affixe du point N'.

M. Pochhammer (*) définit encore $\overline{\Gamma}(a)$ de la manière suivante :

$$\Gamma(a) = \int_p^{+(0)} e^{\frac{1}{t}} t^{-a-1} dt,$$

(*) *Bemerkungen über das Integral* $\overline{\Gamma}$ (a). (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XL.)

Digitized by Google

p étant l'affixe d'un point infiniment voisin de l'origine, et dont la partie réelle est essentiellement négative. Ainsi,

$$G_m = x^{1-\rho_1+m}\frac{\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n - nm)}{n^{n\rho_1-nm-n-1}}.$$

En conséquence,

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\infty x}^{(0)^n} e^{n\sqrt[n]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} F\left(\begin{matrix}\frac{1}{n}-\rho_1+1, \frac{2}{n}-\rho_1+1, \ldots \frac{n-1}{n}-\rho_1+1;\\ \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; u\end{matrix}\right) du \\ = \dfrac{\overline{\Gamma}(n\rho_1 - n)}{n^{n\rho_1-n-1}} x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x). \end{array}\right.$$

13. Quant à l'intégrale uniforme de l'équation (4), une simple remarque nous permettra d'en donner l'expression par une intégrale définie.

Si, dans l'équation (4), on pose

$$y = x^{1-\rho_1}V,$$

on la transforme en une équation d'ordre n, dont l'intégrale uniforme est

$$\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x).$$

L'équation transformée est de la même forme que la proposée, si nous faisons

$$\rho_1' = 2-\rho_1, \rho_2' = \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}' = \rho_{n-1}-\rho_1+1.$$

Une des solutions multiformes de cette transformée est

$$x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1', \rho_2'-\rho_1'+1, \ldots \rho_{n-1}'-\rho_1'+1; x),$$

ou

$$x^{\rho_1-1}\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x).$$

Or, en vertu de la formule (25),

$$\int_{\infty x}^{(0)^n} e^{n\sqrt[n]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1'} F\left(\begin{matrix}\frac{1}{n}-\rho_1'+1, \frac{2}{n}-\rho_1'+1, \ldots \frac{n-1}{n}-\rho_1'+1;\\ \rho_2'-\rho_1'+1, \rho_3'-\rho_1'+1, \ldots \rho_{n-1}'-\rho_1'+1; u\end{matrix}\right) du$$

$$= \frac{\overline{\Gamma}(n\rho_1' - n)}{n^{n\rho_1'-n-1}} x^{1-\rho_1'}\mathcal{F}(2-\rho_1', \rho_2'-\rho_1'+1, \ldots \rho_{n-1}'-\rho_1'+1; x).$$

Digitized by Google

Changeant maintenant u en ux et remplaçant successivement

$$\rho'_1, \rho'_2, \cdots \rho'_{n-1}$$

par

$$2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \cdots \rho_{n-1}-\rho_1+1,$$

on a

$$(26)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty(0)^n} e^{n\sqrt[n]{-1}u} u^{\rho_1-2} F\left(\begin{matrix}\rho_1-\frac{1}{n}, & \rho_1-\frac{2}{n}, & \cdots & \rho_1-\frac{n-1}{n}; \\ \rho_2, & \rho_3, & \cdots & \rho_{n-1}\end{matrix}; ux\right) du \\ \displaystyle = \frac{\Gamma(n-n\rho_1)}{n^{n-n\rho_1-1}} \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots \rho_{n-1}; x). \end{array} \right.$$

CHAPITRE III.

14. Avant d'aborder l'étude de la représentation des solutions particulières de l'équation (4) par des intégrales définies, nous devons établir une formule préliminaire.

Nous définirons d'abord, avec M. Pochhammer (*), ce que l'on doit entendre par une intégrale définie, à double circuit.

Soit $f(u)$ une fonction de la variable complexe u, ayant les deux points singuliers $u=p$ et $u=q$. Entourons chacun de ces points d'un lacet ou d'un contour fermé quelconque, ne comprenant d'autres points singuliers que les points p et q. Unissons ces deux circuits par une ligne qui ne passe par aucun point singulier de la fonction; supposons enfin que la variable u, partant d'un point c de cette ligne, la valeur initiale de la fonction étant bien déterminée, revient au point de départ, après avoir décrit alternativement les lacets (p) et (q), d'abord dans le sens direct, puis dans le sens rétrograde.

L'intégrale curviligne ω, prise suivant ce chemin, sera une intégrale définie à double circuit, que nous représentons par la notation

$$\omega = \int_{c}^{(p,q,\overline{p},\overline{q})} f(u)\,du.$$

(*) Pochhammer, *Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf.*
Id., *Zur Theorie der Eulers'chen Integrale.* (Mathematische Annalen, t. XXXV, 1890.)

Digitized by Google

L'affixe c du point de départ et d'arrivée sera la limite inférieure; au lieu et place de la limite supérieure, nous écrirons, entre parenthèses, les lettres servant à désigner les points singuliers compris dans le contour d'intégration. Nous surmonterons deux de ces lettres du signe —, afin d'indiquer que les lacets sont décrits, une fois dans le sens positif, une fois dans le sens négatif.

Ces conventions admises, nous désignerons par $\mathcal{E}(a, b)$ l'intégrale à double circuit

$$\mathcal{E}(a,b) = e^{-\pi i(a+b)} \int_c^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

ou

$$\mathcal{E}(a,b) = e^{-\pi i(a-1)} \int_c^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} u^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du,$$

c étant une constante comprise entre 0 et 1.

La notation $\mathrm{E}(a, b)$ représentera l'intégrale eulérienne de première espèce.

Dans le travail cité plus haut, M. Pochhammer établit les formules suivantes :

$$(27)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}(a,b) = \mathcal{E}(b,a), \\ \mathcal{E}(a+m,b) = (-1)^m \dfrac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{(a+b)(a+b+1)\dots(a+b+m-1)}\,\mathcal{E}(a,b), \\ \mathcal{E}(a-m,b) = (-1)^m \dfrac{(a+b-1)(a+b-2)\dots(a+b-m)}{(a-1)(a-2)\dots(a-m)}\,\mathcal{E}(a,b). \end{cases}$$

De plus, on a

$$(28).\ \dots\dots\dots\quad \mathcal{E}(a,b) = 2i\sin\pi(a+b)\frac{\overline{\Gamma}(a)\,\overline{\Gamma}(b)}{\overline{\Gamma}(a+b)}.$$

15. m étant un nombre entier, désignons par $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \dots \mathrm{S}_m$ les expressions

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_1 &= s_1^{k_1+k_2+\dots+k_m-1}(1-s_1)^{l_1-1}, \\ \mathrm{S}_2 &= s_2^{k_2+k_3+\dots+k_m-1}(1-s_2)^{k_1-1}(1-s_1s_2)^{l_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{S}_m &= s_m^{k_m-1}(1-s_m)^{k_{m-1}-1}(1-s_1s_2\dots s_m)^{l_m}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

M. Pochhammer (*) a donné la formule

$$(29)\quad \int_0^1 S_1 ds_1 \int_0^1 S_2 ds_2 \dots \int_0^1 S_m ds_m = E(k_1, l_1) \prod_{i=2}^{i=m} E(k_i, k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1} + \lambda_i),$$

où, pour plus de simplicité, l'on pose

$$\lambda_i = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_i.$$

Pour le cas de $m = 2$,

$$(30)\quad \int_0^1 v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}dv \int_0^1 u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}du = E(k_1, l_1)\, E(k_2, k_1 + l_1 + l_2)$$

Considérons l'intégrale à double circuit

$$\mathfrak{J}_2 = \int_{c_2}^{(1,\,0,\,\bar{1},\,\bar{0})} v^{k_1+k_2-1}(1-v)^{l_1-1}dv \int_{c_1}^{(1,\,0,\,\bar{1},\,\bar{0})} u^{k_2-1}(1-u)^{k_1-1}(1-uv)^{l_2}du.$$

Nous supposons, ce qui est toujours permis, que le circuit, décrit par la variable u, n'enveloppe pas le point, dont l'affixe est $\frac{1}{v}$. Si les constantes k_1, k_2, l_1, l_2 ont leurs parties réelles positives, on peut admettre que les rayons des lacets (1) et (0) décroissent indéfiniment; s'il en est ainsi, les valeurs des intégrales, prises suivant ces contours, seront moindres que toute quantité assignable. Donc

$$\mathfrak{J}_2 = (e^{2\pi i k_1} - 1)(e^{2\pi i k_2} - 1)(e^{2\pi i (k_1+k_2)} - 1)(e^{2\pi i l_1} - 1)\, E(k_1, l_1)\, E(k_2, k_1 + l_1 + l_2).$$

En vertu des formules :

$$\mathcal{E}(a, b) = (e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1)\, E(a, b),$$

$$\mathcal{E}(a, b) = 2i \sin \pi (a + b)\, \frac{\bar{\Gamma}(a)\,\bar{\Gamma}(b)}{\bar{\Gamma}(a + b)},$$

on a définitivement

$$(31)\quad \dots \quad \mathfrak{J}_2 = e^{i\pi(l_1+2k_1+2k_2)}\, \frac{\sin \pi (k_1 + k_2)}{\sin \pi (k_1 + l_1 + l_2)}\, \mathcal{E}(k_1, l_1)\, \mathcal{E}(k_2, k_1 + l_1 + l_2).$$

(*) Pochhammer, *Journal de Crelle*, t. CII.

Digitized by Google

J_2 est une fonction uniforme et continue et, d'après le théorème de Riemann, cette formule subsiste, quelles que soient les valeurs des quantités k_1, k_2, l_1 et l_2.

Généralement, m étant un nombre entier, considérons l'intégrale m^{uple}, à double circuit,

$$\mathfrak{J}_m = \int_{c_m}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} S_1 ds_1 \int_{c_{m-1}}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} S_2 ds_2 \cdots \int_{c_1}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} S_m ds_m.$$

Nous supposons encore que le circuit, décrit par la variable s_i, n'enveloppe pas le point, dont l'affixe est $\frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_{i-1}}$ et que les constantes $k_1, k_2 \ldots k_m$, $l_1, l_2 \ldots l_m$ ont leur partie réelle positive. Si les rayons des lacets décroissent indéfiniment,

$$\mathfrak{J}_m = \begin{cases} (e^{2\pi i(k_1+k_2+\ldots+k_m)}-1)(e^{2\pi i l_1}-1) \\ (e^{2\pi i(k_2+k_3+\ldots+k_m)}-1)(e^{2\pi i k_1}-1) \\ (e^{2\pi i(k_3+k_4+\ldots+k_m)}-1)(e^{2\pi i k_2}-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (e^{2\pi i l_m}-1)(e^{2\pi i k_{m-1}}-1) \end{cases} \times E(k_1, l_1) \prod_{i=2}^{i=m} E(k_i, k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+\lambda_i),$$

ou

$$(32) \quad \mathfrak{J}_m = e^{\pi i(l_1+2k_1+\ldots+mk_{m-1}+ml_m)} \mathcal{E}(k_1, l_1) \prod_{i=2}^{i=m} \frac{\sin\pi(k_{i-1}+k_1+\cdots+k_m)}{\sin\pi(k_1+\cdots+k_{i-1}+\lambda_i)} \mathcal{E}(k_i, k_1+k_2+\cdots+k_{i-1}+\lambda_i).$$

Par le raisonnement employé plus haut, on prouve que cette formule est générale.

CHAPITRE IV.

16. Nous nous proposons maintenant de chercher l'expression des solutions principales de l'équation (4) par des intégrales définies multiples. Nous savons que, moyennant certaines conditions auxquelles sont assujetties les constantes, les solutions principales de l'équation hypergéométrique du n^{me} ordre sont exprimables par des intégrales définies $(n-1)^{\text{uples}}$, la fonction à intégrer restant la même. La notion d'intégrales définies, à double

Digitized by Google

circuit, permet de nous affranchir de ces restrictions, et M. Pochhammer (*) a déjà fait voir comment les solutions principales de l'équation hypergéométrique du deuxième ordre sont toujours exprimables par des intégrales définies simples, à double circuit.

Avant d'aborder la solution générale de cette question, il ne sera pas inutile de faire l'application de notre méthode à quelques exemples particuliers; et, à cette fin, nous choisirons les deux équations, traitées par l'éminent géomètre, dont nous avons déjà cité le nom plusieurs fois.

17. Reprenons l'équation du troisième ordre

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+(\rho_1+\rho_2+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\rho_1\rho_2\frac{dy}{dx}-y=0. \tag{33}$$

Comme nous l'avons montré plus haut, la fonction,

$$y=\int_g^h e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}}u^{-\rho_1}V\,du,$$

satisfait à cette équation, si, dans le domaine du point $u=0$, V est une solution de l'équation hypergéométrique, dont les constantes sont

$$\frac{4}{3}-\rho,\ \frac{5}{3}-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1.$$

Dans le domaine de ce point, les deux solutions de cette équation sont représentées par des intégrales définies simples, à double circuit. En conséquence, deux solutions particulières de l'équation (33) seront :

$$I_1=\int_{(x)}^{(0)^3}e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}}u^{-\rho_1}du\int_{c_1}^{(\lambda,1,\bar\lambda,\bar1)}\Phi(v,u)\,dv, \tag{34}$$

$$I_2=\int_{(x)}^{(0)^3}e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}}u^{-\rho_1}du\int_{c_1}^{(u,0,\bar u,\bar0)}\Phi(v,u)\,dv, \tag{35}$$

$$\Phi(v,u)=(v-u)^{\rho_1-\frac{5}{3}}v^{\frac{2}{3}-\rho_2}(v-1)^{\rho_2-\frac{4}{3}}.$$

(*) POCHHAMMER, *Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf* (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XXXV).

ID., *Ueber die Differentialgleichungen der Reihen* $\mathcal{F}(\rho,\sigma;x)$ *und* $\mathcal{F}(\rho,\sigma,\tau;x)$ (MATHEMATISCHE ANNALEN, t. XLI).

Digitized by Google

A désigne un circuit, comprenant l'origine et le point dont l'affixe est u.

La variable u décrivant le lacet (0), le module de cette quantité peut être pris aussi petit qu'on le veut. Il sera toujours permis de supposer que le contour A est une circonférence, ayant son centre à l'origine et ne comprenant pas le point de ramification $v = 1$.

Développons $(v-u)^{\rho_1-\frac{5}{3}}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{u}{v}$:

$$I_1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{5}{3}-\rho_1\right]_m^+}{1.2.3\ldots m} \mathfrak{I}_m,$$

si l'on pose

$$\mathfrak{I}_m = \int_{(x)}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1+m} du \int_{e_1}^{-(0,\,1,\,\bar{\omega},\,\bar{1})} v^{\rho_1-\rho_2-m-1}(v-1)^{\rho_2-\frac{1}{3}} dv;$$

et le point $v = u$ n'est plus un point singulier.

Soit maintenant

$$u = x(3v)^3;$$

la nouvelle variable v ne fera plus qu'une révolution autour de l'origine et l'on aura

$$\mathfrak{I}_m = e^{\pi i(\rho_1-\rho_2+m)}\,\mathcal{E}\left(\rho_1-\rho_2-m,\ \rho_2-\frac{1}{3}\right) 3^{4-3\rho_1+3m} x^{4-\rho_1+m} \int_{p}^{(0)} e^{\frac{1}{v}} v^{3m-3\rho_1+2} dv,$$

ou

$$\mathfrak{I}_m = e^{\pi i(\rho_1-\rho_2+m}\,\mathcal{E}\left(\rho_1-\rho_2-m,\ \rho_2-\frac{1}{3}\right) 3^{4-3\rho_1+3m} x^{4-\rho_1+m}\,\overline{\Gamma}(3\rho_1-3m-3).$$

Par suite,

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{(x)}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{e_1}^{(\mathrm{A},\,1,\,\bar{\lambda},\,\bar{1})} \Phi(v,u)\,dv \\ -e^{\pi i(\rho_1-\rho_2)} 3^{4-3\rho_1}\,\mathcal{E}\left(\rho_1-\rho_2,\ \rho_2-\frac{1}{3}\right)\overline{\Gamma}(3\rho_1-3)\,x^{4-\rho_1}\,\mathcal{F}(2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1;\ x). \end{array}\right.$$

Pour la deuxième intégrale, il suffira de poser

$$v = ut$$

Digitized by Google

et de développer $(1 - ut)^{\rho_2 - \frac{4}{5}}$ suivant les puissances croissantes de ut; on trouve ainsi

$$(37)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{c_1}^{(u,\,0,\,\bar{u},\,\bar{v})} \Phi(v,\,u)\, dv \\ = e^{-\frac{2\pi i}{5}} 3^{4-3\rho_2} \mathcal{E}\left(\frac{5}{3} - \rho_2,\ \rho_1 - \frac{2}{3}\right) \Gamma(3\rho_2 - 3)\, x^{1-\rho_2} \mathcal{F}(2 - \rho_2,\ \rho_1 - \rho_2 + 1;\ x). \end{array} \right.$$

Quant à la troisième intégrale, la solution uniforme, elle est représentée par l'intégrale double

$$(38).\ .\ .\ .\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi}^{(0,\,\lambda} e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1 - 2} du \int_{c_1}^{(\lambda,\,1,\,\bar{\lambda},\,\bar{1})} (v - ux)^{\frac{2}{3} - \rho_1}\, v^{\rho_1 - \rho_2 - \frac{2}{3}} (v - 1)^{\rho_2 - \rho_1 - \frac{2}{3}} dv \\ = e^{\pi i(1 - \rho_2)} 3^{5\rho_1 - 2} \mathcal{E}\left(1 - \rho_2,\ \rho_2 - \rho_1 + \frac{1}{3}\right) \Gamma(3 - 3\rho_1)\, \mathcal{F}(\rho_1,\ \rho_2;\ x). \end{array} \right.$$

A étant un contour, comprenant l'origine et le point dont l'affixe est ux.

18. Si les constantes ρ_1 et ρ_2 satisfont aux inégalités

$$\frac{4}{3} > \rho_1 > \frac{2}{3},\quad \frac{5}{3} > \rho_2 > \frac{1}{3},$$

on pourra prendre, comme solutions multiformes, les deux intégrales

$$(39).\ .\ .\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)_2} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{1}^{\infty} (v - u)^{\rho_1 - \frac{5}{3}}\, v^{\frac{2}{3} - \rho_2} (v - 1)^{\rho_2 - \frac{4}{3}} dv \\ = 3^{4-3\rho_1}\, \mathrm{E}\left(\frac{4}{3} - \rho_1,\ \rho_2 - \frac{1}{3}\right) \Gamma(3\rho_1 - 3)\, x^{1-\rho_1} \mathcal{F}(2 - \rho_1,\ \rho_2 - \rho_1 + 1;\ x), \end{array} \right.$$

$$(40).\ .\ .\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)_2} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{0}^{u} (v - u)^{\rho_1 - \frac{5}{3}}\, v^{\frac{2}{3} - \rho_2} (v - 1)^{\rho_2 - \frac{4}{3}} dv \\ = 3^{4-3\rho_2}\, \mathrm{E}\left(\rho_1 - \frac{2}{3},\ \frac{5}{3} - \rho_2\right) \Gamma(3\rho_2 - 3)\, x^{1-\rho_2} \mathcal{F}(2 - \rho_2,\ \rho_1 - \rho_2 + 1;\ x). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Enfin, si ρ_1 et ρ_2 vérifient les inégalités

$$\rho_1 - \frac{1}{3} > 0, \quad \rho_2 - \rho_1 + \frac{1}{3} > 0,$$

la solution uniforme de l'équation (38) est représentée par l'intégrale

$$(41). \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{(0)} e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1 - 2} du \int_1^{\infty} (v - ux)^{\frac{2}{3} - \rho_1} v^{\rho_1 - \rho_2 - \frac{2}{3}} (v - 1)^{\rho_2 - \rho_1 - \frac{2}{3}} dv \\ = 3^{3\rho_1 - 2} \mathrm{E}\left(\rho_1 - \frac{1}{3}, \rho_2 - \rho_1 + \frac{1}{3}\right) \Gamma(3 - 3\rho_1) \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2; x). \end{array} \right.$$

19. Les formules (36) et (37) deviennent illusoires, si les constantes ρ_1 et ρ_2 satisfont aux conditions

$$\rho_1 = \frac{1}{3} + m, \quad \rho_2 = \frac{2}{3} + m,$$

m étant un nombre entier. Alors l'équation (33) est intégrable, comme l'a montré l'éminent géomètre, M. Le Paige, dans le travail cité plus haut.

Si l'une de ces relations seulement est vérifiée, une des formules (36) et (37) devient illusoire. Soit, pour fixer les idées,

$$\rho_1 = \frac{4}{3}.$$

Pour lever la difficulté, on fera usage de la transformation

$$y = x^{-\frac{1}{3}} Z.$$

L'équation transformée sera

$$x^2 \frac{d^3 Z}{dx^3} + x\left(\rho_2 + \frac{4}{3}\right) \frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{2}{3}\left(\rho_2 - \frac{1}{3}\right) \frac{dZ}{dx} - Z = 0,$$

dans laquelle les constantes sont respectivement

$$\rho_1' = \frac{2}{3}, \quad \rho_2' = \rho_2 - \frac{1}{3}.$$

Digitized by Google

Nous avons montré que

$$Z = \int_{\xi_x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\frac{2}{3}} V du$$

est une intégrale de cette équation, si V est une solution, dans le voisinage du point $u = 0$, de l'équation hypergéométrique :

$$u(u-1)\frac{d^2V}{du^2} + \left(\frac{8}{3}u - \rho_2\right)\frac{dv}{du} + \frac{2}{3}V = 0.$$

Dans le domaine de l'origine, ces deux solutions sont

$$F\left(\frac{2}{3}, 1; \rho_2; u\right),$$

$$u^{1-\rho_2} F\left(\frac{5}{3} - \rho_2, 2 - \rho_2; 2 - \rho_2; u\right).$$

Cette dernière fonction hypergéométrique dégénère en la série du binôme. Par suite deux solutions de l'équation,

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{7}{3} + \rho_2\right)x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4}{3}\rho_2\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad (42)$$

sont exprimées par les intégrales définies

$$I_1 = x^{-\frac{1}{3}} \int_{\xi_x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{\frac{1}{3}-\rho_2}(1-u)^{\rho_2-\frac{5}{3}} du,$$

$$I_2 = x^{-\frac{1}{3}} \int_{\xi_x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_2} du \int_{c}^{(\lambda, 1, \bar{\lambda}, \bar{1})} (v-u)^{-1} v^{1-\rho_2}(v-1)^{\rho_2-\frac{5}{3}} dv.$$

Quant à la troisième solution, elle sera représentée par l'intégrale

$$I_3 = x^{-\frac{1}{3}} \int_{\xi_x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{\rho_2-\frac{7}{3}} du \int_{c}^{(\lambda, 1, \bar{\lambda}, \bar{1})} \Phi(v, ux)\, du,$$

où

$$\Phi(v, ux) = (v-ux)^{1-\rho_2} v^{\rho_2-\frac{5}{3}} (v-1)^{\frac{1}{3}-\rho}.$$

Digitized by Google

Pour trouver la valeur de I_1, développons le binôme $(1-u)^{\rho_2-\frac{5}{3}}$ suivant les puissances ascendantes de u :

$$I_1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{5}{3}-\rho_2\right]_m^+}{1.2.3\ldots m} 3^{5-5\rho_2+5m}\, x^{4-\rho_2+m}\, \overline{\Gamma}(3\rho_2-4-3m),$$

ou

$$I_1 = 3^{5-5\rho_2}\overline{\Gamma}(3\rho_2-4)\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^{4-\rho_2+m}}{1.2.3\ldots m\,[2-\rho_2]_m^+\left[\frac{7}{3}-\rho_2\right]_m^+};$$

c'est-à-dire

$$(43)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{-\frac{4}{5}} \displaystyle\int_{\xi x}^{\epsilon(0)^5} e^{3\sqrt[5]{\frac{x}{u}}} u^{\frac{4}{5}-\rho_2}(1-u)^{\rho_2-\frac{5}{5}}du \\ = 3^{5-5\rho_2}\overline{\Gamma}(3\rho_2-4)x^{4-\rho_2}\mathcal{F}\left(2-\rho_2, \frac{7}{3}-\rho_2; x\right). \end{array} \right.$$

A désignant un circuit entourant l'origine et le point dont l'affixe est u, pour trouver la valeur de I_2, on développera $(v-u)^{-1}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{u}{v}$. Alors

$$I_2 = 2^2 e^{-\pi i\rho_2}\sum_{m=0}^{m=\infty} e^{\pi i m}\,\mathcal{E}\left(1-\rho_2-m, \rho_2-\frac{2}{3}\right) 3^{5m}\, x^m\, \overline{\Gamma}(-3m-1);$$

en conséquence,

$$(44)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{-\frac{4}{5}} \displaystyle\int_{\xi x}^{\epsilon(0)^5} e^{3\sqrt[5]{\frac{x}{u}}} u^{-\frac{2}{5}}du \int_{\epsilon}^{(A,\,i,\,\overline{A},\,\overline{i})} (v-u)^{-1} v^{4-\rho_2}(v-1)^{\rho_2-\frac{5}{5}}dv \\ = 8\pi i e^{-\pi i\rho_2}\,\mathcal{E}\left(1-\rho_2, \rho_2-\frac{2}{3}\right)\mathcal{F}\left(\frac{4}{3}, \rho_2; x\right). \end{array} \right.$$

Par un procédé semblable à celui que nous venons de suivre, on trouve

$$(45)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{-\frac{4}{5}} \displaystyle\int_{\xi}^{\epsilon(0)^5} e^{3\sqrt[5]{\frac{x}{u}}} u^{\rho_2-\frac{7}{5}}du \int_{\epsilon}^{(A,\,i,\,\overline{A},\,\overline{i})} (v-ux)^{4-\rho_2} v^{\rho_2-\frac{5}{5}}(v-1)^{\frac{4}{5}-\rho_2}dv \\ = e^{\frac{\pi i}{5}} 3^{5\rho_2-5}\overline{\Gamma}(4-3\rho_2)\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}-\rho_2\right) x^{-\frac{4}{5}}\mathcal{F}\left(\frac{2}{3}, \rho_2-\frac{1}{3}; x\right). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

20. Remarque I. — Dans le cas particulier que nous venons d'examiner, la solution uniforme et la solution appartenant à l'exposant $1 - \rho_2$ peuvent être également représentées par les intégrales (37) et (38).

Remarque II. — Si les constantes ρ_1 et ρ_2 satisfont à la condition

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{2}{3},$$

la solution uniforme sera donnée par l'intégrale simple

$$I_1 = \int_{\epsilon}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1 - 2}(1 - ux)^{\frac{1}{3} - \rho_1} du.$$

Par le développement de $(1 - ux)^{\frac{1}{3} - \rho_1}$, suivant les puissances entières et ascendantes de ux, on a

$$(46). \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\epsilon}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1 - 2}(1 - ux)^{\frac{1}{3} - \rho_1} du \\ = 3^{3\rho_1 - 2}\Gamma(3 - 3\rho_1)\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2; x) \end{array} \right. \left(\rho_2 = \rho_1 - \frac{2}{3}\right).$$

Remarque III. — Pour certaines valeurs des constantes ρ_1 et ρ_2, on pourrait adopter, pour la variable v, d'autres chemins d'intégration que ceux que nous avons choisis. Mais nous ne nous arrêterons pas à l'examen de ces cas particuliers; il nous suffit d'avoir montré comment les solutions principales particulières de l'équation (33) sont exprimables généralement par des intégrales définies doubles, à double circuit, et nous passerons à l'étude de l'équation du quatrième ordre.

21. Soit l'équation

$$(47) \quad x^3\frac{d^4y}{dx^4} + (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 3)x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 1)x\frac{d^2y}{dx^2} + \rho_1\rho_2\rho_3\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Digitized by Google

Dans le domaine du point $x = 0$, les solutions multiformes de cette équation sont

$$I_1 = \int_{\mathfrak{L}x}^{(0)A} e^{\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{c_2}^{(1,B,\overline{1},\overline{B})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,1,\overline{v}_2,\overline{1})} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_1,$$

$$I_2 = \int_{\mathfrak{L}x}^{(0)A} e^{\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{c_2}^{(u,0,\overline{u},\overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(A,1,\overline{A},\overline{1})} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_1,$$

$$I_3 = \int_{\mathfrak{L}x}^{(0)A} e^{\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_{c_2}^{(u,0,\overline{u},\overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_2,\overline{0})} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_1,$$

où

$$\Phi(v_2, v_1, u) = (v_2 - u)^{\rho_1 - \frac{7}{4}} v_2^{\frac{5}{4} - \rho_2} (v_1 - v_2)^{\rho_3 - \frac{6}{4}} v_1^{\frac{3}{4} - \rho_3} (v_1 - 1)^{\rho_2 - \frac{5}{4}}.$$

A est un contour enveloppant l'origine et le point, dont l'affixe est v_2; B est un circuit comprenant l'origine et le point, dont l'affixe est u.

Pour déterminer la valeur de I_1, on développera $(v_2 - u)^{\rho_1 - \frac{7}{4}}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{u}{v_2}$; puis on posera

$$v_1 = 1 - t_1 t_2,$$
$$v_2 = 1 - t_2.$$

Cette intégrale se décompose en une série, dont le terme général est

$$\mathfrak{I}_m = \frac{\left[\frac{7}{4} - \rho_1\right]_m^+}{1.2.3 \ldots m}$$

$$\int_{\mathfrak{L}x}^{(0)A} e^{\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1 + m} du \int_{c_2}^{(0,1,\overline{0},\overline{1})} t_2^{\rho_2 + \rho_3 - \frac{7}{4}} (1 - t_2)^{\rho_1 - \rho_3 - m - \frac{1}{4}} dt_2 \int_{c_1}^{(1,0.\overline{1},\overline{0})} t_1^{\rho_2 - \frac{5}{4}} (1 - t_1)^{\rho_3 - \frac{6}{4}} (1 - t_1 t_2)^{\frac{5}{4} - \rho_2} dt_1.$$

le circuit de la variable t_1 n'entourant pas le point d'affixe $\frac{1}{t_2}$.

Si l'on fait

$$k_1 = \rho_2 - \frac{2}{4}, \quad l_1 = \rho_1 - \rho_3 - v,$$

$$k_2 = \rho_2 - \frac{1}{4}, \quad l_2 = \frac{2}{4} - \rho_1,$$

Digitized by Google

on a, en vertu de la formule (31),

$$\mathfrak{I}_m = e^{\pi i\left(\rho_1+\rho_2+2\rho_3-\frac{1}{2}\right)} \frac{\left[\frac{7}{4}-\rho_1\right]_m^+\left[\frac{6}{4}-\rho_1\right]_m^+\left[\frac{5}{4}-\rho_1\right]_m^+}{1.2.3\ldots m[\rho_2-\rho_1+1]_m^+[\rho_3-\rho_1+1]_m^+} \frac{\sin\pi\left(\rho_2+\rho_3-\frac{3}{4}\right)}{\sin\pi(\rho_1-\rho_2)} \mathcal{E}\left(\rho_3-\frac{2}{4},\ \rho_1-\rho_3\right)\mathcal{E}\left(\rho_2-\frac{1}{4},\ \rho_1-\rho_2\right)$$
$$\times \int_{\xi x}^{(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1+m}\,du.$$

En conséquence,

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1}du \int_{c_2}^{(1,\,B,\,\overline{1},\,\overline{B})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,1,\,\overline{v_2},\,\overline{1})} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\left(\rho_1+\rho_3+3\rho_2+\frac{1}{4}\right)} 4^{5-4\rho_1} \dfrac{\sin\pi\left(\rho_2+\rho_3-\frac{3}{4}\right)}{\sin\pi(\rho_1-\rho_2)} \mathcal{E}\left(\rho_3-\frac{2}{4},\ \rho_1-\rho_3\right)\mathcal{E}\left(\rho_2-\frac{1}{4},\ \rho_1-\rho_2\right)\overline{\Gamma}(4\rho_1-4) \\ \times x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1,\ \rho_3-\rho_1+1;\ x). \end{array}\right.$$

Pour I_2, on développera le binôme $(v_1 - v_2)^{\rho_3-\frac{6}{4}}$, suivant les puissances ascendantes de $\frac{v_2}{v_1}$ et l'on posera ensuite

$$v_2 = ut_1, \quad u = x(4t_2)^4;$$

d'où

$$(49)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1}du \int_{c_2}^{(u,\,0,\,\overline{u},\,\overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(A,\,1,\,\overline{A},\,\overline{1})} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\,\frac{5}{4}-\rho_3)} 4^{5-4\rho_3}\overline{\Gamma}(4\rho_3-4)\mathcal{E}\left(\rho_3-\rho_2,\ \rho_1-\frac{1}{4}\right)\mathcal{E}\left(\frac{7}{4}-\rho_3,\ \rho_1-\frac{3}{4}\right)x^{1\ \ \rho_3}\mathcal{F}(2-\rho_3,\ \rho_1-\rho_3+1,\ \rho_2-\rho_3+1;\ x). \end{array}\right.$$

Enfin, au moyen du développement de $(v_1 - 1)^{\rho_2-\frac{5}{4}}$ par la formule du binôme et des transformations

$$v_1 = ut_1t_2, \quad v_2 = ut_2, \quad u = x(4t_3)^4,$$

on a

$$(50)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1}du \int_{c_2}^{(u,\,0,\,\overline{u},\,\overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v_2},\,\overline{0})} \Phi(v_2, v_1, u)\,av_1 \\ = e^{-\pi i\rho_2} 4^{5-4\rho_2}\overline{\Gamma}(4\rho_2-4)\mathcal{E}\left(\frac{7}{4}-\rho_2,\ \rho_1-\frac{3}{4}\right)\mathcal{E}\left(\frac{6}{4}-\rho_2,\ \rho_3-\frac{2}{4}\right)x^{1-\rho_2}\mathcal{F}(2-\rho_2,\ \rho_1-\rho_2+1,\ \rho_3-\rho_2+1;\ x). \end{array}\right.$$

Digitized by Google

La solution uniforme s'exprime par l'intégrale triple

$$(51). \quad \int_{\varepsilon}^{(0)^+} e^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}u} u^{\rho_1-2}\,du \int_{c_2}^{(1,B,\overline{1},\overline{B})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,1,\overline{v_2},\overline{1})} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1,$$

où l'on pose

$$\Phi(v_2, v_1, u) = (v_2 - ux)^{\frac{5}{4}-\rho_1} v_2^{\rho_1-\rho_3-\frac{3}{4}} (v_1 - v_2)^{\rho_3-\rho_1-\frac{3}{4}} v_1^{\rho_1-\rho_3-\frac{3}{4}} (v_1 - 1)^{\rho_3-\rho_1-\frac{5}{4}}.$$

Ici B est un circuit enveloppant l'origine et le point, dont l'affixe est ux.

REMARQUE. — La formule (48) serait illusoire, si la quantité $\rho_2 + \rho_3 - \frac{3}{4}$ était entière; mais, pour éluder cette difficulté, il suffit de remplacer ρ_2 par ρ_1 dans la fonction à intégrer. Alors cette quantité devient $\rho_1 + \rho_3 - \frac{3}{4}$ et elle ne peut être entière, puisque, en vertu des hypothèses précédemment admises, $\rho_1 - \rho_2$ est différent d'un nombre entier.

22. Si les constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 satisfont aux conditions, exprimées par les inégalités

$$\frac{5}{4} > \rho_1 > \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{4} > \rho_2 > \frac{1}{4}, \quad \frac{5}{4} > \rho > \frac{2}{4},$$

on pourra prendre, comme solutions multiformes de l'équation (47), les intégrales triples

$$(52). \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^+} e^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}u} u^{-\rho_1}\,du \int_{1}^{\infty} dv_2 \int_{1}^{v_2} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1, \\ \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^+} e^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}u} u^{-\rho_1}\,du \int_{0}^{u} dv_2 \int_{1}^{\infty} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1, \\ \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^+} e^{\frac{1}{4}\sqrt{-1}u} u^{-\rho_1} \int_{0}^{u} dv_2 \int_{0}^{v_2} \Phi(v_2, v_1, u)\,dv_1. \end{array} \right.$$

Au moyen des substitutions

$$v_1 = v_2 + (1 - v_2)t_2, \quad \frac{v_2 - 1}{v_2} = t_2,$$

Digitized by Google

on trouve

$$\int_{\varepsilon x}^{\varepsilon(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_1^{\infty} dv_2 \int_1^{v_2} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_2$$

$$=(-1)^{\rho_3+\frac{6}{4}} 4^{5-4\rho_1} \overline{\Gamma}(4\rho_1-4)\, \mathrm{E}\left(\rho_2-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}-\rho_1\right) \mathrm{E}\left(\rho_3-\frac{2}{4}, \frac{6}{4}-\rho_1\right) x^{1-\rho_1} \mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1).$$

Les valeurs des deux autres intégrales sont

$$\int_{\varepsilon x}^{\varepsilon(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_0^{u} dv_2 \int_1^{\infty} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_1$$

$$=(-1)^{\left(\rho_1+\frac{1}{4}\right)} 4^{5-4\rho_3} \overline{\Gamma}(4\rho_3-4)\, \mathrm{E}\left(\frac{5}{4}-\rho_3, \rho_2-\frac{1}{4}\right) \mathrm{E}\left(\rho_1-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}-\rho_3\right) x^{1-\rho_3} \mathcal{F}(2-\rho_3, \rho_2-\rho_3+1, \rho_2-\rho_3+1; x).$$

$$\int_{\varepsilon x}^{\varepsilon(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} du \int_0^{u} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi(v_2, v_1, u)\, dv_1$$

$$=(-1)^{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\frac{6}{4}} 4^{5-4\rho_2} \overline{\Gamma}(4\rho_2-4)\, \mathrm{E}\left(\frac{7}{4}-\rho_2, \rho_1-\frac{3}{4}\right) \mathrm{E}\left(\frac{6}{4}-\rho_2, \rho_3-\frac{2}{4}\right) x^{1-\rho_2} \mathcal{F}(2-\rho_2, \rho_1-\rho_2+1, \rho_3-\rho_2+1; x)$$

23. Si les constantes ρ_1 et ρ_2 satisfont à la relation

$$\rho_2 = \rho_1 - \frac{3}{4},$$

la solution uniforme de l'équation (47) s'exprime par une intégrale définie double. Pour le montrer, il suffit de remonter à la formule générale (26) : la fonction hypergéométrique du troisième ordre dégénère en une fonction du deuxième ordre. Cette solution uniforme est représentée par l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\varepsilon}^{(0)^4} e^{4\sqrt[4]{\frac{x}{u}}} u^{\rho_1-2} du \int_{\varepsilon}^{(\mathrm{A}, 1, \overline{\mathrm{A}}, \overline{1})} (v-ux)^{\frac{2}{4}-\rho_1} v^{\rho_1-\rho_3-\frac{2}{4}} (v-1)^{\rho_3-\rho_1-\frac{3}{4}} dv.$$

A est un circuit entourant l'origine et le point, dont l'affixe est ux.

Digitized by Google

Par le développement du facteur $(v - ux)^{\frac{2}{4}-\rho_1}$ suivant la formule du binôme, on a

$$(53)\quad \begin{cases} \int_{\epsilon}^{(0)4} e^{i\sqrt[4]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1-2}du \int_{\epsilon}^{(A,1,\overline{A},\overline{1})} (v-ux)^{\frac{2}{4}-\rho_1} v^{\rho_1-\rho_3-\frac{2}{4}}(v-1)^{\rho_3-\rho_1-\frac{3}{4}}dv \\ = e^{\pi i(1-\rho_3)} 4^{4\rho_1-3}\,\mathcal{E}\left(1-\rho_3,\ \rho_3-\rho_1+\frac{1}{4}\right)\overline{\Gamma}(4-4\rho_1)\,\mathcal{F}(\rho_1,\rho_2,\rho_3;x) \end{cases} \left(\rho_2=\rho_1-\frac{3}{4}\right).$$

Si les valeurs des constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 vérifient les égalités

$$\rho_2=\rho_1-\frac{3}{4},\quad \rho_3=\rho_1-\frac{2}{4},$$

la solution uniforme est représentée par une intégrale définie simple, car la fonction hypergéométrique du troisième ordre dégénère en la série du binôme. Ainsi

$$(54)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \int_{\epsilon}^{(0)4} e^{i\sqrt[4]{\frac{1}{u}}} u^{\rho_1-2}(1-ux)^{\frac{1}{4}-\rho_1}du \\ = 4^{4\rho_1-3}\overline{\Gamma}(4-4\rho_1)\,\mathcal{F}(\rho_1,\rho_2,\rho_3;x). \end{cases}$$

CHAPITRE V.

24. Dans ce chapitre, nous traiterons le cas d'une équation différentielle du n^{me} ordre. D'après M. Pochhammer (*), les $n-1$ solutions d'une équation hypergéométrique du $(n-1)^{me}$ ordre, dans le domaine du point $u=0$, sont exprimées par les intégrales définies multiples

$$(54)\quad \cdots\cdots \int_1^{\infty} dv_{n-2}\int_1^{v_{n-2}} dv_{n-3}\int_1^{v_{n-3}} dv_{n-4}\cdots\int_1^{v_2}\Phi dv_1,$$

$$(55)\quad \cdots\cdots \int_0^{u} dv_{n-2}\int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3}\int_0^{v_{n-4}} dv_{n-4}\cdots\int_0^{v_2}\Phi dv_1,$$

(*) *Journal de Crelle*, t. CII, 1888.

Digitized by Google

$$(56). \quad \ldots \int_0^u dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \ldots \int_0^{v_{p+1}} dv_p \int_1^{\infty} dv_{p-1} \int_1^{v_{p-1}} dv_{p-2} \ldots \int_1^{v_2} \Phi dv_1,$$

$$\Phi(v_1, v_2 \ldots v_{n-2}, u) = (v_{n-2} - u)^{-\alpha'_{n-1}} v_{n-2}^{\alpha'_{n-1} - \rho'_{n-2}} (v_1 - 1)^{\rho'_1 - \alpha'_1 - 1} \prod_{i=2}^{i=n-2} (v_{i-1} - v_i)^{\rho'_i - \alpha'_i - 1} v_{i-1}^{\alpha'_i - \rho'_i - 1}.$$

Dans l'intégrale (56), on égalera p successivement à 2, 3 ... $n - 2$. D'après la formule (25), nous devons poser

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n} - \rho_1 + 1, \; \alpha'_2 = \frac{2}{n} - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_i = \frac{i}{n} - \rho_1 + 1, \ldots \alpha'_{n-1} = \frac{n-1}{n} - \rho_1 + 1,$$

$$\rho'_1 = \rho_2 - \rho_1 + 1, \; \rho'_2 = \rho_3 - \rho_1 + 1, \ldots \rho'_i = \rho_{i+1} - \rho_1 + 1, \ldots \rho'_{n-2} = \rho_{n-1} - \rho_1 + 1.$$

En conséquence, les $n - 1$ solutions multiformes de l'équation (4) sont

$$(57). \quad \ldots \int_{\xi x}^{(0)^n} du \int_{c_{n-2}}^{(1, A_u, \overline{1}, \overline{A}_u)} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2}, 1, \overline{v}_{n-2}, \overline{1})} dv_{n-3} \ldots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Psi dv_1,$$

$$(58). \quad \ldots \int_{\xi x}^{(0)^n} du \int_{c_{n-2}}^{(u, 0, \overline{u}, \overline{0})} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2}, 0, \overline{v}_{n-2}, \overline{0})} dv_{n-3} \ldots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} \Psi dv_1,$$

$$(59). \quad \ldots \int_{\xi x}^{(0)^m} du \int_{c_{n-2}}^{(u, 0, \overline{u}, \overline{0})} dv_{n-2} \ldots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(1, A v_p, \overline{1}, \overline{A} v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 1, \overline{v}_{p-1}, \overline{1})} dv_{p-2} \ldots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Psi dv_1.$$

$$\Psi = e^{n\sqrt[n]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} (v_{n-2} - u)^{\rho_1 - \frac{n-1}{n} - 1} v_{n-2}^{\frac{n-1}{n} - \rho_{n-1}} (v_1 - 1)^{\rho_2 - \frac{1}{n} - 1} \prod_{i=2}^{i=n-2} (v_{i-1} - v_i)^{\rho_{i+1} - \frac{i}{n} - 1} v_{i-1}^{\frac{i}{n} - \rho_i}.$$

A_u et A_{v_p} sont deux circuits comprenant, l'un, l'origine et le point dont l'affixe est u, l'autre, l'origine et le point dont l'affixe est v_p.

Sans aucune difficulté, on déterminerait les valeurs de ces intégrales. Pour trouver la valeur de l'intégrale (59), observons que, v_{p-1} décrivant un circuit entourant l'origine et le point dont l'affixe est v_p, il est permis de

Digitized by Google

développer $(v_{p\ 1} - v_p)^{\rho_{p+1}-\frac{p}{n}-1}$ par la formule du binôme. L'intégrale se décompose ainsi en une série d'intégrales de même forme.

Si l'on fait ensuite les transformations

$$v_1 = 1 - t_1 t_2 \dots t_{p-1},\ v_2 = 1 - t_2 \dots t_{p-1},\ \dots v_{p-1} = 1 - t_{p-1},$$

$$v_p = u t_p t_{p+1} \dots t_{n-2},\ v_{p+1} = u t_{p+1} t_{p+2} \dots t_{n-2},\ \dots v_{n-2} = u t_{n-2},$$

on a, en désignant par I l'intégrale (59),

$$\mathrm{I} = (-1)^{\rho_2 - \frac{1}{n} + p + 1} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{p}{n} - \rho_{p+1} + 1\right]^+_m}{1.2.3 \dots m} \mathfrak{J}_1^{(m)} \mathfrak{J}_2^{(m)},$$

où l'on pose

$$\mathfrak{J}_2^{(m)} = \int_{c_{p-1}}^{(1,0,1,0)} dt_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} dt_{p-2} \dots \int_{c_1}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} \Phi_2 dt_1,$$

$$\mathfrak{J}_1^{(m)} = \int_{c_x}^{(0)^n} du \int_{c_{n-2}}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} dt_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} \Phi_1 dt_p.$$

$$\Phi_2 = t_{p-1}^{\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_p-\frac{1+2+\dots+p-1}{n}-1}(1-t_{p-1})^{\rho_{p+1}-\rho_p-m} \prod_{i=2}^{i=p-1} t_{i-1}^{\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_i-\frac{1+2+3+\dots+i-1}{n}-1}(1-t_{i-1})^{\rho_{i+1}-\frac{i}{n}-1}(1-t_{i-1}t_i\dots t_{p-1})^{\frac{i}{n}-\rho_i}.$$

$$\Phi_1 = e^{n\sqrt{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_{p+1}+m} t_{n-2}^{\frac{n-1}{n}-\rho_{p+1}+m}(t_{n-2}-1)^{\rho_1-\frac{n-1}{n}-1} \prod_{i=p+1}^{i=n-2} t_{i-1}^{\frac{i}{n}-\rho_{p+1}-m}(t_{i-1}-1)^{\rho_{i+1}-\frac{i}{n}-1}.$$

Les intégrales J sont analogues à celles qui ont été considérées au § 15. Soient maintenant

$$l_1 = \rho_{p+1} - \rho_p - m,\ l_2 = \frac{p-1}{n} - \rho_{p-1},\ \dots l_i = \frac{p-i+1}{n} \rho_{p-i+1},\ \dots l_{p-1} = \frac{2}{n} - \rho_2,$$

$$k_1 = \rho_p - \frac{p-1}{n},\ k_2 = \rho_{p-1} - \frac{p-2}{n},\ \dots k_i = \rho_{p-i+1} - \frac{p-i}{n},\ \dots k_{p-1} = \rho_2 - \frac{1}{n};$$

Digitized by Google

en vertu de la formule (32),

$$(60)\quad \left\{ \int_{\xi x}^{(0)''} du \int_{c_{n-2}}^{(u,0,\bar{u},\bar{v})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\bar{v}_{p+1},\bar{v})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(t,\Delta v_p,\bar{t},\bar{\Delta} v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1},t,\bar{v}_{p-1},\bar{t})} dv_{p-2} \cdots \int_{c_1}^{(v_2,t,\bar{v}_2,\bar{t})} \Psi dv_1 \right.$$
$$\left. = C_1 C_2 C_3 C_4 x^{1-\rho_{p+1}} \mathcal{F}(2-\rho_{p+1}, \rho_1-\rho_{p+1}+1, \rho_2-\rho_{p+1}+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_{p+1}+1; x),\right.$$

Si l'on fait

$$C_1 = e^{\pi i\left(1+p+2\rho_p+3\rho_{p-1}+\ldots+(p-1)\rho_3+\rho_2+\frac{(p+1)+(p+2)+\ldots+(n-1)}{n}-\frac{2(p-1)+3(p-2)+\ldots+(p-1)2+p-1}{n}-(n-p-1)\rho_{p+2}\right)},$$

$$C_2 = n^{n-\rho_{p+1}+1}\,\Gamma(n\rho_{p+1}-n)\prod_{i=2}^{i=p-1}\frac{\sin\pi\left[\rho_2+\rho_3+\cdots+\rho_{p-i+2}-\dfrac{(p-i+1)(p-i+2)}{2n}\right]}{\sin\pi(\rho_{p+1}-\rho_{p-i+1})},$$

$$C_3 = \prod_{i=1}^{i=p-1}\mathcal{E}\left(\rho_{p+1}-\rho_{p-i+1}, \rho_{p-i+1}-\frac{p-i}{n}\right),$$

$$C_4 = \mathcal{E}\left(\frac{n-1}{n}-\rho_{p+1}+1, \rho_1-\frac{n-1}{n}\right)\prod_{i=p+1}^{i=n-2}\mathcal{E}\left(\frac{i}{n}-\rho_{p+1}+1, \rho_{i+1}-\frac{i}{n}\right).$$

Par un procédé semblable à celui que nous venons d'employer, on trouve

$$(61)\quad \left\{ \int_{\xi x}^{(0)''} du \int_{c_{n-2}}^{(t,\Delta u,\bar{t},\bar{\Delta} u)} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2},t,\bar{v}_{n-2},\bar{t})} dv_{n-3} \int_{c_{n-4}}^{(v_{n-3},t,\bar{v}_{n-3},\bar{t})} dv_{n-4} \cdots \int_{c_1}^{(v_2,t,\bar{v}_2,\bar{t})} \Psi dv_1 \right.$$
$$\left. = \text{const. } x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x).\right.$$

Si, dans la formule (58), on fait

$$v_1 = ut_1t_2 \ldots t_{n-2},\ v_2 = ut_2t_3 \ldots t_{n-2}, \ldots v_{n-2} = ut_{n-2},$$

la valeur de cette intégrale, à un facteur constant près, équivaut à la fonction

$$x^{1-\rho_2}\mathcal{F}(2-\rho_2, \rho_1-\rho_2+1, \rho_3-\rho_2+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_2+1; x).$$

Digitized by Google

D'après l'équation (26), la solution uniforme de l'équation différentielle (4) est représentée par l'intégrale définie $(n-1)^{uple}$, à doubles circuits,

$$(62). \quad \ldots \quad \int_{L_x}^{(0)^n} du \int_{c_{n-2}}^{(1, A_{ux}, \overline{1}, \overline{A}_{ux})} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2}, 1, \overline{v}_{n-2}, \overline{1})} dv_{n-3} \ldots \int_{c_1}^{(v_2, 1, \overline{v}_2, \overline{1})} \Psi_1 dv_1,$$

où

$$\Psi_1 = e^{n\sqrt[n]{1}} u^{\rho_1 - 2} (v_{n-2} - ux)^{\frac{n-1}{n} - \rho_1} v_{n-2}^{\rho_1 - \rho_{n-1} - \frac{n-1}{n}} (v_1 - 1)^{\rho_2 - \rho_1 + \frac{1}{n} - 1} \prod_{i=2}^{i=n-2} (v_{i-1} - v_i)^{\rho_{i+1} - \rho_i + \frac{i}{n} - 1} v_{i-1}^{\rho_i - \rho_i - \frac{i}{n}}.$$

A_{ux} est un circuit enveloppant l'origine et le point, dont l'affixe est ux.

25. L'emploi de la fonction Ψ permet aussi de représenter la solution uniforme de l'équation différentielle (4) par une intégrale définie $(n-1)^{uple}$. Alors les circuits fermés, parcourus par les variables u, v_i et v_1, se composent des lacets (v_{n-2}), (v_{i-1}), (0) et (1), décrits alternativement dans le sens positif et dans le sens négatif.

Si nous désignons par

$$\theta_1, \ \theta_2, \ \theta_j, \ \ldots \ \theta_n,$$

les n racines de l'unité, et que nous développions la fonction holomorphe

$$\sum_{1}^{i=n} e^{n\theta_i \sqrt[n]{\frac{x}{u}}}$$

suivant les puissances ascendantes de $\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n}}$, on a

$$\mathfrak{I} = \int_{c_1}^{(1, 0, \overline{1}, \overline{0})} v_1^{\frac{n}{2} - \rho_2} (v_1 - 1)^{\rho_2 - \frac{1}{n} - 1} dv_1 \prod_{i=2}^{i=n-2} \left(\int_{c_i}^{(v_{i-1}, 0, \overline{v}_{i-1}, \overline{0})} v_i^{\frac{i+1}{n} - \rho_{i+1}} (v_{i-1} - v_i)^{\rho_{i+1} - \frac{i}{n} - 1} dv_i \right) \int_{c_{n-1}}^{(v_{n-2}, 0, \overline{v}_{n-2}, \overline{0})} \left(\sum_{j=1}^{j=n} e^{n\theta_j \sqrt[n]{\frac{x}{u}}} \right) u^{-\rho_1} (v_{n-2} - u)^{\rho_1 - \frac{n-1}{n} - 1} du$$

$$= \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{n^{nv+1} x^v}{1.2.3 \ldots v} \int_{c_1}^{(1, 0, \overline{1}, \overline{0})} v_1^{\frac{n}{2} - \rho_2} (v_1 - 1)^{\rho_2 - \frac{1}{n} - 1} dv_1 \prod_{i=2}^{i=n-2} \left(\int_{c_i}^{(v_{i-1}, 0, \overline{v}_{i-1}, \overline{0})} v_i^{\frac{i+1}{n} - \rho_{i+1}} (v_{i-1} - v_i)^{\rho_{i+1} - \frac{i}{n} - 1} dv_i \right) \int_{c_{n-1}}^{(v_{n-2}, 0, \overline{v}_{n-2}, \overline{0})} u^{-\rho_1 - v} (v_{n-2} - u)^{\rho_1 - \frac{n-1}{n} - 1} du,$$

en observant que la quantité,

$$\theta_1^v + \theta_2^v \cdots + \theta_j^v + \cdots + \theta_n^v,$$

Digitized by Google

est égale à l'unité ou est nulle, suivant que p est un multiple ou non du nombre n.

Par les transformations,

$$u = v_{n-2}t_{n-1},\ v_{n-2} = v_{n-3}t_{n-2},\ \dots\ v_i = v_{i-1}t_i \dots\ v_2 = v_2 t_2,\ v_1 = t_1,$$

cette intégrale $\mathfrak{z}$ devient

$$\mathfrak{z} = \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{n^{nv+1}x^v}{1.2.3\dots v} \int_{c_1}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_1^{-\rho_2-m}(t_1-1)^{\rho_2-\frac{1}{n}-1}dt_1 \prod_{i=2}^{i=n-1} \int_{c_i}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} t_i^{-m-\rho_{i+1}}(1-t_i)^{\rho_{i+1}-\frac{i}{n}-1}dt_i,$$

si l'on convient de remplacer ρ_n par ρ_1.

Par suite,

$$\mathfrak{z} = e^{\pi i\left(-\rho_2+\frac{n+1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{n^{nv+1}x^v}{1.2.3\dots v} e^{\pi i(n-1)v} \prod_{i=1}^{i=n-1} \mathcal{E}\left(1-\rho_{i+1}+v,\ \rho_{i+1}-\frac{i}{n}\right);$$

finalement

$$(63)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{c_1}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} v_1^{\frac{n}{2}-\rho_2}(v_1-1)^{\rho_2-\frac{1}{n}-1}dv_1 \prod_{i=2}^{i=n-2}\left(\int_{c_i}^{(v_{i-1},0,\overline{v}_{i-1},\overline{0})} v^{\frac{i+1}{n}-\rho_{i+1}}(v_{i-1}-v_i)^{\rho_{i+1}-\frac{i}{n}-1}dv_i\right) \int_{c_{n-1}}^{(v_{n-1},0,\overline{v}_{n-1},\overline{0})} \left(\prod_{j=1}^{j=n} e^{n\theta_j\sqrt{\frac{x}{n}}}\right) u^{-\rho_1}(v_{n-2}-u)^{\rho_1-\frac{n-1}{n}-1}du \\ &\qquad = ne^{\pi i\left(-\rho_2+\frac{n+1}{2}+\frac{1}{n}\right)} \prod_{i=1}^{i=n-1} \mathcal{E}\left(1-\rho_{i+1},\ \rho_{i+1}-\frac{i}{n}\right) \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \dots\ \rho_{n-1};\ x). \end{aligned} \right.$$

26. Si les constantes $\rho_1, \rho_2, \dots\ \rho_{n-1}$ satisfont à certaines inégalités, qu'il est facile de déterminer, les $n-2$ premières intégrales, à double circuit fermé, peuvent être remplacées par des intégrales, à circuit ouvert, ainsi que nous l'avons montré par les équations différentielles du troisième et du quatrième ordre.

Ainsi, si nous convenons de remplacer ρ_n par ρ_1 et que les constantes satisfassent aux conditions

$$\rho_{i+1} - \frac{i}{n} > 0,\ \frac{1}{n} - \rho_2 + 1 > 0 \quad (i = 2, 3, \dots\ n-1),$$

Digitized by Google

la solution de l'équation (4), appartenant à l'exposant $1 - \rho_2$, sera exprimée par l'intégrale multiple

$$I_2 = \int_{\xi x}^{(0)^n} du \int_0^u dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_0^{v_2} \Psi dv_1,$$

la fonction Ψ restant la même que dans le cas général.

Posons

$$v_1 = ut_1t_2 \dots t_{n-2},\ v_2 = ut_2 \dots t_{n-2},\ \dots\ v_i = ut_it_{i+1} \dots t_{n-2},\ \dots\ v_{n-2} = ut_{n-2};$$

d'où

$$I_2 = (-1)^{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\dots+\rho_{n-1}-\frac{3(n-1)}{2}} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\left[\frac{1}{n} - \rho_2 + 1\right]^+_m}{1.2 \dots m} \mathfrak{I}_m,$$

si l'on fait

$$\mathfrak{I}_m = \int_{\xi x}^{(0)^n} e^{n\sqrt[n]{x}} u^{-\rho_2+m} du \prod_{i=2}^{i=n-1} \int_0^1 t_{i-1}^{\frac{i}{n}-\rho_2+m} (1 - t_{i-1})^{\rho_{i+1}-\frac{i}{n}-1} dt_{i-1}.$$

Conséquemment,

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^n} du \int_0^u dv_{n-2} \int_0^{v_{n-2}} dv_{n-3} \dots \int_0^{v} \Psi dv_1 \\ = (-1)^{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_{n-1}-\frac{3(n-1)}{2}} n^{n-n\rho_2+1} \overline{\Gamma}(n\rho_2 - n) \prod_{i=2}^{i=n-1} \mathrm{E}\left(\rho_{i+1} - \frac{i}{n}, \frac{i}{n} - \rho_2 + 1\right) \\ \times x^{1-\rho_2} \mathcal{F}(2 - \rho_2, \rho_1 - \rho_2 + 1, \rho_3 - \rho_2 + 1, \dots \rho_{n-1} - \rho_2 + 1; x). \end{array} \right.$$

27. Si les valeurs des constantes $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_i$ vérifient les relations

$$\rho_1 = \frac{1}{n} + m,\ \rho_2 = \frac{2}{n} + m,\ \dots\ \rho_i = \frac{i}{n} + m,$$

m étant entier positif, l'ordre de multiplicité de certaines intégrales définies, représentant les solutions de l'équation (4), s'abaissera de plusieurs unités.

Digitized by Google

Soit

$$y = x^{1-\rho_i} Z;$$

les constantes de la transformée de l'équation (4) sont respectivement

$$2-\rho_i,\ \rho_1-\rho_i+1,\ \rho_2-\rho_i+1,\ \dots\ \rho_{i-1}-\rho_i+1,\ \rho_{i+1}-\rho_i+1,\ \dots\ \rho_{n-1}-\rho_i+1.$$

Par suite, dans le domaine de l'origine, les $n-1$ solutions de l'équation hypergéométrique du $(n-1)^{me}$ ordre seront :

$$F\left(\rho_i+\frac{1}{n}-1,\ \rho_i+\frac{2}{n}-1,\ \dots\ \rho_i+\frac{n-1}{n}-1;\ \rho_1,\ \rho_2,\ \dots\ \rho_{i-1},\ \rho_{i+1}\dots\rho_{n-1};\ u\right),$$

$$u^{1-\rho_1}F\left(\rho_i-\rho_1+\frac{1}{n},\ \rho_i-\rho_1+\frac{2}{n},\ \dots\ \rho_i-\rho_1+\frac{n-1}{n};\ 2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1,\ \rho_3-\rho_1+1,\ \dots\ \rho_{i-1}-\rho_1+1,\ \rho_{i+1}-\rho_1+1,\ \dots\ \rho_{n-1}-\rho_1+1;\ u\right),$$

. . . . . .

$$u^{1-\rho_{i-1}}F\left(\rho_i-\rho_{i-1}+\frac{1}{n},\ \rho_i-\rho_{i-1}+\frac{2}{n},\ \dots\ \rho_i-\rho_{i-1}+\frac{n-1}{n};\ 2-\rho_{i-1},\ \rho_1-\rho_{i-1}+1,\ \dots\ \rho_{i-2}-\rho_{i-1}+1,\ \rho_{i+1}-\rho_{i-1}+1,\ \dots\ \rho_{n-1}-\rho_{i-1}+1;\ u\right),$$

$$u^{1-\rho_{i+1}}F\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{1}{n},\ \rho_i-\rho_{i+1}+\frac{2}{n},\ \dots\ \rho_i-\rho_{i+1}+\frac{n-1}{n};\ 2-\rho_{i+1},\ \rho_1-\rho_{i+1}+1,\ \dots\ \rho_{i-1}-\rho_{i+1}+1,\ \rho_{i+2}-\rho_{i+1}+1,\ \dots\ \rho_{n-1}-\rho_{i+1}+1;\ u\right),$$

. . . . . .

$$u^{1-\rho_{n-1}}F\left(\rho_i-\rho_{n-1}+\frac{1}{n},\ \rho_i-\rho_{n-1}+\frac{2}{n},\ \dots\ \rho_i-\rho_{n-1}+\frac{n-1}{n};\ 2-\rho_{n-1},\ \rho_1-\rho_{n-1}+1,\ \dots\ \rho_{i-1}-\rho_{n-1}+1,\ \rho_{i+1}-\rho_{n-1}+1,\ \dots\ \rho_{n-2}-\rho_{n-1}+1;\ u\right).$$

La première solution répond à l'intégrale uniforme de l'équation (4) ; les autres correspondent aux solutions multiformes, appartenant aux exposants

$$1-\rho_1,\ 1-\rho_2\ \dots\ 1-\rho_{i-1},\ 1-\rho_{i+1},\ \dots\ 1-\rho_{n-1}.$$

Des hypothèses admises résultent les relations :

$$(65)\qquad \rho_i-1+\frac{n-1}{n}=\rho_{i-1},\ \rho_i-1+\frac{n-2}{n}=\rho_{i-2},\ \dots\ \rho_i-1+\frac{n-i+1}{n}=\rho_1,$$

$$(66).\ \dots\ \dots\ \dots\ \rho_i=\frac{i-k}{n}+\rho_k.$$

Digitized by Google

Pour la p^{me} solution du groupe des $i-1$ premières solutions multiformes de l'équation hypergéométrique, on pourra supposer successivement p égal à $1, 2, 3 \ldots p-1, p+1, \ldots i-1$. Pour le groupe des $n-i$ solutions restantes, il est permis de faire dans la relation (65), k égal à $1, 2, 3 \ldots i-1$. Ainsi les solutions de l'équation hypergéométrique du $(n-1)^{me}$ ordre, appartenant aux exposants 0, $1-\rho_1$, $1-\rho_2$, $\ldots$ $1-\rho_{i-1}$, $1-\rho_{i+1}$ $\ldots$ $1-\rho_{n-1}$, se partagent en deux groupes : le premier comprend $i-1$ intégrales, et le second $n-i$. Les fonctions du premier groupe dégénèrent en séries hypergéométriques du $(n-i+1)^{me}$ ordre, et l'ordre des fonctions du second groupe sera $n-i$. En conséquence, l'ordre de multiplicité des intégrales définies, solutions principales de l'équation (4), sera de $n-i+1$ ou de $n-i$, selon que ces intégrales correspondent aux fonctions hypergéométriques du premier ou du deuxième groupe.

L'ordre des fonctions hypergéométriques multiformes, répondant aux solutions multiformes de l'équation (4), s'abaissera encore d'une unité, si le nombre entier m est égal à 1, car on a généralement

$$\rho_i - \rho_k + \frac{n-i}{n} = 2 - \rho_k.$$

Quant à la solution de l'équation (4), appartenant à l'exposant $1-\rho_i$, elle sera représentée par l'intégrale

$$x^{1-\rho_i} \int_{\varepsilon}^{(0)^n} e^{n\sqrt[n]{1}\, u} u^{-\rho_i} F\left(\frac{2n-1}{n} - \rho_i, \frac{2n-2}{n} - \rho_i, \ldots \frac{n+1}{n} - \rho_i;\ \rho_1 - \rho_i + 1, \rho_2 - \rho_i + 1, \ldots \rho_{n-1} - \rho_i + 1;\ u\right) du.$$

L'ordre de cette fonction hypergéométrique, et par suite l'ordre de multiplicité de cette intégrale, s'abaissera de $i-1$ unités, si le nombre entier m est nul, car on aura

$$\frac{n+1}{n} - \rho_i = \rho_1 - \rho_i + 1, \quad \frac{n+2}{n} - \rho_i = \rho_2 - \rho_i + 1, \ldots \frac{2n-(n-i+1)}{n} - \rho_i = \rho_{i-1} - \rho_i + 1.$$

Digitized by Google

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE

SECONDE ESPÈCE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR

J. BEAUPAIN

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES, DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

SECOND MÉMOIRE

(Présenté à la Classe des sciences dans la séance du 6 juillet 1895.)

Digitized by Google

Digitized by Google

SUR

LES FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

DE

SECONDE ESPÈCE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

CHAPITRE PREMIER.

1. Les fonctions hypergéométriques de première espèce et de n^{me} ordre satisfont à l'une des équations différentielles linéaires :

$$(1)\quad x^{n-1}(x-1)\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-2}(a_1x-b_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+x^{n-i-1}(a_ix-b_i)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}+\cdots+(a_{n-1}x-b_{n-1})\frac{dy}{dx}+a_ny=0,$$

$$(2)\quad x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-2}(a'_1x-b'_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+x^{n-i-1}(a'_ix-b'_i)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}+\cdots+(a'_{n-1}x-b'_{n-1})\frac{dy}{dx}+a'_ny=0,$$

selon que le nombre des constantes du numérateur surpasse d'une unité celui des constantes du dénominateur, ou lui est égal. Ce sont les deux équations fondamentales, à la solution desquelles on ramène indifféremment le problème de l'intégration, par des intégrales définies, de l'équation différentielle linéaire

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{n-1}\dfrac{d^ny}{dx^n}+L_1x^{n-2}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+L_ix^{n-i-1}\dfrac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}}+\cdots+L_{n-1}\dfrac{dy}{dx}= \\ x^m\dfrac{d^my}{dx^m}+K_1x^{m-1}\dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+K_ix^{m-i}\dfrac{d^{m-i}y}{dx^{m-i}}+\cdots+K_{m-1}\dfrac{dy}{dx}+K_my. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

$L_1, L_2, \ldots L_i, \ldots L_{n-1}, K_1, K_2, \ldots K_i, \ldots K_m$ sont des coefficients constants. On sait qu'une solution particulière de cette équation (3) est représentée par la série $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x)$ et que les coefficients L et K sont des fonctions symétriques des α et des ρ.

Dans un premier travail, publié dans les *Mémoires* in-4° de l'Académie de Belgique, nous avons démontré le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si* h *et* g *sont deux constantes convenablement choisies l'intégrale définie,*

$$y = \int_g^h e^{(n-m)(ux)^{\frac{1}{n-m}}} u^{\frac{n-m-1}{n-m}-2} V du,$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (3), *si* V, *qui est une fonction de* u *seulement, satisfait à une équation hypergéométrique d'ordre* n — 1, *possédant deux points singuliers à distance finie.*

2. Dans ce mémoire, notre but est de prouver la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Si* g, h et μ *sont des constantes convenablement choisies, l'intégrale définie*

$$y = \int_g^h e^{(n-m-1)(ux)^{\frac{1}{n-m-1}}} u^{-\mu} V du$$

est une solution principale particulière de l'équation (3), *si* V, *qui est une fonction de* u *seulement, satisfait à une équation hypergéométrique du* $(n-1)^{me}$ *ordre, analogue à l'équation* (2).

Pour faciliter la démonstration, posons d'abord

$$(4). \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = \int_g^h RV du,$$

où, pour abréger, nous faisons

$$R = e^{(n-m-1)ux^{\frac{1}{n-m-1}}}.$$

Digitized by Google

De l'équation (4), par des différentiations successives, et, sous la condition que la fonction à intégrer reste finie le long du chemin d'intégration, nous tirons :

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1+\frac{1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-2+\frac{2}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u^2\,du + a_{1,2}x^{-2+\frac{1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

. . . . . .

$$\frac{d^iy}{dx^i} = x^{-i+\frac{i}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u^i\,du + a_{1,i}x^{-i+\frac{i-1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{R}u^{i-1}\mathrm{V}\,du + \cdots + a_{i-1,i}x^{-i+\frac{1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du,$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = x^{-n+\frac{n}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u^n\,du + a_{1,n}x^{-n+\frac{n-1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u^{n-1}\,du + \cdots + a_{n-1,n}x^{-n+\frac{1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du.$$

Remplaçons ces diverses valeurs dans l'équation (3), après l'avoir multipliée par $x^{1-\frac{1}{n-m-1}}$, et ordonnons suivant les puissances descendantes de $x^{\frac{1}{n-m-1}}$:

$$(5)\quad \begin{cases} x^{\frac{n-1}{n-m-1}} \displaystyle\int_g^h \mathrm{RV}u^n\,du + \mathrm{P}_1 x^{\frac{n-2}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{R}u^{n-1}\mathrm{V}\,du + \cdots + \mathrm{P}_i x^{\frac{n-i-1}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{R}u^{n-i-1}\mathrm{V}\,du + \cdots + \mathrm{P}_{n-1} \int_g^h \mathrm{RV}u\,du = \\ x^{\frac{n-2}{n-m-1}} \displaystyle\int_g^h \mathrm{RV}u^m\,du + \mathrm{Q}_1 x^{\frac{n-3}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{R}u^{m-1}\mathrm{V}\,du + \cdots + \mathrm{Q}_i x^{\frac{n-i-2}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{R}u^{m-i-1}\mathrm{V}\,du + \cdots + \mathrm{Q}_m x^{\frac{n-m-2}{n-m-1}} \int_g^h \mathrm{RV}\,du. \end{cases}$$

J'observe que u est toujours supérieur à $m+2$, car si n est égal à $m+2$, les constantes du numérateur sont au nombre de $n-2$, et celles du dénominateur au nombre de $n-1$.

Maintenant, appliquant la méthode de l'intégration par parties aux différents termes de l'équation (5), qui renferment la variable x, et disposant des constantes g et h, de telle sorte que la partie intégrée s'évanouisse, on a

$$(6)\quad \begin{cases} u^{n-1}\dfrac{d^{n-1}\mathrm{V}}{du^{n-1}} + u^m(\mathrm{R}_1u^{n-m-1} - \mathrm{S}_1)\dfrac{d^{n-2}\mathrm{V}}{du^{n-2}} + u^{m-1}(\mathrm{R}_2u^{n-m-1} - \mathrm{S}_2)\dfrac{d^{n-3}\mathrm{V}}{du^{n-3}} + \cdots \\ + (\mathrm{R}_{m+1}u^{n-m-1} - \mathrm{S}_m)\dfrac{d^{n-m-2}\mathrm{V}}{du^{n-m-2}} + \mathrm{R}_{m+2}u^{n-m-2}\dfrac{d^{n-m-3}\mathrm{V}}{du^{n-m-3}} + \cdots + \mathrm{R}_{n-1}\mathrm{V}u = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Soit

$$u^{n-m-1} = \frac{1}{\varphi};$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{du} = -(n-m-1)\varphi^{1+\frac{1}{n-m-1}},$$

et

$$\frac{dV}{du} = a_{1,1}\varphi^{1+\frac{1}{n-m-1}}\frac{dV}{d\varphi},$$

$$\frac{d^2V}{du^2} = a_{2,1}\varphi^{1+\frac{2}{n-m-1}}\frac{dV}{d\varphi} + a_{2,2}\varphi^{2+\frac{2}{n-m-1}}\frac{d^2V}{d\varphi^2},$$

. . . . . .

$$\frac{d^iV}{du^i} = a_{i,1}\varphi^{1+\frac{i}{n-m-1}}\frac{dV}{d\varphi} + a_{i,2}\varphi^{2+\frac{i}{n-m-1}}\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \cdots + a_{i,i}\varphi^{i+\frac{i}{n-m-1}}\frac{d^iV}{d\varphi^i},$$

. . . . . .

Substituons aux coefficients différentiels

$$\frac{dV}{du}, \frac{d^2V}{du^2}, \cdots \frac{d^iV}{du^i}, \cdots$$

leurs valeurs, exprimées en fonctions des dérivées, par rapport à la nouvelle variable φ; supprimons le facteur $\varphi^{-\frac{1}{n-m-1}}$, commun à tous les termes :

$$(7)\quad \varphi^{n-1}\frac{d^{n-1}V}{d\varphi^{n-1}} + \varphi^{n-2}(a_1\varphi - b_1)\frac{d^{n-2}V}{d\varphi^{n-2}} + \cdots + \varphi^{n-i-1}(a_i\varphi - b_i)\frac{d^{n-i-1}V}{d\varphi^{n-i-1}} + \cdots + a_{n-1}V = 0.$$

Posons enfin

$$V = \varphi^{-\lambda}W,$$

et déterminons λ par la condition, que le coefficient de $u^{-\lambda}W$ soit nul; l'équation transformée, étant divisible par $u^{-\lambda+1}$, prendra la forme

$$(8).\quad . \quad . \quad u^{n-2}\frac{d^{n-1}V}{du^{n-1}} + u^{n-3}(a_1u - b_1)\frac{d^{n-2}V}{du^{n-2}} + \cdots + (a_{n-2}u - b_{n-2})\frac{dV}{du} + a_{n-1}V = 0,$$

si nous remplaçons φ et W par les lettres u et V.

Digitized by Google

De cette analyse, on conclut le théorème, que nous avons énoncé plus haut, si l'on prend $\mu = \lambda + 1 + \frac{1}{n-m-1}$.

3. Jusque maintenant, nous avons admis que les limites g et h étaient des constantes, assujetties à certaines conditions. Si h est variable, la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ résulte de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1+\frac{1}{n-m-1}} \int_g^h e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} V u^{-\frac{1}{n-m-1}-\lambda} du + \left[u^{-\lambda} V e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} \right]_{u=h} \frac{dh}{dx}.$$

Soit ε une quantité infiniment petite et essentiellement positive; soit en outre $h = \varepsilon x$; et convenons d'adopter pour valeur de $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-m-1}$, l'une des déterminations, dont la partie réelle est négative. S'il en est ainsi, il est visible que les dérivées successives de y, par rapport à x, conserveront la

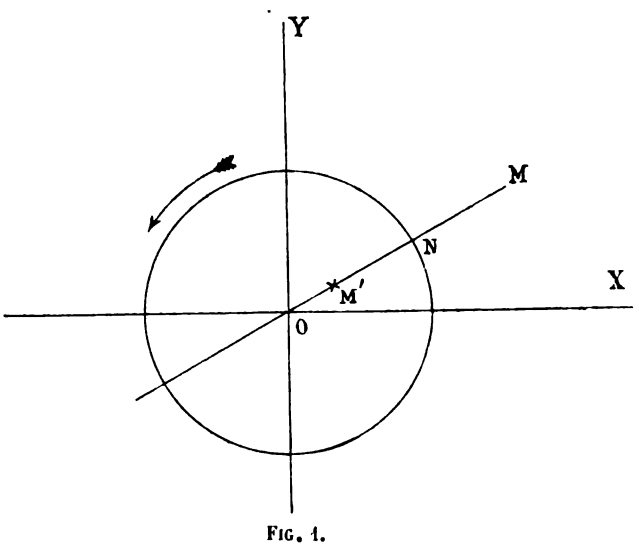


FIG. 1.

même forme que dans le cas, où les limites g et h étaient supposées constantes. Cela posé, si x est l'affixe d'un point M, εx sera l'affixe d'un point M', infiniment voisin de l'origine. Supposons que la variable u, partant du point M' y revienne, après avoir parcouru la ligne M'N dans des directions

Digitized by Google

opposées et décrit $n - m - 1$ fois le lacet (0), dans le sens positif. Après ce circuit, $\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}$ reprendra sa valeur initiale. De plus, nous avons choisi pour la valeur de cette expression, quand on y fait $g = h = \varepsilon x$, une des déterminations, dont la partie réelle est négative. Ainsi, la quantité

$$e^{(n-m-1)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}},$$

décroîtra avec ε au delà de toute limite; et, comme la partie intégrée, pour $u = \varepsilon x$, ne devient infinie qu'à la manière d'une puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$, si l'on choisit pour V une des $(n-1)$ solutions de l'équation auxiliaire, dans le domaine de l'origine, et que chacun de ses termes contient le facteur,

$$e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}},$$

elle s'évanouira identiquement aux limites. En conséquence, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si μ est une constante convenablement choisie, l'intégrale définie,*

$$y = \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-m-1}} e^{(n-m-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-m-1}}} u^{-\mu} V du,$$

est une intégrale particulière de l'équation différentielle (3), *si* V *est une solution, dans le domaine de l'origine, d'une équation hypergéométrique de première espèce et du* $(n-1)^{\text{me}}$ *ordre, ne possédant que ce point singulier à distance finie.*

CHAPITRE II.

4. Dans ce mémoire, nous nous occuperons uniquement de l'équation différentielle linéaire

$$(9). \quad . \quad . \quad x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + L_i x^{n-i-1}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \cdots + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

Digitized by Google

à laquelle satisfont les n séries :

$$\begin{array}{l}
\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x),\\
x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x),\\
x^{1-\rho_2}\mathcal{F}(2-\rho_2, \rho_1-\rho_2+1, \rho_3-\rho_2+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_2+1; x),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{1-\rho_{n-1}}\mathcal{F}(2-\rho_{n-1}, \rho_1-\rho_{n-1}+1, \rho_2-\rho_{n-1}+1, \ldots \rho_{n-2}-\rho_{n-1}+1; x),
\end{array}$$

à la condition cependant qu'aucun des nombres ρ_i et $\rho_i - \rho_k$ ne soit ni nul ni égal à un nombre entier positif ou négatif.

Cette hypothèse exclut l'existence d'intégrales logarithmiques dans le voisinage du point singulier, $x = 0$.

D'après le théorème III, l'intégrale

$$y = \int_{\varepsilon_x}^{(0)^{n-1}} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\lambda} V du$$

est une solution principale particulière de cette équation.

Pour déterminer simplement la constante λ, il suffit d'appliquer à quelques exemples particuliers la méthode, développée ci-dessus.

5. Application I. — Soit l'équation

(10). . . . . . $$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\rho_1 + \rho_2 + 1) x \frac{d^2y}{dx^2} + \rho_1\rho_2 \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Posons

(11). . . . . $$y = \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} V du;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u V du,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^{-\frac{2}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u^2 V du - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u V du,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^{-\frac{3}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u^3 V du - \frac{3}{2} x^{-\frac{4}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u^2 V du + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \int_g^h e^{2u\sqrt{x}} u V du.$$

Digitized by Google

Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (10), puis intégrant par parties, on a

$$\left[\left(\frac{u^3\sqrt{x}}{2}\,\mathrm{V}-\frac{1}{4}\frac{d(u^3\mathrm{V})}{du}+\frac{\rho_1+\rho_2-\frac{1}{2}}{2}u^2\mathrm{V}-\frac{1}{2}\mathrm{V}\right)e^{2u\sqrt{x}}\right]_{u=g}^{u=h}$$

$$+\int_g^h e^{2u\sqrt{x}}\left[2^{\frac{1}{2}}\frac{d^2(u^3\mathrm{V})}{du^2}-\frac{\rho_1+\rho_2-\frac{1}{2}}{2}\frac{d(u^2\mathrm{V})}{du}+\frac{1}{2}\frac{d\mathrm{V}}{du}+\left(\rho_1-\frac{1}{2}\right)\left(\rho_2-\frac{1}{2}\right)u\mathrm{V}\right]du=0.$$

Si nous disposons des limites g et h de telle sorte que la partie intégrée s'évanouisse, l'intégrale définie (11) sera une solution particulière de l'équation différentielle, si V satisfait à l'équation

$$(12).\quad u^2\frac{d^2\mathrm{V}}{du^2}+2\left((7-\rho_1-\rho_2)u^2+1\right)\frac{d\mathrm{V}}{du}+(2\rho_1-3)(2\rho_2-3)u\mathrm{V}=0.$$

Soit maintenant

$$u^2=\frac{1}{\varphi}.$$

Par cette transformation, l'équation (12) devient

$$(13).\quad \varphi^2\frac{d^2\mathrm{V}}{d\varphi^2}+\varphi(\rho_1+\rho_2-2-\varphi)\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}+\left(\frac{3}{2}-\rho_1\right)\left(\frac{3}{2}-\rho_2\right)\mathrm{V}=0;$$

et, dans celle-ci, faisons

$$\mathrm{V}=\varphi^{-\lambda}\mathrm{W}$$

et déterminons λ par la condition que le coefficient de $\varphi^{-\lambda}\mathrm{W}$ soit nul. λ sera une des racines de l'équation

$$\left(\lambda+\frac{3}{2}-\rho_1\right)\left(\lambda+\frac{3}{2}-\rho_2\right)=0.$$

Soit $\lambda=\rho_1-\frac{2}{3}$; l'équation (13) se change en

$$(14).\quad u\frac{d^2\mathrm{V}}{du^2}+(\rho_2-\rho_1+1-u)\frac{d\mathrm{V}}{du}-\left(\frac{3}{2}-\rho_1\right)\mathrm{V}=0,$$

si nous remplaçons φ et W par les lettres u et V.

Digitized by Google

Ainsi, moyennant certaines conditions auxquelles restent assujetties les limites g et h, l'intégrale définie

$$y = \int_g^h e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} V du$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (10), si V satisfait à l'équation (14).

6. APPLICATION II. — Soit

$$(15). \quad \ldots\ldots x^3 \frac{d^4y}{dx^4} + A_1 x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + A_2 x \frac{d^2y}{dx^2} + A_3 \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

où

$$A_1 = 3 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,$$
$$A_2 = 1 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3,$$
$$A_3 = \rho_1\rho_2\rho_3.$$

De la relation

$$y = \int_g^h e^{3u\sqrt[3]{x}} V du,$$

on tire les valeurs des coefficients différentiels successifs

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4},$$

que nous substituerons dans l'équation (15). En suivant la voie déjà indiquée, on trouve que V doit satisfaire à l'équation

$$(16) \begin{cases} \frac{1}{3^3} u^4 \frac{d^3V}{du^3} - \frac{1}{3^2}\left[(\rho_1+\rho_2+\rho_3)u^3 - 1\right] \frac{d^2V}{du^2} + \frac{1}{3}\left[\frac{61}{9} - 3(\rho_1+\rho_2+\rho_3) + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3\right] \frac{dV}{du} \\ - \left(\rho_1 - \frac{4}{3}\right)\left(\rho_2 - \frac{4}{3}\right)\left(\rho_3 - \frac{4}{3}\right) uV = 0, \end{cases}$$

pourvu qu'on ait la condition

$$\left[\left(\begin{array}{l} \frac{u^4V}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{d(u^4V)}{du}\frac{\sqrt[3]{x}}{3^2} + \frac{1}{3^3}\frac{d^2(u^4V)}{du^2} + \frac{\rho_1+\rho_2+\rho_3-1}{3} u^2V\sqrt[3]{x} \\ - \frac{1}{3^2}(\rho_1+\rho_2+\rho_3-1)\frac{d(u^3V)}{du} + \left(\frac{7}{9} - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3\right) u^2V - \frac{\sqrt[3]{x}}{3} V + \frac{1}{3^2}\frac{dV}{du} \end{array}\right) e^{3u\sqrt[3]{x}}\right]_{u=g}^{u=h} = 0.$$

Digitized by Google

Par les transformations successives

$$u^3 = \frac{1}{\varphi} \quad \text{et} \quad V = \varphi^{\frac{4}{3}-\rho_1} W,$$

on ramène l'équation (16) à la suivante

$$u^2 \frac{d^3V}{du^3} + u(\rho_2 + \rho_3 - 2\rho_1 + 3 - u)\frac{d^2V}{du^2} + \left[(\rho_2 - \rho_1 + 1)(\rho_3 - \rho_1 + 1) - 2u(2 - \rho_1)\right]\frac{dV}{du}$$
$$- \left(\frac{4}{3} - \rho_1\right)\left(\frac{5}{3} - \rho_1\right) V = 0,$$

équation vérifiée par la fonction de première espèce

$$F\left(\frac{4}{3} - \rho_1, \frac{5}{3} - \rho_1; \rho_2 - \rho_1 + 1, \rho_3 - \rho_1 + 1; u\right).$$

7. Généralement, si l'équation est du n^{me} ordre, une solution particulière de l'équation différentielle auxiliaire d'ordre $(n - 1)$ sera représentée par la série hypergéométrique de première espèce

$$V = F\left(\begin{matrix} \frac{n}{n-1} - \rho_1, \frac{n+1}{n-1} - \rho_1, \ldots \frac{2n-1}{n-1} - \rho_1; \\ \rho_2 - \rho_1 + 1, \rho_3 - \rho_1 + 1, \ldots \rho_{n-1} - \rho_1 + 1; \end{matrix} u\right).$$

Donc, en vertu du théorème III, une solution particulière de l'équation différentielle (9) sera

$$(17). \quad \ldots \ldots \ldots \quad A = \int_{0x}^{(0)^{n-1}} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1} V du.$$

Par le développement de V en série, A devient

$$A = \sum_{v=0}^{v=\infty} \frac{\left[\frac{n}{n-1} - \rho_1\right]_v^+ \ldots \left[\frac{2n-3}{n-1} - \rho_1\right]_v^+}{1.2.3 \ldots v(\rho_2 - \rho_1 + 1)_v^+ \ldots [\rho_{n-1} - \rho_1 + 1]_v^+} \int_{0x}^{(0)^{n-1}} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1+v} du \ (*).$$

(*) Nous représentons par $[a]_v^+$ le produit $a(a+1)(a+2)\ldots(a+v-1)$.

Digitized by Google

Soit

$$u = x[(n-1)v]^{n-1},$$

d'où

$$du = x(n-1)^n v^{n-2} dv.$$

Quand u parcourt $n-1$ fois le lacet (0), la nouvelle variable v le décrit une seule fois. En conséquence,

$$\int_{(u)} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1+\upsilon} du = (n-1)^{n+(n-1)(\upsilon-\rho_1)} x^{1-\rho_1+\upsilon} \int_{\frac{1}{(\varepsilon)^{\frac{1}{n-1}}}}^{(0)} e^{\frac{1}{v}} v^{(n-1)(\upsilon-\rho_1+1)-1} dv,$$

ou encore

$$\int_{(u)} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1+\upsilon} du = x^{1-\rho_1+\upsilon}(n-1)^{n-(n-1)\rho_1+(n-1)\upsilon} \overline{\Gamma}\big((n-1)(\rho_1-\upsilon-1)\big),$$

puisque nous avons adopté pour valeur de $(\varepsilon)^{\frac{1}{n-1}}$ une des déterminations, dont la partie réelle est négative (*).

Or,

$$\overline{\Gamma}\big((n-1)(\rho_1-1)-(n-1)\upsilon\big) = (-1)^{(n-1)\upsilon} \frac{\overline{\Gamma}\big((n-1)(\rho_1-1)\big)}{[(n-1)\rho_1-n][(n-1)\rho_1-n-1]\ldots[(n-1)(\rho_1-1)-(n-1)\upsilon]}.$$

Ce produit de $(n-1)\upsilon$ facteurs peut être écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
&[(n-1)\rho_1-n][(n-1)\rho_1-2n+1]\ldots[(n-1)\rho_1-(n-1)\upsilon-1]\times\\
&[(n-1)\rho_1-n-1][(n-1)\rho_1-2n]\ldots[(n-1)\rho_1-(n-1)\upsilon-2]\times\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[(n-1)\rho_1-2n+3][(n-1)\rho_1-3n+4]\ldots[(n-1)(\rho_1-1)-(n-1)\upsilon+1]\times\\
&[(n-1)\rho_1-2n+2][(n-1)\rho_1-3n+3]\ldots[(n-1)(\rho_1-1)-(n-1)\upsilon],
\end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{(n-1)\upsilon}(n-1)^{(n-1)\upsilon}\left[\frac{n}{n-1}-\rho_1\right]_\upsilon^+\left[\frac{n+1}{n-1}-\rho_1\right]_\upsilon^+\cdots\left[\frac{2n-3}{n-1}-\rho_1\right]_\upsilon^+[2-\rho_1]_\upsilon^+.$$

(*) POCHHAMMER, *Bemerkungen über das Integral* $\overline{\Gamma}$ (a). (MATHEMATISCHE ANNALEN, tome XLI.)

Digitized by Google

Donc

$$(18)\quad \int_{\infty x}^{(0)^{n-1}} e^{(n-1)\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1} V du = (n-1)^{n-(n-1)\rho_1}\Gamma\left((n-1)(\rho_1-1)\right) x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_1+1; x).$$

8. Quant à l'intégrale uniforme, on peut la représenter de la manière suivante. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$, les racines de l'équation binôme

$$z^{n-1} - 1 = 0,$$

et considérons la fonction

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} e^{(n-1)\alpha_i\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} = e^{(n-1)\alpha_1\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} + e^{(n-1)\alpha_2\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} + \ldots + e^{(n-1)\alpha_{n-1}\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}},$$

laquelle, dans le domaine de l'origine, est uniforme par rapport aux variables u et x.

Le circuit d'intégration de la nouvelle variable u se composera du lacet (0) et de l'axe des x négatifs, parcouru dans des sens opposés. Alors la fonction

$$(19).\ \ldots\ldots\ldots \int_{-\infty}^{x(0)} \sum_{i=1}^{i=n-1} e^{(n-1)\alpha_i\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{n-1}}} u^{-\rho_1} V du$$

représentera la solution uniforme de l'équation (9), si V est une intégrale convenablement choisie d'une équation hypergéométrique de première espèce et du $(n-1)^{me}$ ordre, ne possédant qu'un point singulier à distance finie.

CHAPITRE III.

9. Avant d'aborder la question de la représentation, par des intégrales définies, des solutions principales particulières de l'équation différentielle (9), nous ferons l'étude d'une intégrale définie, à double circuit. Dans le

Digitized by Google

tome CVII du *Journal de Crelle*, M. Pochhammer a traité cette intégrale, mais à un point de vue moins général.

Désignons par K l'intégrale double

$$(20). \quad \ldots \ldots \quad K = \int_{-\infty}^{(0)} v_2^{-a-b-c}\, dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} \varphi(v_1, v_2)\, dv_1,$$

où nous faisons

$$\varphi(v_1, v_2) = e^{v_1} v_1^b (v_2 - v_1)^{c-1}.$$

L'intégration doit s'effectuer d'abord par rapport à v_1 et γ désigne l'affixe d'un point quelconque de la ligne de jonction des lacets (0) et (v_2). Le circuit fermé, décrit par la variable v_2, se compose du lacet (0) et de la partie des x négatifs, parcourue deux fois dans des sens opposés. Marquons sur cet axe deux points, dont les abscisses sont $-p$ et $-q$, p et q étant des quantités positives et considérons l'intégrale définie

$$M = \int_{-q}^{(0)} v_2^{-a-b-c}\, dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} \varphi(v_1, v_2)\, dv_1.$$

q croissant au delà de toute limite, la valeur de M tend vers celle de K. Décomposons cette intégrale M en trois autres :

$$M_1 = \int_{-q}^{-p} v_2^{-a\ \ b-c} dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} \varphi(v_1, v_2)\, dv_1,\quad M_2 = \int_{-p}^{(0)} v_2^{-a-b-c} dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} \varphi(v_1, v_2)\, dv_1,\quad M_3 = \int_{-p}^{-q} v_2^{-a-b\ \ c} dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} \varphi(v_1, v_2)\, dv_1.$$

La valeur de M_2 est finie et déterminée. v_1 entourant successivement l'origine et le point v_2, le module de l'intégrale M_1 est inférieur à

$$e^{\rho} \int_{-q}^{-p} [v_2^{-a-b-c} dv_2] \int_{\epsilon}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} [v_1^b (v_2 - v_1)^{c-1} dv_1],$$

ρ désignant le rayon du lacet (0), décrit par la variable v_2.

Digitized by Google

Soient $a = \alpha + \imath\beta$ et $v_1 = v_2 t$; d'où

$$[M_1] < e^{\rho+\pi\beta} \int_q^p v_2^{-\alpha} dv_2 \int_{\alpha_1}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} [t^b (1-t)^{c-1} dt] \text{ (*)},$$

α_1 étant un nombre compris entre 0 et 1.

Si N représente la quantité finie

$$\int_{\alpha_1}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} [t^b (1-t)^{c-1} dt],$$

on a

$$[M_1] < \frac{e^{\rho+\pi\beta}}{\alpha-1} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{q^{\alpha-1}} \right) N.$$

De la même manière, on trouve que

$$[M_3] < \frac{e^{\rho+3\pi\beta}}{\alpha-1} \left(\frac{1}{q^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}} \right) N.$$

Conséquemment,

$$[M] < [M_2] + \frac{e^{\rho+\pi\beta}(1-e^{2\pi\beta})}{\alpha-1} \left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{q^{\alpha-1}} \right) N.$$

q croissant au delà de toute limite, le module de M tend indéfiniment vers le module de K et l'on a l'inégalité

$$[K] < [M_2] + \frac{e^{\rho+\pi\beta}(1-e^{2\pi\beta})}{\alpha-1} \frac{N}{p^{\alpha-1}},$$

si α est supérieur à l'unité. Ainsi la valeur de l'intégrale (20) est finie et déterminée.

Cela posé, par la transformation $v_1 = v_2 t$, l'intégrale K devient

$$K = \lim_{p=\infty} K_p,$$

où

$$K_p = \int_{-p}^{(0)} v_2^{-a} dv_2 \int_{\alpha_1}^{(1,0,\overline{1},\overline{0})} e^{v_2 t} t^b (1-t)^{c-1} dt.$$

(*) Sur la partie de l'axe des x négatifs, l'argument de la variable v_2 est pris égal à π.

Digitized by Google

Désignons toujours par ρ le rayon du lacet (0), parcouru par la variable v_2, et convenons d'adopter pour valeurs initiales des quantités t^b, $(1-t)^{c-1}$, celles qui correspondent aux déterminations

$$e^{b\log\alpha_1}, \quad e^{(c-1)\log(1-\alpha_1)},$$

les logarithmes étant pris avec leurs parties réelles seulement.

Si les parties réelles, b_1 et c_1, des exposants b et c sont positives,

$$K_p = -4e^{\pi i(b+c)}\sin\pi b\,\sin\pi c\,M_p,$$

si l'on pose

$$M_p = \int_{-p}^{\varepsilon(0)} v_2^{-a}\,dv_2 \int_0^{\varepsilon 1} e^{v_2 t}\,t^b(1-t)^{c-1}\,dt.$$

Il est permis d'intervertir l'ordre des intégrations; donc

$$M_p = \int_0^{\varepsilon 1} t^b(1-t)^{c-1}\,dt \int_{-p}^{\varepsilon(0)} e^{v_2 t}\,v_2^{-a}\,dv_2.$$

On a

$$M_p = L_p + R_p^{(\varepsilon)},$$

$$L_p = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon 1} t^b(1-t)^{c-1}\,dt \int_{-p}^{\varepsilon(0)} e^{v_2 t}\,v_2^{-a}\,dv_2,$$

$$R_p^{(\varepsilon)} = \int_0^{\varepsilon\varepsilon} t^b(1-t)^{c-1}\,dt \int_{-p}^{\varepsilon(0)} e^{v_2 t}\,v_2^{-a}\,dv_2.$$

Or

$$[R_p^{(\varepsilon)}] < \frac{e^{\rho\varepsilon}\varepsilon^{b_1+1}(1-\eta)^{c_1-1}}{b_1+1} \int_{-p}^{\varepsilon(0)} [v_2^{-a}\,dv_2],$$

η étant une valeur moyenne entre 0 et ε.

Mais

$$\int_{-p}^{\varepsilon(0)} [v_2^{-a}\,dv_2] = \frac{e^{\beta\pi}(e^{2\pi\beta}-1)}{\beta\rho^{\alpha-1}} + \frac{e^{\beta\pi}(1-e^{2\pi i\beta})}{\alpha-1}\left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\right);$$

donc

$$[R_p^{(\varepsilon)}] < \frac{e^{\rho\varepsilon}\varepsilon^{b_1+1}(1-\eta)^{c_1-1}}{b_1+1}\left\{\frac{e^{\beta\pi}(e^{2\pi\beta}-1)}{\beta\rho^{\alpha-1}} + \frac{e^{\beta\pi}(1-e^{2\pi i\beta})}{\alpha-1}\left(\frac{1}{p^{\alpha-1}} - \frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\right)\right\}.$$

Digitized by Google

Quelle que soit la valeur de p, le module de $R_p^{(\varepsilon)}$ décroît indéfiniment avec ε. Par la substitution $v_2 t = u$, L_p devient

$$L_p = \int_{\varepsilon}^{1} t^{a+b-1}(1-t)^{c-1}dt \int_{-pt}^{(0)} e^u u^{-a}du;$$

par suite

$$\lim_{p=\infty} M_p = \int_{\varepsilon}^{1} t^{a+b-1}(1-t)^{c-1}dt \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-a}du + R_\infty^{(\varepsilon)}.$$

Finalement

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{1} t^{a+b-1}(1-t)^{c-1}\,t \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-a}du = \int_{0}^{1} t^{a+b-1}(1-t)^{c-1}dt \int_{-\infty}^{(0)} e^u u^{-a}du,$$

et

$$(21)\qquad \int_{-\infty}^{(0)} v_2^{-a-b-c}dv_2 \int_{\gamma}^{(v_2,\,0,\,\bar{v}_2,\,\bar{0})} e^{v_1} v_1^b (v_2 - v_1)^{c-1}dv_1 = e^{-\pi i(b+c)} \frac{\sin \pi b}{\sin \pi(a+b)} \Gamma(1-a)\,\mathcal{E}(a+b, c).$$

Si la partie réelle de a est supérieure à l'unité, l'intégrale K représente une fonction uniforme et continue; donc la formule (21) subsiste, quelles que soient les valeurs de b et de c.

Remarque. — Si $a + b$ est égal à un nombre entier positif m, le second nombre de la formule (21) prend la forme de $\frac{0}{0}$. Mais cette indétermination n'est qu'apparente, car

$$\frac{\mathcal{E}(a+b, c)}{\sin \pi(a+b)} = -\frac{k\pi(a+b+c)}{a+b} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\left(1 - \frac{c}{\nu}\right)\left(1 + \frac{a+b+c}{\nu}\right)}{\left(1 + \frac{a+b}{\nu}\right)};$$

et, pour $a + b = m$, cette expression reste bien déterminée.

Si b est entier négatif, la valeur de l'intégrale est identiquement nulle; si b est entier positif, on pourra supprimer le lacet (0).

10. En général, soit l'intégrale

$$K_{m+1} = \int_{-\infty}^{(0)} s_{m+1}^{-a-b_m-c_m}ds_{m+1} \int_{\gamma_m}^{(s_{m+1},\,0,\,\bar{s}_{m+1},\,\bar{0})} S_m ds_m \cdots \int_{\gamma_\mu}^{(s_{\mu+1},\,0,\,\bar{s}_{\mu+1},\,\bar{0})} S_\mu ds_\mu \cdots \int_{\gamma_1}^{(s_2,\,0,\,\bar{s}_2,\,\bar{0})} e^{s_1} S_1 ds_1,$$

où

$$S_\mu = s_\mu^{b_\mu - b_{\mu-1} - c_{\mu-1}}(s_{\mu+1} - s_\mu)^{c_{\mu-1}}.$$

Digitized by Google

On suppose que b_0 et c_0 sont nuls.

Cette intégrale a un sens bien déterminé, si la partie réelle de a est supérieure à l'unité.

Par les substitutions,

$$s_1 = s_2 t_1,\ s_2 = s_3 t_2,\ \ldots\ s_\mu = s_{\mu+1} t_\mu,\ \ldots\ s_m = s_{m+1} t_m,\ s_{m+1} = t_{m+1},$$

cette intégrale devient

$$K_{m+1} = \lim_{p=\infty} K_{m+1}^{(p)}$$

où

$$K_{m+1}^{(p)} = \int_{-p}^{(0)} t_{m+1}^{a} dt_{m+1} \int_{\alpha_m}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} \sum_m dt_m \ldots \int_{\alpha_\mu}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} \sum_\mu dt_\mu \ldots \int_{\alpha_1}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} e^{t_1 t_2 \ldots t_{m+1}} \sum_1 dt_1,$$

si l'on fait

$$\sum_\mu = t_\mu^{b_\mu} (1 - t_\mu)^{c_\mu - 1},$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ étant des nombres compris entre 0 et 1.

Si la partie réelle des exposants b_μ et c_μ est positive,

$$K_{m+1}^{(p)} = 4^m (-1)^m \prod_{\mu=1}^{\mu=m} e^{\pi i (b_\mu + c_\mu)} \sin \pi b_\mu \sin \pi c_\mu \int_{-p}^{(0)} t_{m+1}^{a} dt_{m+1} \int_0^1 \sum_m dt_m \ldots \int_0^1 \sum_\mu dt_\mu \ldots \int_0^1 e^{t_1 t_2 \ldots t_{m+1}} \sum_1 dt_1.$$

Par le procédé, que nous avons développé plus haut, on prouve ensuite qu'on peut intervertir l'ordre des intégrations; donc

$$K_{m+1} = 4^m (-1)^m \bar{\Gamma}(1 - a) \prod_{\mu=1}^{\mu=m} e^{\pi i (b_\mu + c_\mu)} \sin \pi b_\mu \sin \pi c_\mu \, E(a + b_\mu, c_\mu);$$

puis, en vertu de la formule connue :

$$\mathcal{E}(a + b_\mu, c_\mu) = -4 \sin \pi (a + b_\mu) \sin \pi c_\mu \, E(a + b_\mu, c_\mu),$$

$$(22). \quad \ldots \quad K_{m+1} = \bar{\Gamma}(1 - a) \prod_{\mu=1}^{\mu=m} e^{\pi i (b_\mu + c_\mu)} \frac{\sin \pi b_\mu}{\sin \pi (a + b_\mu)} \mathcal{E}(a + b_\mu, c_\mu).$$

Cette formule est vraie, quelles que soient les valeurs des exposants b_μ et c_μ, à la condition cependant que la partie réelle de a soit supérieure à l'unité.

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

11. Avant de traiter dans sa généralité la question de la représentation, par des intégrales définies, des n solutions particulières principales de l'équation différentielle linéaire (9), il ne sera pas inutile d'examiner spécialement les deux cas particuliers, dont nous avons déjà fait une étude dans notre premier mémoire.

12. Soit l'équation

$$(23). \quad \ldots \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + (\rho_1 + \rho_2 + 1)\, x \frac{d^2y}{dx^2} + \rho_1\rho_2 \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

Les intégrales multiformes de cette équation seront représentées par la formule

$$\int_{t_x}^{(0)^g} e^{z\sqrt{\frac{x}{u}}} u^{-\rho_1} V du,$$

si V satisfait à l'équation différentielle linéaire.

$$(24) \quad \ldots \quad u \frac{d^2V}{du^2} + (\rho_2 - \rho_1 + 1 - u) \frac{dV}{du} - \left(\frac{3}{2} - \rho_1\right) V = 0.$$

En conséquence, les intégrales multiformes de l'équation (23) seront

$$A_1 = \int_{t_x}^{(0)^g} dv \int_{-\infty}^{(0,\, v)} \Phi(u, v, x) du,$$

$$A_2 = \int_{t_x}^{(0)^g} dv \int_{r}^{(v,\, 0,\, \overline{v},\, \overline{0})} \Phi(u, v, x) du,$$

où nous posons

$$\Phi(u, v, x) = e^{z\sqrt{\frac{x}{v}}} e^u v^{-\rho_1} (u - v)^{\rho_1 - \frac{3}{2}} u^{\frac{1}{2} - \rho_2}.$$

Dans l'intégrale A_1, on suppose que le chemin d'intégration de la

Digitized by Google

variable u se compose, d'une part, d'une circonférence, décrite du point $u=0$ comme centre, laquelle entoure complètement la ligne d'intégration de la variable v, et d'autre part, de la partie des x négatifs, située à l'extérieur de ce cercle et parcourue deux fois en des sens opposés.

Ainsi le facteur $(u-v)^{\rho_1-\frac{3}{2}}$ est développable par la formule du binôme :

$$u^{\rho_1-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{v}{u}\right)^{\rho_1-\frac{3}{2}}=u^{\rho_1-\frac{3}{2}}\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]_\nu^{+}}{1.2.3\ldots\nu}\frac{v^\nu}{u^\nu}.$$

Cette série converge, puisque, dans notre hypothèse, le module de u est supérieur à celui de v. L'intégrale A_1 devient ainsi

$$A_1=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]_\nu^{+}}{1.2.3\ldots\nu}G_\nu,$$

où nous faisons

$$G_\nu=\int_{4x}^{(0)^2}e^{2\sqrt{\frac{x}{v}}}v^{-\rho_1+\nu}dv\int_{-\infty}^{(0)}e^u u^{\rho_1-\rho_2-\nu-1}du.$$

Soit maintenant

$$v=4xt^2;$$

d'où

$$G_\nu=2^{3-2\rho_1+2\nu}x^{1-\rho_1+\nu}\int_{\frac{-\sqrt{\varepsilon}}{2}}^{(0)}e^{\frac{1}{t}}t^{1-2\rho_1+2\nu}dt\int_{-\infty}^{(0)}e^u u^{\rho_1-\rho_2-\nu-1}du,$$

c'est-à-dire,

$$G_\nu=2^{3-2\rho_1+2\nu}x^{1-\rho_1+\nu}\,\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2-\nu)\,\overline{\Gamma}(2\rho_1-2-2\nu).$$

Mais on sait que

$$\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2-\nu)=\frac{\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1+1)(\rho_2-\rho_1+2)\ldots(\rho_2-\rho_1+\nu)},$$

et que

$$2^{2\nu}\,\overline{\Gamma}(2\rho_1-2-2\nu)=\frac{\overline{\Gamma}(2\rho_1-2)}{\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]_\nu^{+}[2-\rho_1]_\nu^{+}};$$

Digitized by Google

donc

$$G_\upsilon = 2^{3-2\rho_1}\,\frac{\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)\,\overline{\Gamma}(2\rho_1-2)}{1.2.3\ldots\upsilon\,[2-\rho_1]^+_\upsilon\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]^+_\upsilon},$$

et

$$(25)\qquad \int_{t_0}^{(0)^2} dv \int_{-\infty}^{(0,v)} \Phi(u,v,x)\,du = 2^{3-2\rho_1}\,\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)\,\overline{\Gamma}(2\rho_1-2)\,x^{1-\rho_1}\,\mathcal{F}(2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1;\ x).$$

Pour développer l'intégrale A_2 suivant les puissances croissantes de x, nous introduisons deux nouvelles variables t_1 et t_2, liées aux anciennes par les relations

$$v = 4xt_2^2,\quad u = vt_1,$$

d'où

$$u = 4xt_1t_2^2 \quad\text{et}\quad du = 4xt_2^2\,dt_1.$$

Alors l'intégrale A_2 devient

$$2^{3-2\rho_2}x^{1-\rho_2}\int_{\frac{-\sqrt{\varepsilon}}{2}}^{(0)_1} e^{t_2^2}\,t_2^{1-2\rho_2}\,dt_2 \int_{\varepsilon}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})} e^{4xt_1t_2^2}\,(t_1-1)^{\rho_1-\frac{3}{2}}\,t_1^{\frac{1}{2}-\rho_2}\,dt_1.$$

Si l'on substitue à $e^{4xt_1t_2^2}$ la série

$$1 + \frac{4xt_1t_2^2}{1} + \cdots + \frac{(4xt_1t_2^2)^\upsilon}{1.2.3\ldots\upsilon} + \cdots,$$

on a

$$A_2 = 2^{3-2\rho_2}x^{1-\rho_2}\sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{2^{2\upsilon}x^\upsilon}{1.2.3\ldots\upsilon}\int_{\frac{-\sqrt{\varepsilon}}{2}}^{(0)_1} e^{t_2^2}\,t_2^{1-2\rho_2+2\upsilon}\,dt_2\int_{\varepsilon}^{(1,0,\bar{1},\bar{0})}(t_1-1)^{\rho_1-\frac{3}{2}}\,t_1^{\frac{1}{2}-\rho_2+\upsilon}\,dt_1,$$

ou

$$A_2 = 2^{3-2\rho_2}e^{\pi i\left(\frac{1}{2}-\rho_2\right)}x^{1-\rho_2}\sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{e^{\pi i\upsilon}2^{2\upsilon}x^\upsilon}{1.2\ldots\upsilon}\,\mathcal{E}\left(\frac{3}{2}-\rho_2+\upsilon,\ \rho_1-\frac{1}{2}\right)\overline{\Gamma}(2\rho_2-2-2\upsilon).$$

Or

$$\mathcal{E}\left(\frac{3}{2}-\rho_2+\upsilon,\ \rho_1-\frac{1}{2}\right) = (-1)^\upsilon\,\frac{\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]^+_\upsilon}{[\rho_1-\rho_2+1]^+_\upsilon}\,\mathcal{E}\left(\frac{3}{2}-\rho_2,\ \rho_1-\frac{1}{2}\right).$$

$$2^{2\upsilon}\overline{\Gamma}(2\rho_2-2-2\upsilon) = \frac{\overline{\Gamma}(2\rho_2-2)}{\left[\frac{3}{2}-\rho_1\right]^+_\upsilon[2-\rho_2]^+_\upsilon};$$

Digitized by Google

par suite,

$$(26)\quad \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{c}^{(v,\,0,\,\bar{v},\,\bar{0})} \phi(u, v, x)\,du = 2^{3-2\rho_2}\,\bar{\Gamma}(2\rho_2 - 2)\,\mathcal{E}\left(\frac{3}{2} - \rho_2,\ \rho_1 - \frac{1}{2}\right) x^{1-\rho_2}\,\mathcal{F}(2 - \rho_2,\ \rho_1 - \rho_2 + 1;\ x).$$

13. La solution uniforme de l'équation (23) sera représentée par l'intégrale définie

$$B = \int_{-\infty}^{(0)} \left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v}}} + e^{-2\sqrt{\frac{x}{v}}}\right) v^{-\rho_1}\,dv \int_{c}^{(v,\,0,\,\bar{v},\,\bar{0})} e^{u}\,u^{\frac{1}{2}-\rho_2}(u - v)^{\rho_1 - \frac{3}{2}}\,du,$$

si la partie réelle de ρ_2 est supérieure à l'unité. Par le développement de

$$\left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v}}} + e^{-2\sqrt{\frac{x}{v}}}\right)$$

suivant les puissances ascendantes de $\frac{x}{v}$, on a

$$B = 2\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{2^{2\nu}x^{\nu}}{1.2.3\ldots 2\nu} \int_{-\infty}^{(0)} v^{-\rho_1-\nu}\,dv \int_{c}^{(v,\,0,\,\bar{v},\,\bar{0})} e^{u}\,u^{\frac{1}{2}-\rho_2}(u - v)^{\rho_1 - \frac{3}{2}}\,du;$$

puis, en vertu de la formule (21), cette intégrale devient

$$(27)\ldots \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{(0)} \left(e^{2\sqrt{\frac{x}{v}}} + e^{-2\sqrt{\frac{x}{v}}}\right) v^{-\rho_1}\,dv \int_{c}^{(v,\,0,\,\bar{v},\,\bar{0})} e^{u}\,u^{\frac{1}{2}-\rho_2}(u - v)^{\rho_1 - \frac{3}{2}}\,du \\ &= 2e^{\pi i\left(2\rho_1 - \rho_2 + \frac{1}{2}\right)} \sin\pi\left(\frac{1}{2} - \rho_2\right) \bar{\Gamma}(1 - \rho_2)\,\mathcal{E}\left(\frac{1}{2},\ \rho_1 - \frac{1}{2}\right) \mathcal{F}(\rho_1,\ \rho_2;\ x). \end{aligned}\right.$$

14. Remarque. — Si les constantes ρ_1 et ρ_2 satisfont aux conditions

$$\frac{3}{2} - \rho_2 > 0,\quad \rho_1 - \frac{1}{2} > 0,$$

Digitized by Google

l'une des solutions multiformes peut être représentée par l'intégrale définie

$$(28).\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\ell x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{v}}} v^{-\rho_3} dv \int_0^v e^u (u-v)^{\rho_1-\frac{5}{3}} u^{\frac{4}{3}-\rho_2} du \\ = e^{\pi i\left(\rho_1+\frac{4}{3}\right)} 2^{3-2\rho_2}\,\Gamma(2\rho_2-2)\,\mathrm{E}\left(\frac{3}{2}-\rho_2,\ \rho_1-\frac{1}{2}\right) x^{1-\rho_2}\,\mathcal{F}(2-\rho_2,\ \rho_1-\rho_2+1;\ x). \end{array} \right.$$

15. APPLICATION II. — Soit l'équation

$$(29)\quad x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\rho_1+\rho_2+\rho_3+3)x^3\frac{d^3y}{dx^3}+(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3+\rho_1+\rho_2+\rho_3+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\rho_1\rho_2\rho_3\frac{dy}{dx}-y=0,$$

dont les solutions multiformes seront

$$(30).\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle A_1=\int_{\ell x}^{(0)^3} dv_3 \int_{c_2}^{(v_3,\,0,\,\bar v_3,\,\bar 0)} dv_2 \int_{-\infty}^{(0,\,v_2)} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1, \\ \displaystyle A_2=\int_{\ell x}^{(0)^3} dv_3 \int_{c_2}^{(v_3,\,0,\,\bar v_3,\,\bar 0)} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar v)} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1, \\ \displaystyle A_3=\int_{\ell x}^{(0)^3} dv_3 \int_{-\infty}^{(0,\,v_3)} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar 0)} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1, \end{array} \right.$$

où

$$\Phi(v_1, v_2, v_3, x)=(v_2-v_3)^{\rho_1-\frac{5}{3}} v_2^{\frac{2}{3}-\rho_3} (v_1-v_2)^{\rho_3-\frac{4}{3}} v_1^{\frac{1}{3}-\rho_2} e^{v_1} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}} v_3^{-\rho_1}.$$

Dans l'intégrale A_1, le module de v_1 est supérieur à celui de v_2; on pourra donc développer le facteur $(v_1-v_2)^{\rho_3-\frac{4}{3}}$ par la formule du binôme. Puis, par les substitutions,

$$v_2=v_3 t_1,\quad v_3=x(3t_2)^3,$$

$$A_1=3^{4-3\rho_3} x^{1-\rho_3} \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{3^{3\upsilon}\left[\frac{4}{3}-\rho_3\right]^+_\upsilon}{1.2.3\ldots\upsilon} x^\upsilon G_\upsilon,$$

où

$$G_\upsilon=\int_{\frac{\sqrt[3]{4}}{3}}^{(0)_1} e^{t_2^3} t_2^{2+3\upsilon-3\rho_3}\,dt_2 \int_{c_1}^{(1,\,0,\,\bar 1,\,\bar 0)} (t_1-1)^{\rho_1-\frac{5}{3}} t_1^{\frac{2}{3}-\rho_3+\upsilon}\,dt_1 \int_{-\infty}^{(0)} e^{v_1} v_1^{\rho_3-\rho_2-\upsilon-1}\,dv_1.$$

Digitized by Google

Ainsi

$$G_\upsilon = e^{\pi i\left(\frac{2}{3}-\rho_3+\upsilon\right)}\overline{\Gamma}(3\rho_3 - 3\upsilon - 3)\overline{\Gamma}(\rho_3 - \rho_2 - \upsilon)\,\mathcal{E}\left(\frac{5}{3} - \rho_3 + \upsilon,\ \rho_1 - \frac{2}{3}\right).$$

En conséquence,

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\varepsilon x}^{(0)^3} dv_3 \int_{v_2}^{(v_3,\,0,\,\overline{v}_3,\,\overline{0})} dv_2 \int_{-\infty}^{(0,\,v_2)} \psi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\left(\frac{2}{3}-\rho_3\right)} 3^{4-3\rho_3}\overline{\Gamma}(3\rho_3 - 3)\overline{\Gamma}(\rho_3 - \rho_2)\,\mathcal{E}\left(\frac{5}{3} - \rho_3,\ \rho_1 - \frac{2}{3}\right) x^{4-\rho_3}\mathcal{F}(2 - \rho_3,\ \rho_1 - \rho_3 + 1,\ \rho_2 - \rho_3 + 1;\ x). \end{array}\right.$$

Pour développer la deuxième intégrale (30), on remplacera e^{v_1} par la série exponentielle; par suite,

$$A_2 = \sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \frac{G_\upsilon}{1.2.3\ldots\upsilon},$$

si nous désignons par G_v l'intégrale,

$$\int_{\varepsilon x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}} v_3^{-\rho_1}\,dv_3 \int_{v_2}^{(v_3,\,0,\,\overline{v}_3,\,\overline{0})} (v_2 - v_3)^{\rho_1 - \frac{5}{3}} v_2^{\frac{2}{3}-\rho_3}\,dv_2 \int_{v_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} (v_1 - v_2)^{\rho_3 - \frac{4}{3}} v_1^{\frac{1}{3}-\rho_2+\upsilon}\,dv_1.$$

Soient maintenant

$$v_1 = v_2 t_1,\ v_2 = v_3 t_2,\ v_3 = x(3t_3)^3;$$

alors

$$G_\upsilon = 3^{4-3\rho_2+3\upsilon} x^{4-\rho_2+\upsilon} \int_{\frac{\sqrt[3]{\varepsilon}}{3}}^{(0)} e^{t_3^3} t_3^{3\upsilon-3\rho_2+2}\,dt_3 \int_{v_2}^{(1,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} (t_2 - 1)^{\rho_1 - \frac{5}{3}} t_2^{\frac{2}{3}-\rho_2+\upsilon}\,dt_2 \int_{v_1}^{(1,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} (t_1 - 1)^{\rho_3 - \frac{4}{3}} t_1^{\frac{1}{3}-\rho_2+\upsilon}\,dt_1,$$

ou bien

$$G_\upsilon = 3^{4-3\rho_2+3\upsilon} x^{4-\rho_2+\upsilon} e^{\pi i(1-2\rho_2)}\overline{\Gamma}(3\rho_2 - 3\upsilon - 3)\,\mathcal{E}\left(\frac{5}{3} - \rho_2 + \upsilon,\ \rho_1 - \frac{2}{3}\right)\mathcal{E}\left(\frac{4}{3} - \rho_2 + \upsilon,\ \rho_3 - \frac{1}{3}\right).$$

Digitized by Google

En conséquence,

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathfrak{E}x}^{(0)^3} dv_3 \int_{c_2}^{(v_3,\,0,\,\overline{v}_3,\,\overline{0})} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{v})} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i(1-2\rho_2)} 3^{4-3\rho_2}\,\overline{\Gamma}(3\rho_2-3)\,\mathcal{E}\left(\frac{4}{3}-\rho_2, \rho_3-\frac{1}{3}\right)\mathcal{E}\left(\frac{5}{3}-\rho_2, \rho_1-\frac{2}{3}\right) x^{1-\rho_2}\,\mathcal{F}(2-\rho_2, \rho_1-\rho_2+1, \rho_3-\rho_2+1; x). \end{array}\right.$$

Dans la troisième intégrale, il est permis de développer $(v_2 - v_3)^{\rho_1 - \frac{5}{3}}$ par la formule du binôme. Appelons encore G_v l'intégrale,

$$\int_{\mathfrak{E}x}^{(0)^3} e^{3\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}} v_3^{-\rho_1+v}\,dv_3 \int_{-\infty}^{(0)} v_2^{\rho_1-\rho_3-v-1}\,dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} e^{v_1} v_1^{\frac{4}{3}-\rho_2} (v_1 - v_2)^{\rho_3-\frac{4}{3}}\,dv_1.$$

En vertu de la formule (21) :

$$G_v = e^{\pi i\left(2\rho_3-\rho_2+\frac{2}{3}\right)} 3^{4-3\rho_1+3v}\,\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{3}-\rho_2\right)}{\sin\pi\left(\frac{4}{3}-\rho_1+v\right)}\,\overline{\Gamma}(3\rho_1-3v-3)\,\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2-v)\,\mathcal{E}\left(\frac{4}{3}-\rho_1+v, \rho_3-\frac{1}{3}\right);$$

par suite,

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathfrak{E}x}^{(0)^3} dv_3 \int_{-\infty}^{(0,\,v_3)} dv_2 \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{v})} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\left(2\rho_3-\rho_2+\frac{2}{3}\right)} 3^{4-3\rho_1}\,\dfrac{\sin\pi\left(\frac{1}{3}-\rho_2\right)}{\sin\pi\left(\frac{4}{3}-\rho_1\right)}\,\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)\,\mathcal{E}\left(\frac{4}{3}-\rho_1, \rho_3-\frac{1}{3}\right)\overline{\Gamma}(3\rho_1-3)\,x^{1-\rho_1}\,\mathcal{F}(2-\rho_1, \rho_2-\rho_1+1, \rho_3-\rho_1+1; x), \end{array}\right.$$

si la partie réelle de ρ_2 est supérieure à celle de ρ_1.

16. Si les constantes ρ_1, ρ_2, ρ_3 satisfont aux inégalités

$$\frac{5}{3} > \rho_3 > \frac{1}{3},\quad \frac{4}{3} > \rho_2,\quad \frac{4}{3} > \rho_1 > \frac{2}{3},$$

Digitized by Google

on peut remplacer les intégrales (30) par les suivantes :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^3} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_{-\infty}^{(0,\,v_2)} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\left(\rho_1+\frac{1}{3}\right)}\overline{\Gamma}(\rho_3-\rho_2)\overline{\Gamma}(3\rho_3-3)\,\mathrm{E}\left(\frac{5}{3}-\rho_3,\ \rho_1-\frac{2}{3}\right)3^{4-3\rho_3}x^{1-\rho_3}\mathcal{F}(2-\rho_3,\ \rho_1-\rho_3+1,\ \rho_2-\rho_3+1;\ x), \end{array}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0^3} dv_3 \int_{-\infty}^{(0,\,v_3)} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i\left(\rho_3+\frac{2}{3}\right)}3^{4-3\rho_1}\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)\overline{\Gamma}(3\rho_1-3)\,\mathrm{E}\left(\frac{4}{3}-\rho_1,\ \rho_3-\frac{1}{3}\right)x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1,\ \rho_3-\rho_1+1;\ x). \end{array}\right.$$

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^3} dv_3 \int_0^{v_3} dv_2 \int_0^{v_2} \Phi(v_1, v_2, v_3, x)\,dv_1 \\ = e^{\pi i(\rho_1+\rho_3+1)}3^{4-3\rho_2}\overline{\Gamma}(3\rho_2-3)\,\mathrm{E}\left(\frac{5}{3}-\rho_2,\ \rho_1-\frac{2}{3}\right)\mathrm{E}\left(\frac{4}{3}-\rho_2,\ \rho_3-\frac{1}{3}\right)x^{1-\rho_2}\mathcal{F}(2-\rho_2,\ \rho_1-\rho_2+1,\ \rho_3-\rho_2+1;\ x). \end{array}\right.$$

17. Si $1, \alpha_1, \alpha_2$ sont les racines de l'équation binôme

$$z^3 - 1 = 0,$$

l'intégrale uniforme de l'équation (29) sera

$$\mathrm{B} = \int_{-\infty}^{(t)} \left(e^{\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}} + e^{\alpha_1\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}} + e^{\alpha_2\sqrt[3]{\frac{x}{v_3}}}\right) v_3^{-\rho_1}\,dv_3 \int_{v_2}^{(v_3,\,0,\,\overline{v_3},\,\overline{0})} dv_2 \int_{v_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v_2},\,\overline{0})} \Phi(v_1, v_2, v_3)\,dv_1,$$

où

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = (v_2 - v_3)^{\rho_1-\frac{5}{3}} v_2^{\frac{2}{3}-\rho_3}(v_1 - v_2)^{\rho_3-\frac{4}{3}} v_1^{\frac{1}{3}-\rho_2} e^{v_1}.$$

En vertu des propriétés bien connues des racines des équations binômes, on a

$$\mathrm{B} = 3\sum_{\upsilon=1}^{\upsilon=\infty} \frac{3^{3\upsilon}x^{\upsilon}}{1.2.3\ldots 3\upsilon} \int_{-\infty}^{(0)} v_3^{-\rho_1-\upsilon}\,dv_3 \int_{v_2}^{(v_3,\,0,\,\overline{v_3},\,\overline{0})} (v_2 - v_3)^{\rho_1-\frac{5}{3}} v_2^{\frac{2}{3}-\rho_3}\,dv_2 \int_{v_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v_2},\,\overline{0})} (v_1 - v_2)^{\rho_3-\frac{4}{3}} v_1^{\frac{1}{3}-\rho_2} e^{v_1}\,dv_1.$$

Digitized by Google

D'après la formule (22),

$$b_1 = \frac{1}{3} - \rho_2, \quad b_2 = \frac{2}{3} - \rho_2, \quad c_1 = \rho_3 - \frac{1}{3}, \quad c_2 = \rho_1 - \frac{2}{3}, \quad a = \rho_2 + \upsilon;$$

d'où

$$(57)\quad B = 3e^{\pi i(2\rho_1+2\rho_3-2\rho_2+1)} \frac{\sin\pi\left(\frac{1}{3}-\rho_2\right)\sin\pi\left(\frac{2}{3}-\rho_2\right)}{\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}} \Gamma(1-\rho_2)\mathcal{E}\left(\frac{1}{3}, \rho_3-\frac{1}{3}\right)\mathcal{E}\left(\frac{2}{3}, \rho_1-\frac{2}{3}\right)\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \rho_3; x).$$

CHAPITRE V.

18. Si, avec M. Pochhammer, nous désignons par $\Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)$ la fonction

$$e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_{n-1}^{-\rho_1}(v_{n-2}-v_{n-1})^{\rho_1-\frac{2n-3}{n-1}} v_{n-2}^{\frac{2n-3}{n-1}-\rho_{n-1}-1} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-3} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{k+2}-\frac{n+k-1}{n-1}} v_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_{k+1}},$$

les $(n-1)$ solutions multiformes de l'équation (9) pourront s'exprimer par les intégrales définies

$$(58)\quad \int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} \Phi(v_1, v_2, v_3, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1,$$

$$(59)\quad \int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{-\infty}^{(0, v_{n-1})} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2}, 0, \overline{v}_{n-2}, \overline{0})} dv_{n-3} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1,$$

$$(40)\quad \int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{0})} dv_p \int_{-\infty}^{(0, v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 0, \overline{v}_{p-1}, \overline{0})} dv_{p-2} \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{0})} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1.$$

Si l'on fait successivement p égal à 2, 3, ... $n-2$, la formule (40) donnera le groupe des solutions multiformes, appartenant aux exposants $1-\rho_3$, $1-\rho_4$, ... $1-\rho_{n-1}$.

Digitized by Google

Pour trouver la valeur de cette intégrale (40), observons que la fonction Φ contient le facteur $(v_{p-1} - v_p)^{\rho_{p+1} - \frac{n+p-2}{n-1}}$, lequel peut être développé par la formule du binôme. Cette intégrale se décompose en une série, dont le terme général est égal, à un facteur numérique près, au produit de deux intégrales définies H_v et G_v; et les ordres de multiplicité de ces intégrales sont respectivement $p - 1$ et $n - p$. Ainsi

$$H_v = \int_{-\infty}^{(0)} v_{p-1}^{\rho_{p+1} - \rho_p - v - 1} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 0, \overline{v}_{p-1}, \overline{v})} dv_{p-2} \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \overline{v}_2, \overline{v})} \Phi_1(v_1, v_2, \dots v_{p-2}) dv_1,$$

$$G_v = \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1}, 0, \overline{v}_{n-1}, \overline{v})} dv_{n-1} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \overline{v}_{p+1}, \overline{v})} \Phi_2(v_p, v_{p+1}, \dots v_{n-1}, x) dv_p,$$

où, pour abréger, nous faisons

$$\Phi_1(v_1, v_2, \dots v_{p-1}) = \prod_{k=1}^{k=p-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{k+2} - \frac{k}{n-1} - 1} v_k^{\frac{k}{n-1} - \rho_{k+1}},$$

$$\Phi_2(v_p, v_{p+1}, \dots v_{n-1}, x) = e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_{n-1}^{-\rho_1} (v_{n-2} - v_{n-1})^{\rho_1 - \frac{n-2}{n-1} - 1} v_{n-2}^{\frac{n-2}{n-1} - \rho_{n-1}} e^{v_1} v_p^{v} \prod_{k=p}^{k=n-3} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{k+2} - \frac{k}{n-1} - 1} v_k^{\frac{k}{n-1} - \rho_{k+1}}.$$

Nous supposerons que, parmi les $(n - 1)$ constantes $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}, \rho_2$ est celle dont la partie réelle est la plus grande. Cela admis une fois pour toutes, en comparant l'intégrale H_v avec celle de la formule (22), on a

$$a = \rho_2 - \rho_{p+1} + v + 1, \quad b_1 = \frac{1}{n-1} - \rho_2, \quad b_2 = \frac{2}{n-1} - \rho_2, \dots b_k = \frac{k}{n-1} - \rho_2, \dots b_{p-2} = \frac{p-2}{n-1} - \rho_2,$$

$$c_1 = \rho_3 - \frac{1}{n-1}, \quad c_2 = \rho_4 - \frac{2}{n-1}, \dots c_k = \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}, \dots c_{p-2} = \rho_p - \frac{p-2}{n-1};$$

par suite,

$$H_v = e^{\pi i(\rho_3 + \rho_4 + \dots + \rho_p - (p-2)\rho_2)} \Gamma(\rho_{p+1} - \rho_2 - v) \prod_{k=1}^{k=p-2} \frac{\sin \pi\left(\frac{k}{n-1} - \rho_2\right)}{\sin \pi\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_{p+1} + v\right)} \mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_{p+1}, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right).$$

Digitized by Google

Au moyen des substitutions :

$$r_p = v_{p+1} t_p,\ v_{p+1} = v_{p+2} t_{p+1},\ \dots\ v_{n-2} = v_{n-1} t_{n-2},\ v_{n-1} = x\left[(n-1)\,t_{n-1}\right]^{n-1},$$

l'intégrale G_v devient

$$G_v = (n-1)^{n-(n-1)\rho_{p+1}+(n-1)v} x^{1-\rho_{p+1}+v} \int_{\frac{t}{(t)^{n-1}}}^{(0)} dt_{n-1} \int_{c'_{n-2}}^{(t,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} dt_{n-2} \dots \int_{c'_p}^{(t,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} \Phi_2(t_p, t_{p+1}, \dots t_{n-1})\,dt_p,$$

où

$$\Phi_2(t_p, t_{p+1}, \dots t_{n-1}) = e^{\frac{t}{t_{n-1}}} t_{n-1}^{(n-1)[v-\rho_{p+1}+1]-1} \prod_{k=p}^{k=n-2} (t_k - 1)^{\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}-1} t_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_{p+1}+v},$$

si l'on convient de représenter ρ_1 par ρ_n.

Donc

$$G_v = e^{\pi\left[\frac{p+p-1+\dots+n-2}{n-1}-(n-p-1)\rho_{p+1}+(n-p-1)v\right]}(n-1)^{n-(n-1)\rho_{p+1}+(n-1)v} x^{1-\rho_{p+1}+v} \prod_{k=p}^{k=n-2} \mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_{p+1}+v,\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right).$$

Finalement

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{0x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\overline{v}_{n-1},\,\overline{0})} dv_{n-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \int_{-\infty}^{(0,\,v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_p,\,0,\,\overline{v}_{p-1},\,\overline{0})} dv_{p-2} \dots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\,dv_1 \\ &= e^{\pi i\left[2\rho_2+2\rho_3+\dots+2\rho_p-(n-p-1)\rho_{p+1}-\rho_2+\frac{n-2p+2}{2}\cdot\frac{(p-1)^2}{n-1}\right]}(n-1)^{n-(n-1)\rho_{p+1}}\Gamma(\rho_{p+1}-\rho_2)\,\Gamma[(n-1)(\rho_{p+1}-1)] \\ &\times \prod_{k=1}^{k=p-2} \frac{\sin\pi\left(\frac{k}{n-1}-\rho_2\right)}{\sin\pi\left[\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_{p+1}\right]} \mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_{p+1},\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right) \prod_{k=p}^{k=n-2} \mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_{p+1},\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right) \\ &\times x^{1-\rho_{p+1}} \mathcal{F}(2-\rho_{p+1},\ \rho_1-\rho_{p+1}+1,\ \rho_2-\rho_{p+1}+1,\ \dots\ \rho_{n-1}-\rho_{p+1}+1;\ x). \end{aligned}\right.$$

19. Pour déterminer la valeur de l'intégrale (38), on remplace e^{r_1} par la série exponentielle ; puis, par les substitutions

$$v_1 = r_2 t_1,\ r_2 = v_2 t_2,\ \dots\ v_{n-2} = v_{n-1} t_{n-2},\ v_{n-1} = x\left[(n-1)\,t_{n-1}\right]^{n-1},$$

on voit manifestement que cette intégrale est la somme d'une série dont le

Digitized by Google

terme général, à un facteur constant près, est égal à

$$G_\upsilon = (n-1)^{n-(n-1)\rho_2+(n-1)\upsilon} x^{1-\rho_2+\upsilon} \int_{\frac{(c)^{\frac{1}{n-1}}}{n-1}}^{(0)} dt_{n-1} \int_{c'_{n-2}}^{(t,0,\bar{t},\bar{0})} dt_{n-2} \cdots \int_{c'_1}^{(t,0,\bar{t},\bar{0})} \Phi_3(t_1, t_2, \ldots t_{n-1})\, dt_1,$$

où

$$\Phi_3(t_1, t_2, \ldots t_{n-1}) = e^{\frac{1}{n-1}t_{n-1}^{(n-1)[\upsilon-\rho_{p+1}+1]-1}} \prod_{k=1}^{k=n-2} (t_k - 1)^{\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}-1} t_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_2+\upsilon}.$$

Ainsi

$$(42)\quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathfrak{C}x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},0,\bar{v}_{n-1},\bar{0})} dv_{n-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\bar{v}_{p+1},\bar{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(c_2,0,\bar{c}_2,\bar{0})} \Phi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, x)\, dv_1 \\ = e^{\pi i \frac{(1-2\rho_2)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-(n-1)\rho_2} \Gamma[(n-1)(\rho_2-1)] \prod_{k=1}^{k=n-2} \mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_2, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right) \\ \times x^{1-\rho_2} \mathcal{F}(2-\rho_2, \rho_1-\rho_2+1, \rho_3-\rho_2+1, \ldots \rho_{n-1}-\rho_2+1; x). \end{array} \right.$$

20. Si l'on fait attention que, dans l'intégrale (39), la fonction à intégrer contient le facteur $(v_1 - v_2)^{\rho_1 - \frac{n}{n-1}}$, lequel peut être développé suivant les puissances croissantes de $\frac{v_2}{v_1}$, on trouve encore que cette intégrale se décompose en une série dont le terme général, à un facteur numérique près, est égal au produit de deux intégrales définies H'_v et G'_v :

$$H'_\upsilon = \int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-2} \int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2},0,\bar{v}_{n-2},\bar{0})} dv_{n-3} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\bar{v}_{p+1},\bar{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(c_2,0,\bar{c}_2,\bar{0})} \Phi_4(v_1, v_2, \ldots v_{n-2})\, dv_1,$$

$$G'_\upsilon = \int_{\mathfrak{C}x}^{(0)^{n-1}} e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_{n-1}^{-\rho_1+\upsilon}\, dv_{n-1},$$

si l'on pose

$$\Phi_4(v_1, v_2, \ldots v_{n-2}) = v_{n-2}^{\rho_1-\rho_{n-1}-\upsilon-1} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-3} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{k+2}-\frac{n+k-1}{n-1}} v_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_{k+1}}.$$

Digitized by Google

Ici, on a

$$a=\rho_2-\rho_1+\upsilon+1,\ b_1=\frac{1}{n-1}-\rho_2,\ b_2=\frac{2}{n-1}-\rho_2,\ \dots\ b_k=\frac{k}{n-1}-\rho_2,\ \dots\ b_{n-3}=\frac{n-3}{n-1}-\rho_2,$$

$$c_1=\rho_3-\frac{1}{n-1},\ c_2=\rho_4-\frac{2}{n-1},\ \dots\ c_k=\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1},\ \dots\ c_{n-3}=\rho_{n-1}-\frac{n-3}{n-1};$$

puis, par la transformation,

$$v_{n-1}=x[(n-1)t_{n-1}]^{n-1},$$

on trouve, après quelques réductions faciles, que

$$(43)\left\{\begin{aligned}&\int_{t_x}^{(0)^{n-1}}dv_{n-1}\int_{-\infty}^{(0,\,v_{n-1})}dv_{n-2}\int_{c_{n-3}}^{(v_{n-2},\,0,\,\bar v_{n-2},\,\bar 0)}dv_{n-3}\dots\int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\bar v_{p+1},\,\bar 0)}dv_p\dots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar 0)}\Phi(v_1,v_2,v_3,\dots v_{n-1},x)dv_{n-1}\\&=e^{\pi i\left[2\rho_2+2\rho_3+\dots+2\rho_{n-1}-(n-1)\rho_2+\frac{n^2+n-4}{2(n-1)}\right]}(n-1)^{n-(n-1)\rho_1}\Gamma(\rho_1-\rho_2)\Gamma[(n-1)(\rho_1-1)]\\&\prod_{k=1}^{k=n-3}\frac{\sin\pi\left(\frac{k}{n-1}-\rho_2\right)}{\sin\pi\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_1\right)}\mathcal{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_1,\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right)x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1,\rho_2-\rho_1+1,\rho_3-\rho_1+1,\dots\rho_{n-1}-\rho_1+1;x).\end{aligned}\right.$$

21. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$, les $(n-1)$ racines de l'équation binôme

$$\alpha^{n-1}-1=0,$$

et considérons l'intégrale définie

$$B=\int_{-\infty}^{(0)}dv_{n-1}\int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\bar v_{n-1},\,\bar 0)}dv_{n-2}\dots\int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\bar v_{p+1},\,\bar 0)}dv_p\dots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar 0)}\Psi(v_1,v_2,\dots v_{n-1},x)dv_1$$

où

$$\Psi(v_1,v_2,\dots v_{n-1},x)=e^{v_1}v_{n-1}^{-\rho_1}(v_{n-2}-v_{n-1})^{\rho_1-\frac{n-2}{n-1}-1}v_{n-2}^{\frac{n-2}{n-1}-\rho_1}\sum_{i=1}^{i=n-1}e^{(n-1)\alpha_i\left(\frac{x}{v_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\prod_{k=1}^{k=n-3}(v_k-v_{k+1})^{\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}-1}v_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_{k+1}}.$$

Digitized by Google

En vertu des relations :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = 0,\\
&\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_{n-2}^2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_{n-1}^i = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_1^{n-1} + \alpha_2^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} = n-1,
\end{aligned}$$

on a

$$\mathrm{B} = (n-1)\sum_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\frac{(n-1)^{(n-1)\upsilon}x^{\upsilon}}{1.2.3\ldots(n-1)\upsilon}\int_{-\infty}^{(0)} v_{n-1}^{-\rho_1-\upsilon}dv_{n-1}\int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\bar v_{n-1},\,\bar\upsilon)} av_{n-2}\ldots\int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\bar v_{p+1},\,\bar 0)}dv_p\ldots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar\upsilon)}\Psi_1(v_1, v_2, \ldots v_{n-1})dv_1,$$

$$\Psi_1(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}) = e^{v_1}(v_{n-2}-v_{n-1})^{\rho_1-\frac{n-2}{n-1}-1}v_{n-2}^{\frac{n-2}{n-1}-\rho_1}\prod_{k=1}^{k=n-3}(v_k - v_{k+1})^{\rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}-1}v_k^{\frac{k}{n-1}-\rho_{k+1}}.$$

Ici

$$a = \rho_2 + \upsilon,\quad b_1 = \frac{1}{n-1} - \rho_2,\quad b_2 = \frac{2}{n-1} - \rho_2,\ \ldots\ b_{n-3} = \frac{n-3}{n-1} - \rho_2,\quad b_{n-2} = \frac{n-2}{n-1} - \rho_2,$$

$$c_1 = \rho_3 - \frac{1}{n-1},\quad c_2 = \rho_4 - \frac{2}{n-1},\ \ldots\ c_{n-3} = \rho_{n-1} - \frac{n-3}{n-1},\quad c_{n-2} = \rho_1 - \frac{n-2}{n-1};$$

par conséquent

$$\mathrm{B} = (n-1)e^{\pi i\left[2\rho_1+2\rho_2+\ldots+2\rho_{n-1}-n\rho_2+\frac{n-2}{2}\right]}\Gamma(1-\rho_2)\prod_{k=1}^{k=n-2}\frac{\sin\pi\left(\frac{k}{n-1}-\rho_2\right)}{\sin\pi\frac{k}{n-1}}\mathcal{E}\left(\frac{k}{n-1},\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right)\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x);$$

ou enfin, en vertu de la formule,

$$\sin\frac{\pi}{n-1}\sin\frac{2\pi}{n-1}\ldots\sin\frac{(n-2)\pi}{n-1} = \frac{n-1}{2^{n-2}},$$

$$(44)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{(0)}dv_{n-1}\int_{c_{n-2}}^{(v_{n-1},\,0,\,\bar v_{n-1},\,\bar\upsilon)}dv_{n-2}\ldots\int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\bar v_{p+1},\,\bar 0)}dv_p\ldots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\bar v_2,\,\bar\upsilon)}\Psi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, x)dv_1\\
&= 2^{n-2}e^{\pi i\left[2\rho_1+2\rho_2+\ldots+2\rho_{n-1}-n\rho_2+\frac{n-2}{2}\right]}\Gamma(1-\rho_2)\prod_{k=1}^{k=n-2}\sin\pi\left(\frac{k}{n-1}-\rho_2\right)\mathcal{E}\left(\frac{k}{n-1},\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right)\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n-1}; x),
\end{aligned}\right.$$

si l'on convient que ρ_1 doit remplacer ρ_n.

Digitized by Google

22. Si nous désignons toujours par ρ_2, celle des constantes $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{n-1}$, dont la partie réelle est la plus grande et que les constantes $\rho_1, \rho_3, \rho_4 \dots \rho_p, \rho_{p+2}, \dots \rho_{n-1}$ satisfassent aux inégalités,

$$\rho_1 > \frac{n-2}{n-1}, \rho_3 > \frac{1}{n-1}, \rho_4 > \frac{2}{n-1}, \dots \rho_p > \frac{p-2}{n-1}, \rho_{p+2} > \frac{p}{n-1}, \dots \rho_{n-1} > \frac{n-3}{n-1}, \frac{n+p-1}{n-1} > \rho_{p+1},$$

l'intégrale (40) peut être remplacée par la suivante

$$\int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{p+1}} dv_p \int_{-\infty}^{(0, v_p)} dv_{p-1} \int_0^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_0^{v_2} \Psi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1.$$

Alors

$$H_\upsilon = e^{\pi i \left[\rho_3+\rho_4+\dots+\rho_p - \frac{1+2+3+\dots+p-2}{n-1} - (p-2)\right]} \overline{\Gamma}(\rho_{p+1} - \rho_2 - \upsilon) \prod_{k=1}^{k=p-2} \mathrm{E}\left(\frac{k}{n-1} - \rho_{p-1} + \upsilon + 1, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right),$$

et

$$G_\upsilon = (n-1)^{n-(n-1)\rho_{p+1}+(n-1)\upsilon} e^{\pi i \left[\rho_{p+2}+\rho_{p+3}+\dots+\rho_{n-1}+\rho_1 - \frac{p+p+1+\dots+n-2}{n-1} - (n-p-1)\right]} \overline{\Gamma}[(n-1)(\rho_{p+1} - \upsilon - 1)]$$

$$x^{1-\rho_{p+1}+\upsilon} \prod_{k=p}^{k=n-2} \mathrm{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_{p+1} + \upsilon, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right).$$

Donc

$$(45) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1} \int_0^{v_{n-1}} dv_{n-2} \dots \int_0^{v_{p+1}} dv_p \int_{-\infty}^{(0, v_p)} dv_{p-1} \int_0^{v_{p-1}} dv_{p-2} \dots \int_0^{v_2} \Psi(v_1, v_2, \dots v_{n-1}, x)\, dv_1 \\ = (n-1)^{n-(n-1)\rho_{p+1}} e^{\pi i \left[\rho_1+\rho_3+\dots+\rho_p+\rho_{p+2}+\dots+\rho_{n-1} + \frac{n(n-1)+2p-2}{2(n-1)}\right]} \overline{\Gamma}(\rho_{p+1} - \rho_2) \overline{\Gamma}[(n-1)(\rho_{p+1} - 1)] \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{k=p-2} \mathrm{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_{p+1}, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right) \prod_{k=p}^{k=n-2} \mathrm{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1} - \rho_{p+1}, \rho_{k+2} - \frac{k}{n-1}\right) \\ \times x^{1-\rho_{p+1}} \mathscr{F}(2 - \rho_{p+1}, \rho_1 - \rho_{p+1} + 1, \rho_2 - \rho_{p+1} + 1, \dots \rho_{n-1} - \rho_{p+1} + 1; x). \end{array} \right.$$

23. Si les constantes $\rho_2, \rho_1, \rho_3 \dots \rho_{n-1}$ satisfont aux conditions

$$\frac{n}{n-1} > \rho_2, \ \rho_{k+2} > \frac{k}{n-1}, \ k = 1, 2, \dots n-2,$$

Digitized by Google

on a

$$(46)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1}\int_{0}^{v_{n-1}} dv_{n-2}\cdots\int_{0}^{v_{p+1}} dv_p\cdots\int_{0}^{v_2}\Phi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, x)\,dv_1\\ =(n-1)^{n-(n-1)\rho_2}e^{\pi i\left[\rho_1+\rho_3+\rho_4+\ldots+\rho_{n-1}+\frac{n-2}{2}\right]}\overline{\Gamma}[(n-1)(\rho_2-1)]\prod_{k=1}^{k=n-2}\mathrm{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_2,\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right)\\ \times x^{1-\rho_2}\mathcal{F}(2-\rho_2,\ \rho_1-\rho_2+1,\ \rho_3-\rho_2+1,\ \ldots\ \rho_{n-1}-\rho_2+1;\ x).\end{array}\right.$$

Enfin, si les constantes $\rho_1, \rho_3, \ldots \rho_{n-1}$, vérifient les inégalités

$$\frac{n}{n-1} > \rho_1,\ \rho_{k+2} > \frac{k}{n-1},\ k = 1, 2, \ldots n-3,$$

$$(47)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\xi x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-1}\int_{-\infty}^{(0,\,v_{n-1})} dv_{n-2}\int_{0}^{v_{n-3}} dv_{n-3}\cdots\int_{0}^{v_{p+1}} dv_p\cdots\int_{0}^{v_2}\Phi(v_1, v_2, \ldots v_{n-1}, x)\,dv_1\\ =(n-1)^{n-(n-1)\rho_1}e^{\pi i\left[\rho_3+\rho_4+\ldots+\rho_{n-1}+\frac{n(n-3)}{2(n-1)}\right]}\overline{\Gamma}(\rho_1-\rho_2)\overline{\Gamma}[(n-1)(\rho_1-1)]\\ \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n-3}\mathrm{E}\left(\frac{n+k-1}{n-1}-\rho_1,\ \rho_{k+2}-\frac{k}{n-1}\right)x^{1-\rho_1}\mathcal{F}(2-\rho_1,\ \rho_2-\rho_1+1,\ \rho_3-\rho_1+1,\ \ldots\ \rho_{n-1}-\rho_1+1;\ x).\end{array}\right.$$

CHAPITRE VI.

24. L'ordre de multiplicité des intégrales définies, représentant les solutions particulières de l'équation (9), peut s'abaisser dans certains cas. Si les paramètres $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_i$, satisfont aux égalités :

$$\rho_1 = \frac{1}{n-1} \pm \alpha,\ \rho_2 = \frac{2}{n-1} \pm \alpha,\ \ldots\ \rho_i = \frac{i}{n-1} \pm \alpha,$$

α étant une quantité quelconque, par la substitution,

$$y = x^{1-\rho_i}\mathrm{V},$$

les constantes de l'équation transformée en V seront

$$2-\rho_i,\ \rho_1-\rho_i+1,\ \rho_2-\rho_i+1,\ \ldots\ \rho_{i-1}-\rho_i+1,\ \rho_{i+1}-\rho_i+1,\ \ldots\ \rho_{n-1}-\rho_i+1.$$

Digitized by Google

Par suite, les paramètres de la fonction hypergéométrique auxiliaire d'ordre $n-1$ sont

$$\rho_i - 1 + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - 1 + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - 1 + \frac{k}{n-1},\ \dots\ \rho_i - 1 + \frac{n-2}{n-1},$$

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_k,\ \dots\ \rho_{i-1},\ \rho_{i+1},\ \dots\ \rho_{n-1}.$$

Dans le domaine de l'origine, les $n-1$ solutions multiformes de cette équation sont

$$\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - 1 + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - 1 + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - 1 + \frac{n-2}{n-1}\\ \rho_1,\ \rho_2,\ \dots\ \rho_{i-1},\ \rho_{i+1},\ \dots\ \rho_{n-1}\end{matrix};\ u\right),$$

$$u^{1-\rho_1}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - \rho_1 + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - \rho_1 + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - \rho_1 + \frac{n-2}{n-1}\\ 2-\rho_1,\ \rho_2 - \rho_1 + 1,\ \dots\ \rho_{i-1} - \rho_1 + 1,\ \rho_{i+1} - \rho_1 + 1,\ \dots\ \rho_{n-1} - \rho_1 + 1\end{matrix};\ u\right),$$

$$u^{1-\rho_2}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - \rho_2 + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - \rho_2 + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - \rho_2 + \frac{n-2}{n-1}\\ 2-\rho_2,\ \rho_1 - \rho_2 + 1,\ \rho_3 - \rho_2 + 1,\ \dots\ \rho_{i-1} - \rho_2 + 1,\ \rho_{i+1} - \rho_2 + 1,\ \dots\ \rho_{n-1} - \rho_2 + 1\end{matrix};\ u\right),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$u^{1-\rho_{i-1}}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - \rho_{i-1} + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - \rho_{i-1} + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - \rho_{i-1} + \frac{n-2}{n-1}\\ 2-\rho_{i-1},\ \rho_1 - \rho_{i-1} + 1,\ \dots\ \rho_{i-2} - \rho_{i-1} + 1,\ \rho_{i+1} - \rho_{i-1} + 1,\ \dots\ \rho_{n-1} - \rho_{i-1} + 1\end{matrix};\ u\right),$$

$$u^{1-\rho_{i+1}}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - \rho_{i+1} + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - \rho_{i+1} + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - \rho_{i+1} + \frac{n-2}{n-1}\\ 2-\rho_{i+1},\ \rho_1 - \rho_{i+1} + 1,\ \dots\ \rho_{i-1} - \rho_{i+1} + 1,\ \rho_{i+2} - \rho_{i+1} + 1,\ \dots\ \rho_{n-1} - \rho_{i+1} + 1\end{matrix};\ u\right).$$

. . . . . .

. . . . . .

$$u^{1-\rho_{n-1}}\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - \rho_{n-1} + \frac{1}{n-1},\ \rho_i - \rho_{n-1} + \frac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - \rho_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\\ 2-\rho_{n-1},\ \rho_1 - \rho_{n-1} + 1,\ \dots\ \rho_{i-1} - \rho_{n-1} + 1,\ \rho_{i+1} - \rho_{n-1} + 1,\ \dots\ \rho_{n-2} - \rho_{n-1} + 1\end{matrix};\ u\right).$$

Digitized by Google

En vertu des hypothèses admises, les solutions de l'équation hypergéométrique auxiliaire se partagent en deux groupes : le premier comprend la solution uniforme et les solutions multiformes, appartenant aux exposants $1 - \rho_{i+1}$, $1 - \rho_{i+2}$, ... $1 - \rho_{n-1}$. Celles-ci peuvent être considérées comme les intégrales d'une équation hypergéométrique d'ordre $n - i$. Le second groupe comprend les solutions multiformes appartenant aux exposants $1 - \rho_1$, $1 - \rho_2$, ... $1 - \rho_{i-1}$ et ces fonctions sont respectivement des ordres

$$n - i + 1, \quad n - i + 2, \ \ldots \ n - 2, \quad n - 1.$$

Ainsi, pour le premier groupe, les constantes de l'équation auxiliaire sont

$$\rho_i - 1 + \frac{1}{n-1}, \ \rho_i - 1 + \frac{2}{n-1}, \ \ldots \ \rho_i - 1 + \frac{k}{n-1}, \ \ldots \ \rho_i - 1 + \frac{n-2}{n-1},$$

$$\rho_{i+1}, \quad \rho_{i+2}, \ \cdots \ \rho_{i+k}, \ \cdots \ \rho_{n-1}.$$

Quand au second groupe, si nous désignons par μ un nombre entier inférieur ou tout au plus égal à $i - 1$, les constantes de l'équation auxiliaires d'ordre $n + \mu - i$ sont

$$\rho_i - 1 + \frac{1}{n-1}, \ \rho_i - 1 + \frac{2}{n-1}, \ \ldots \ \rho_i - 1 + \frac{k}{n-1}, \ \ldots \ \rho_i - 1 + \frac{n+\mu-i-1}{n-1},$$

$$\rho_\mu, \ \rho_{\mu-1}, \ \rho_{\mu-2}, \ \cdots \ \rho_2, \ \rho_1, \ \rho_{i+1}, \ \rho_{i+2}, \ \cdots \ \rho_{n-1}.$$

Remarque. — L'ordre des fonctions hypergéométriques multiformes, solutions des équations auxiliaires, s'abaissera d'une unité encore, si la constante α est égale à l'unité, car

$$\rho_i - \rho_k + \frac{n-i-1}{n-1} = 2 - \rho_k.$$

Digitized by Google

EXPRESSION DES SOLUTIONS DU PREMIER GROUPE, SOUS FORME D'INTÉGRALES DÉFINIES.

25. Comme nous venons de le montrer, la fonction hypergéométrique auxiliaire d'ordre $n - i$ sera

$$\mathrm{F}\left(\begin{matrix}\rho_i - 1 + \dfrac{1}{n-1},\ \rho_i - 1 + \dfrac{2}{n-1},\ \dots\ \rho_i - 1 + \dfrac{n-i-1}{n-1}\\ \rho_{i+1},\ \rho_{i+2},\ \dots\ \rho_{n-1}\end{matrix};\ u\right).$$

Si nous continuons de désigner par $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k, \dots \alpha_{n-1}$, les $n-1$ racines de l'unité et que nous appelions Φ et Φ_1 les fonctions

$$\Phi = e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_n^{\rho_i - 2}(v_{n-i-1} - v_{n-i})^{\frac{i}{n-1} - \rho_i} v_{n-i-1}^{\rho_i - \rho_{n-1} - \frac{i}{n-1}} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-i-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i - \rho_{i+k} + \frac{k}{n-1} - 1},$$

$$\Phi_1 = v_{n-i}^{\rho_i - 2}(v_{n-i-1} - v_{n-i})^{\frac{i}{n-1} - \rho_i} v_{n-i-1}^{\rho_i - \rho_{n-1} - \frac{i}{n-1}} e^{v_1} \sum_{k=1}^{k=n-1} e^{(n-1)\alpha_k \left(\frac{x}{v_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \prod_{k=1}^{k=n-i-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i - \rho_{i+k} + \frac{k}{n-1} - 1},$$

les solutions de ce groupe seront représentées par les intégrales définies :

$$(48). \quad x^{1-\rho_i} \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\,0,\,\overline{v}_{n-i},\,\overline{0})} dv_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \int_{-\infty}^{(0,\,v_p)} dv_{p-1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1},\,0,\,\overline{v}_{p-1},\,\overline{0})} dv_{p-2} \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1,$$

$$(49). \quad x^{1-\rho_i} \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\,0,\,\overline{v}_{n-i},\,\overline{0})} dv_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(v_p,\,0,\,\overline{v}_p,\,\overline{0})} dv_{p-1} \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1,$$

$$(50). \quad x^{1-\rho_i} \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-i} \int_{-\infty}^{(0,\,v_{n-i})} dv_{n-i-1} \int_{c_{n-i-2}}^{(v_{n-i-1},\,0,\,\overline{v}_{n-i-1},\,\overline{0})} dv_{n-i-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1,$$

$$(51). \quad \int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\,0,\,\overline{v}_{n-i},\,\overline{0})} dv_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi_1 dv_1.$$

Digitized by Google

Dans la formule (48), on fera p égal successivement à 2, 3, 4, ... $n - i - 1$.

Par le développement du facteur $[v_{p-1} - v_p]^{\rho_{i+p} - \rho_i - \frac{p-1}{n-1}}$, suivant les puissances ascendantes de $\frac{v_p}{v_{p-1}}$, l'intégrale (48) se décompose en une série dont le terme général, à un facteur près, est égal au produit de deux intégrales définies, savoir :

$$H_v = \int_{-\infty}^{(0)} v_{p-1}^{\rho_{i+p} - \rho_{i+p-1} - v - 1} \int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1}, 0, \bar{v}_{p-1}, \bar{v})} dv_{p-2} \cdots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \bar{v}_2, \bar{v})} \Phi_2 dv_1,$$

$$G_v = \int_{\pm x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i}, 0, \bar{v}_{n-i}, \bar{v})} dv_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1}, 0, \bar{v}_{p+1}, \bar{v})} \Phi_3 dv_p,$$

où

$$\Phi_2 = e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=p-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i - \rho_{i+k} + \frac{k}{n-1} - 1},$$

$$\Phi_3 = e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_{n-i}^{\rho_i - 2} (v_{n-i-1} - v_{n-i})^{\frac{i}{n-1} - \rho_i} v_{n-i-1}^{\rho_i - \rho_{n-1} - \frac{i}{n-1}} v_p^v \prod_{k=p}^{k=n-i-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i - \rho_{i+k} + \frac{k}{n-1} - 1}.$$

Par les transformations,

$$v = v_{p+1} t_p, \; v_{p+1} = v_{p+2} t_{p+1}, \; \ldots \; v_{n-i-1} = v_{n-i} t_{n-i-1}, \; v_{n-i} = x[(n-1)t_{n-i}]^{n-1},$$

$$G_v = (n-1)^{1+(n-1)(\rho_i - \rho_{i+p} + v)} x^{v + \rho_i - \rho_{i+p}} \int_{\frac{(\pm)^{n-1}}{n-1}}^{(0)} dt_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(t, 0, \bar{t}, \bar{v})} dt_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(t, 0, \bar{t}, \bar{v})} \Psi_4 dt_p,$$

où nous faisons

$$\Psi_4 = e^{\frac{1}{t_{n-i}}} t_{n-i}^{(v + \rho_i - \rho_{i+p})(n-i)-1} t_{n-i-1}^{v + \rho_i - \rho_{i+p} + \frac{n-i-1}{n-1} - 1} (t_{n-i-1} - 1)^{\frac{i}{n-1} - \rho_i} \prod_{k=p}^{k=n-i-2} (t_k - 1)^{\rho_{i+k+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1}} t_k^{\rho_i - \rho_{i+p} + \frac{k}{n-1} + v - 1}.$$

Digitized by Google

Donc

$$G_\upsilon = (n-1)^{1+(n-1)(\rho_i-\rho_{i+p}+\upsilon)} e^{\pi i\left[(n-i-p)(\rho_i-\rho_{i+p}+\upsilon-1)+\frac{p+p+1+\ldots+(n-i-1)}{n-1}\right]} x^{\upsilon+\rho_i-\rho_{i+p}}$$
$$\Gamma[(n-1)(\rho_{i+p}-\rho_i-\upsilon)]\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{n-i-1}{n-1}+\upsilon,\ \frac{n+i-1}{n-1}-\rho_i\right)$$
$$\prod_{k=p}^{k=n-i-2}\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1}+\upsilon,\ \rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right).$$

Quant à l'intégrale H_υ, on a

$$a=\rho_{i+1}-\rho_{i+p}+\upsilon+1,$$
$$b_1=\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{1}{n-1}-1,\ b_2=\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{2}{n-1}-1,\ \ldots\ b_{p-2}=\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{p-2}{n-1}-1,$$
$$c_1=\rho_{i+2}-\rho_i-\frac{1}{n-1}+1,\ c_2=\rho_{i+3}-\rho_i-\frac{2}{n-1}+1,\ \ldots\ c_{p-2}=\rho_{i+p-1}-\rho_i-\frac{p-2}{n-1}+1;$$

par suite, en vertu de la formule (22),

$$H_\upsilon=\left\{\begin{array}{l} e^{\pi i\left[2\rho_i+2\rho_{i+1}+2\rho_{i+2}+\ldots+2\rho_{i+p-1}-p(\rho_i+\rho_{i+1})-\frac{1+2+3+\ldots+(p-2)}{n-1}\right]}\Gamma(\rho_{i+p}-\rho_{i+1}-\upsilon) \\ \times\ \prod_{k=1}^{k=p-2}\dfrac{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{k}{n-1}-1\right)}{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1}-\upsilon\right)}\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1}+\upsilon,\ \rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right). \end{array}\right.$$

Finalement,

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{1-\rho_i}\displaystyle\int_{0x}^{(0)^{n-1}} dv_{n-i}\int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\,0,\,\overline{v}_{n-i-1},\,\overline{v})} dv_{n-i-1}\cdots\int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{v})} dv_p \int_{-\infty}^{(0,\,v_p)} dv_{p-1}\int_{c_{p-2}}^{(v_{p-1},\,0,\,\overline{v}_{p-1},\,\overline{v})} dv_{p-2}\cdots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{v})}\Phi dv_1 \\ = e^{\pi i\left[2\rho_i+2\rho_{i+1}+\ldots+2\rho_{i+p-1}-p\rho_i-p\rho_{i+1}+(n-i-p)(\rho_i-\rho_{i+p})-\frac{(p-1)^2}{n-1}-\frac{(n-i)(n+i-1)}{2(n-1)}+p\right]} \\ (n-1)^{1+(n-1)(\rho_i-\rho_{i+p})}\,\Gamma[(n-1)(\rho_{i+p}-\rho_i)]\,\Gamma(\rho_{i+p}-\rho_{i+1})\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{n-i-1}{n-1},\ \frac{n+i-1}{n-1}-\rho_i\right) \\ \displaystyle\prod_{k=p}^{k=n-i-2}\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1},\ \rho_{i+k+1}-\rho_i+\frac{n-k-1}{n-1}\right) \\ \displaystyle\prod_{k=p}^{k=p-2}\frac{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{k}{n-1}-1\right)}{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1}\right)}\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+p}+\frac{k}{n-1},\ \rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right) \\ x^{1-\rho_{i+p}}\mathcal{F}(2-\rho_{i+p},\ \rho_1-\rho_{i+p}+1,\ \rho_2-\rho_{i+p}+1,\ \ldots\rho_{i+p-1}-\rho_{i+p}+1,\ \rho_{i+p+1}-\rho_{i+p}+1,\ \ldots\rho_{n-1}-\rho_{i+p}+1;\ x). \end{array}\right.$$

Digitized by Google

26. Quant à l'intégrale (49), pour en trouver la valeur, on fera usage des substitutions

$$v_1 = v_2 t_1,\ v_2 = v_3 t_2,\ \dots\ v_{n-i-1} = v_{n-i} t_{n-i-1},\ v_{n-i} = x\,[(n-1)\,t_{n-i}]^{n-i},$$

après avoir développé l'exponentielle e^{v_1} suivant les puissances croissantes de la variable. En conséquence,

$$G_\nu = (n-1)^{i+(n-i)(\rho_i-\rho_{i+1}+\nu)} \int_{-\infty}^{(0)} dt_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(t,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} dt_{n-i-1} \dots \int_{c_p}^{(t,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(t,\,0,\,\overline{1},\,\overline{0})} \Phi_5 dv_1,$$

où

$$\Phi_5 = e^{i\frac{i}{n-i}t^{(n-i)(\rho_i-\rho_{i+1}+\nu)-i}}(t_{n-i-1}-1)^{\frac{i}{n-i}-\rho_i} t_{n-i-1}^{\rho_i-\rho_{i+1}+\nu-\frac{i}{n-i}} \prod_{k=1}^{k=n-i-2} (t_k-1)^{\rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-i}} t_k^{\rho_i-\rho_{i+k}+\frac{k}{n-i}+\nu-i}.$$

Donc

$$(53)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{i-\rho_i} \int_{0x}^{(0)^{n-i}} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\,0,\,\overline{v}_{n-i},\,\overline{0})} dv_{n-i-1} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(v_p,\,0,\,\overline{v}_p,\,\overline{0})} dv_{p-1} \dots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi dv_1 \\ = e^{\pi i\left[(\rho_i-\rho_{i+1})(n-i-1)-\frac{(n-i-2)(n+i-1)+2i}{2(n-1)}\right]} (n-1)^{i+(n-i)(\rho_i-\rho_{i+1})}\,\Gamma[(n-1)(\rho_{i+1}-\rho_i)] \\ \mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{n-i-1}{n-1},\ \frac{n+i-1}{n-1}-\rho_i\right) \prod_{k=1}^{k=n-i-2} \mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{k}{n-1},\ \rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right) \\ x^{i-\rho_{i+1}}\mathcal{F}(2-\rho_{i+1},\ \rho_1-\rho_{i+1}+1,\ \rho_2-\rho_{i+1}+1,\ \dots\ \rho_{n-i}-\rho_{i+1}+1;\ x). \end{array} \right.$$

27. Pour déterminer la valeur de l'intégrale (50), on développe le facteur $(v_{n-i-1} - v_{n-i})^{\frac{i}{n-i}-\rho_i}$ par la formule du binôme; cette intégrale se décompose encore en une série, dont le terme général est égal à

$$\frac{\left[\rho_i - \frac{i}{n-1}\right]_\nu^+}{1.2.3\dots\nu} \int_{0x}^{(0)^{n-i}} dv_{n-i} \int_{-\infty}^{(0)} dv_{n-i-1} \int_{c_{n-i-2}}^{(v_{n-i-1},\,0,\,\overline{v}_{n-i-1},\,\overline{0})} dv_{n-i-2} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\,0,\,\overline{v}_{p+1},\,\overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})} \Phi_5 dv_1,$$

Digitized by Google

si nous posons

$$\Phi_5 = e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-i}}} v_{n-i}^{\rho_i+\upsilon-2} v_{n-i-1}^{-\rho_{n-i-1}-\upsilon} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-i-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-i}} v_k^{\rho_i-\rho_{i+k}+\frac{k}{n-i}-1}.$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} x^{1-\rho_i} \int_{0x}^{(0)^{n-i}} dv_{n-i} \int_{-\infty}^{(0,\, v_{n-i})} dv_{n-i-1} \int_{c_{n-i-2}}^{(v_{n-i-1},\, 0,\, \overline{v}_{n-i-1},\, \overline{v})} dv_{n-i-2} \cdots \int_{c_p}^{(v_p,\, 0,\, \overline{v}_p,\, \overline{v})} dv_{p-1} \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\, 0,\, \overline{v}_2,\, \overline{v})} \Phi dv_1 \\ = e^{\pi i\left[2\rho_i+2\rho_{i+1}+\cdots+2\rho_{n-1}-(n-i)(\rho_i+\rho_{i+1})-\frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2(n-1)}\right]} (n-1)^{1+(n-i)\rho_i} \overline{\Gamma}[(n-1)(1-\rho_i)]\,\overline{\Gamma}(1-\rho_{i+1}) \\ \prod_{k=1}^{k=n-i-2} \frac{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{k}{n-1}-1\right)}{\sin\pi\left(\rho_i+\frac{k}{n-1}-1\right)}\, \mathcal{E}\left(\rho_i+\frac{k}{n-1}-1,\ \rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right) \\ \mathcal{F}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \cdots \rho_{n-1}; x), \end{array}\right.$$

Dans ce qui précède, nous supposons que la partie réelle de ρ_{i+1} est supérieure à l'unité et que ρ_{i+1} est la plus grande des constantes, ρ_{i+1}, ρ_{i+2}, $\cdots$ ρ_{n-1}.

28. Quant à l'intégrale (51), on développera la fonction,

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} e^{(n-1)\alpha_k\left(\frac{x}{v_{n-i}}\right)^{\frac{1}{n-i}}},$$

par la série exponentielle et le terme général de la série, dans laquelle se décompose cette intégrale, est égal à

$$\frac{(n-1)^{1+(n-i)\upsilon} x^{\upsilon}}{1.2.3 \ldots \upsilon} \int_{-\infty}^{(0)} v_{n-i}^{\rho_i-\upsilon-2} dv_{n-i} \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},\, 0,\, \overline{v}_{n-i},\, \overline{v})} dv_{n-i-1} \cdots \int_{c_p}^{(v_{p+1},\, 0,\, \overline{v}_{p+1},\, \overline{v})} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,\, 0,\, \overline{v}_2,\, \overline{v})} \Phi_6 dv_1,$$

où

$$\Phi_6 = (v_{n-i-1} - v_{n-i})^{\frac{i}{n-i}-\rho_i} v_{n-i-1}^{\rho_i-\rho_{n-i-1}-\frac{i}{n-i}} e^{v_1} \prod_{k=1}^{k=n-i-2} (v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k+1}-\rho_i-\frac{k}{n-i}} v_k^{\rho_i-\rho_{i+k}+\frac{k}{n-i}-1}.$$

Digitized by Google

Conséquemment,

$$(54)\left\{\begin{aligned}
&x^{1-\rho_i}\int_{-\infty}^{(0)} dv_n \int_{c_{n-i-1}}^{(v_{n-i},0,\bar v_{n-i},\bar 0)} dv_{n-i-1}\cdots\int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\bar v_{p+1},\bar 0)} dv_p \cdots \int_{c_1}^{(v_2,0,\bar v_2,\bar 0)}\Phi_1 dv_1\\
&= e^{\pi i\left[2\rho_{i+2}+2\rho_{i+3}+\dots+2\rho_{n-1}-(n-i-1)(\rho_i+\rho_{i+1})+\frac{2i-(n-i-1)(n-i-2)}{2(n-1)}+1\right]}2^{n-2}\sin\pi\left(\frac{n-i}{n-1}\right)\sin\pi\left(\frac{n-i+1}{n-1}\right)\dots\sin\pi\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\\
&\overline{\Gamma}(\rho_i-\rho_{i+1})\mathcal{E}\left(\frac{n-i-1}{n-1},\frac{n+i-1}{n-1}-\rho_i\right)\prod_{k=1}^{k=n-i-2}\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{i+1}+\frac{k}{n-1}-1\right)\mathcal{E}\left(\frac{k}{n-1},\rho_{i+k+1}-\rho_i+\frac{n-k-1}{n-1}\right)\\
&x^{1-\rho_i}\mathcal{F}(2-\rho_i,\rho_1-\rho_i+1,\rho_2-\rho_i+1,\dots\rho_{i-1}-\rho_i+1,\rho_{i+1}-\rho_i+1,\dots\rho_{n-1}-\rho_i+1;x).
\end{aligned}\right.$$

EXPRESSION DES SOLUTIONS DU SECOND GROUPE, SOUS FORME D'INTÉGRALES DÉFINIES.

29. Si nous désignons par Φ_7 la fonction,

$$e^{(n-1)\left(\frac{x}{v_{n+\mu-i}}\right)^{\frac{1}{n-1}}} v_{n+\mu-i}^{\rho_i-2}(v_{n+\mu-i-1}-v_{n+\mu-i})^{\frac{i-\mu}{n-1}-\rho_i} v_{n+\mu-i-1}^{\rho_i-\rho_{n-1}-\frac{i-\mu}{n-1}} e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=\mu}(v_k-v_{k+1})^{\rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i-\rho_{\mu-k+1}+\frac{k}{n-1}-1}$$

$$\times\prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-2}(v_k-v_{k+1})^{\rho_{i+k-\mu+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}} v_k^{\rho_i-\rho_{i+k-\mu}+\frac{k}{n-1}-1},$$

les solutions du second groupe seront exprimées par les intégrales définies :

$$(55).\quad\dots\quad x^{1-\rho_i}\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n+\mu-i}\int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(v_{n+\mu-i},0,\bar v_{n+\mu-i},\bar 0)} dv_{n+\mu-i-1}\cdots\int_{-\infty}^{(0,v_{p+1})} dv_p\cdots\int_{c_{p-1}}^{(v_p,0,\bar v_p,\bar 0)} dv_{p-1}\cdots\int_{c_1}^{(v_2,0,\bar v_2,\bar 0)}\Phi_7 dv_1,$$

$$(56).\quad\dots\quad x^{1-\rho_i}\int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n+\mu-i}\int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(v_{n+\mu-i},0,\bar v_{n+\mu-i},\bar 0)} dv_{n+\mu-i-1}\cdots\int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\bar v_{p+1},\bar 0)} dv_p\int_{c_{p-1}}^{(v_p,0,\bar v_p,\bar 0)} dv_{p-1}\cdots\int_{c_1}^{(v_2,0,\bar v_2,\bar 0)}\Phi_7 dv_1.$$

Par le développement du facteur $(v_p-v_{p+1})^{\rho_{\mu-p}-\rho_i-\frac{p}{n-1}}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{v_{p+1}}{v_p}$, l'intégrale (55) se partage en une série, dont le

Digitized by Google

terme général, abstraction faite d'un facteur numérique, est égal au produit de deux intégrales H_υ et G_υ :

$$H_\upsilon = \int_{-\infty}^{(0)} v_p^{\rho_{\mu-p}-\rho_{\mu-p+1}-\upsilon-1}\,dv_p \int_{c_{p-1}}^{(c_p,\,0,\,\overline{v}_p,\,\overline{0})} dv_{p-1}\cdots\int_{c_1}^{(v_2,\,0,\,\overline{v}_2,\,\overline{0})}\Phi_8\,dv_1,$$

$$G_\upsilon = \int_{\ell z}^{(0)^{n-1}} dv_{n+\mu-1} \int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(v_{n+\mu-i},\,0,\,\overline{v}_{n+\mu-i},\,\overline{0})} dv_{n+\mu-i-1}\cdots\int_{c_\mu}^{(v_{\mu+1},\,0,\,\overline{v}_{\mu+1},\,\overline{0})} dv_\mu\cdots\int_{c_{p+1}}^{(v_{p+2},\,0,\,\overline{v}_{p+2},\,\overline{0})}\Phi_9\,dv_{p+1},$$

où

$$\Phi_8 = e^{v_1}\prod_{k=1}^{k=p-1}(v_k - v_{k+1})^{\rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}}\,v_k^{\rho_i-\rho_{\mu-k+1}+\frac{k}{n-1}-1},$$

$$\Phi_9 = e^{(n-1)\left(\frac{z}{v_{n+\mu-i}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\,v_{n+\mu-i}^{\rho_i-2}\,(v_{n+\mu-i-1}-v_{n+\mu-i})^{\frac{i-\mu}{n-1}-\rho_i}\,v_{n+\mu-i-1}^{\rho_i-\rho_{n-1}-\frac{i-\mu}{n-1}}\,v_{p+1}^{\upsilon}$$

$$\times\prod_{k=p+1}^{k=\mu}(v_k - v_{k+1})^{\rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}}\,v_k^{\rho_i-\rho_{\mu-k+1}+\frac{k}{n-1}-1}\prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-2}(v_k - v_{k+1})^{\rho_{i+k-\mu+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}}\,v_k^{\rho_i-\rho_{i+k-\mu}+\frac{k}{n-1}-1}.$$

En conséquence,

$$H_\upsilon = e^{\pi i\left[2\rho_{\mu-1}+3\rho_{\mu-2}+\cdots+2\rho_{\mu-p+1}-(p-1)(\rho_i+\rho_\mu)-\frac{p(p-1)}{2(n-1)}\right]}\,\frac{\Gamma(\rho_{\mu-p}-\rho_\mu)}{[\rho_\mu-\rho_{\mu-p}+1]_\upsilon^+}$$

$$\prod_{k=1}^{k=p-1}\frac{\left[\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{k}{n-1}\right]_\upsilon^+}{[\rho_{\mu-k}-\rho_{\mu-p}+1]_\upsilon^+}\prod_{k=1}^{k=p-1}\frac{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_\mu+\frac{k}{n-1}-1\right)}{\sin\pi\left(\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{k}{n-1}\right)}\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{k}{n-1},\,\rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right),$$

et

$$G_\upsilon = \frac{(n-1)^{1+(n-1)(\rho_i-\rho_{\mu-p})}\,x^{\upsilon+\rho_i-\rho_{\mu-p}}\,\Gamma[(n-1)(\rho_{\mu-p}-\rho_i)]}{\prod_{k=1}^{k=n-1}\left[\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{k}{n-1}\right]_\upsilon^+}$$

$$\times e^{\pi i\left[(\rho_i-\rho_{\mu-p})(n+\mu-i-p-1)+\frac{(n+\mu-i-1)(n+\mu-i)}{2(n-1)}-\frac{p(p+1)}{2(n-1)}-(n+\mu-i-p-1)\right]}$$

$$\frac{\left[\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{n+\mu-i-1}{n-1}\right]_\upsilon^+}{[2-\rho_{\mu-p}]_\upsilon^+}\,\mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_{\mu-p}+\frac{n+\mu-i-1}{n-1},\,\frac{n+i-\mu-1}{n-1}-\rho_i\right)$$

Digitized by Google

$$\times \prod_{k=p+1}^{k=\mu} \frac{\left[\rho_i - \rho_{\mu-p} + \dfrac{k}{n-1}\right]_\upsilon^+}{[\rho_{\mu-k} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+} \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{k}{n-1}, \rho_{\mu-k} - \rho_i - \frac{k}{n-1} + 1\right)$$

$$\times \prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-1} \frac{\left[\rho_i - \rho_{\mu-p} + \dfrac{k}{n-1}\right]_\upsilon^+}{[\rho_{i+k-\mu+1} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+} \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{k}{n-1}, \rho_{i+k-\mu+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1} + 1\right).$$

Nous convenons que ρ_0 doit être remplacé par ρ_{i+1}.

Après la suppression des facteurs communs aux deux termes de cette expression fractionnaire, il restera au dénominateur

$$[2 - \rho_{\mu-p}]_\upsilon^+ [\rho_\mu - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+ [\rho_{\mu-1} - \rho_{\mu-p} + 1] \dots [\rho_{\mu-p+1} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+$$
$$[\rho_{\mu-p-1} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+ \dots [\rho_1 - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+$$
$$[\rho_i - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+ [\rho_{i+1} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+ \dots [\rho_{n-1} - \rho_{\mu-p} + 1]_\upsilon^+$$
$$\left[\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{n+\mu-i-1}{n-1}\right]_\upsilon^+ \left[\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{n+\mu-i}{n-1}\right]_\upsilon^+ \dots \left[\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{n-2}{n-1}\right]_\upsilon^+.$$

Or, en vertu des hypothèses précédemment admises,

$$\rho_i + \frac{n+\mu-i-1}{n-1} = \rho_{\mu+1} + 1, \quad \rho_i + \frac{n+\mu-i}{n-1} = \rho_{\mu+2} + 1, \dots \rho_i + \frac{n-2}{n-1} = \rho_{i-1} + 1;$$

donc

(57)
$$\left\{\begin{aligned}
& x^{1-\rho_i} \int_{\varepsilon x}^{(0)^{n-1}} dv_{n+\mu-i} \int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(v_{n+\mu-i}, 0, \bar v_{n+\mu-i}, \bar 0)} dv_{n+\mu-i-1} \dots \int_{c_{p+2}}^{(v_{p+2}, 0, \bar v_{p+2}, \bar 0)} dv_{p+1} \int_{-\infty}^{(0, v_{p+1})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(v_p, 0, \bar v_p, \bar 0)} dv_{p-1} \dots \int_{c_1}^{(v_2, 0, \bar v_2, \bar 0)} \Phi_7 dv_1 \\
& = e^{\pi i\left[2\rho_{\mu-1} + 2\rho_{\mu-2} + \dots + 2\rho_{\mu-p+1} + (\rho_i - \rho_{\mu-p})(n+\mu-i-p-1) - (p-1)(\rho_i + \rho_\mu) + \frac{(n+\mu-i-1)(n+\mu-i) - 2p^2}{2(n-1)} - (n+\mu-i-p-1)\right]} \\
& \quad (n-1)^{1+(n-1)(\rho_i - \rho_{\mu-p})} \bar\Gamma[(n-1)(\rho_{\mu-p} - \rho_i)] \bar\Gamma(\rho_{\mu-p} - \rho_\mu) \\
& \quad \prod_{k=1}^{k=p-1} \frac{\sin\pi\left(\rho_i - \rho_\mu + \dfrac{k}{n-1} - 1\right)}{\sin\pi\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \dfrac{k}{n-1}\right)} \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{k}{n-1}, \rho_{\mu-k} - \rho_i - \frac{k}{n-1} + 1\right) \\
& \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{n+\mu-i-1}{n-1}, \frac{n+i-\mu-1}{n-1} - \rho_i\right) \prod_{k=p+1}^{k=\mu} \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{k}{n-1}, \rho_{\mu-k} - \rho_i - \frac{k}{n-1} + 1\right) \\
& \quad \prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-1} \mathcal{E}\left(\rho_i - \rho_{\mu-p} + \frac{k}{n-1}, \rho_{i+k-\mu+1} - \rho_i - \frac{k}{n-1} + 1\right) \\
& \quad x^{1-\rho_{\mu-p}} \mathcal{F}(2 - \rho_{\mu-p}, \rho_1 - \rho_{\mu-p} + 1, \dots \rho_{n-1} - \rho_{\mu-p} + 1; x).
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

30. Pour déterminer la valeur de l'intégrale (56), on développera e^{v_1} par la série exponentielle ; puis, par les transformations,

$$v_1 = v_2 t_1,\ v_2 = v_3 t_2,\ \dots\ v_k = v_{k+1} t_k,\ \dots\ v_{n+\mu-i-1} = v_{n+\mu-i} t_{n+\mu-i-1},\ v_{n+\mu-i} = x[(n-1)t_{n+\mu-i}]^{n-1},$$

on trouve que la valeur de cette intégrale est égale à la somme d'une série, dont le terme général est

$$G_\upsilon = \frac{(n-1)^{1+(n-1)(\rho_i-\rho_\mu+\upsilon)} x^{\rho_i-\rho_\mu+\upsilon}}{1.2.3\ \dots\ \upsilon} \int_{\frac{(t)^{n-1}}{n-1}}^{(0)} dt_{n+\mu-1} \int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(t,0,\overline{1},\overline{0})} dt_{n+\mu-i-1} \dots \int_{c_p}^{(t,0,\overline{1},\overline{0})} dv_p \dots \int_{c_1}^{(t,0,\overline{1},\overline{0})} \Phi_0 dv_1.$$

où

$$\Phi_0 = e^{\frac{1}{t_{n+\mu-1}}} t_{n+\mu-1}^{(n-1)(\rho_i-\rho_\mu+\upsilon)-1} (t_{n+\mu-i-1}-1)^{\frac{i-\mu}{n-1}-\rho_i} t_{n+\mu-i}^{\rho_i-\rho_\mu+\frac{n+\mu-i-1}{n-1}+\upsilon-1}$$

$$\times \prod_{k=1}^{k=\mu} (t_k-1)^{\rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}} t_k^{\rho_i-\rho_\mu+\frac{1}{n-1}+\upsilon-1} \prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-2} (t_k-1)^{\rho_{i+k-\mu+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}} t_k^{\rho_i-\rho_\mu+\frac{k}{n-1}+\upsilon-1}.$$

En conséquence,

$$(58)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^{1-\rho_i} \int_{0x}^{(0)^{n-1}} dv_{n+\mu-1} \int_{c_{n+\mu-i-1}}^{(v_{n+\mu-i},0,\overline{v}_{n+\mu-i},\overline{0})} dv_{n+\mu-i-1} \dots \int_{c_p}^{(v_{p+1},0,\overline{v}_{p+1},\overline{0})} dv_p \int_{c_{p-1}}^{(v_p,0,\overline{v}_p,\overline{0})} dv_{p-1} \dots \int_{c_1}^{(v_2,0,\overline{v}_2,\overline{0})} \Phi_7 dv_1 \\ = e^{\pi i\left[(\rho_i-\rho_\mu)(n+\mu-i-1)-\frac{(n+\mu-i-1)(n-\mu+i-2)}{2(n-1)}\right]} (n-1)^{1+(n-1)(\rho_i-\rho_\mu)} \overline{\Gamma}[(n-1)(\rho_\mu-\rho_i)] \\ \mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_\mu+\frac{n+\mu-i-1}{n-1}, \frac{n+i-\mu-1}{n-1}-\rho_i\right) \prod_{k=1}^{k=\mu} \mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_\mu+\frac{k}{n-1}, \rho_{\mu-k}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right) \\ \prod_{k=\mu+1}^{k=n+\mu-i-2} \mathcal{E}\left(\rho_i-\rho_\mu+\frac{k}{n-1}, \rho_{i+k-\mu+1}-\rho_i-\frac{k}{n-1}+1\right) \\ x^{1-\rho_\mu} \mathcal{F}(2-\rho_\mu, \rho_1-\rho_\mu+1, \rho_2-\rho_\mu+1, \dots \rho_{n-1}-\rho_\mu+1; x). \end{array} \right.$$

Digitized by Google

ERRATA.

Page 3, ligne 6, au lieu de *de* n^{me} *ordre* lisez *du* n^{me} *ordre*.
Page 5, ligne 14, au lieu de u lisez n.
Page 5, équation (6), au lieu de

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} u^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

lisez

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} u^{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Page 6, ligne 4, au lieu de

$$\frac{d\varphi}{du} = -(n - m - 1)\varphi^{1+\overline{n-m-1}},$$

lisez

$$\frac{d\varphi}{du} = -(n - m - 1)\varphi^{1+\frac{1}{n-m-1}}.$$

Page 6, ligne 13, au lieu de *fonctions* lisez *fonction*.
Page 6, ligne 18, au lieu de $u^{-\lambda}W$ lisez $\varphi^{-\lambda}W$.
Page 6, ligne 19, au lieu de $u^{-\lambda+1}$ lisez $\varphi^{-\lambda+1}$.

Digitized by Google

SUR

Digitized by Google

SUR LES SYSTÈMES

DE

SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONAUX

PAR

LUCIEN LÉVY

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE FRANCE, A PARIS

(Couronné par la Classe des sciences dans la séance du 14 décembre 1894.)

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉFACE.

Le mémoire que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de la Classe des sciences sous la devise : *Fais ce que dois,* comporte une partie historique à laquelle j'ai donné tous mes soins et où je crois n'avoir rien omis d'essentiel de ce qui a été publié dans les trente dernières années ; j'ai cru, en effet, devoir me borner à cette période pour me conformer au programme tracé par la Commission. C'est ainsi que je n'ai rien dit, quand ce n'était pas indispensable pour éclairer la suite, des travaux de Serret, de Bonnet, de Liouville ; à plus forte raison n'ai-je pas eu à parler du théorème de Dupin, fondamental dans l'étude des systèmes orthogonaux. Les systèmes de quadriques homofocales, ceux formés de cyclides homofocales m'ont paru assez connus pour n'avoir pas à y revenir. Par contre, j'ai eu la bonne fortune de connaître, par des manuscrits ou par suite de communications verbales, quelques beaux théorèmes qu'on trouvera dans mon mémoire.

Ma contribution personnelle est plus modeste : j'aurais voulu, et je pense avoir approché très près du but, donner tous les systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques dans une famille. Le cinquième chapitre contient mes recherches sur ce sujet; j'ai hésité à le joindre au mémoire : il est

Digitized by Google

inachevé et le temps m'a manqué pour le revoir, comme j'ai pu le faire pour le reste. Cependant c'est là surtout que se trouvent les résultats inédits auxquels je fais allusion plus haut; la voie suivie est certainement féconde, et peut-être, au cas où l'Académie jugerait mon travail digne de l'impression, ce chapitre pourrait-il rendre des services. Je m'en remettrai sur ce point, le cas échéant, à l'avis de la Commission.

A défaut de ce résultat, j'attache une certaine importance à la découverte de tous les systèmes orthogonaux symétriques, auxquels j'ai consacré la seconde partie du troisième chapitre du mémoire. Je pourrais encore signaler l'intégration (même chapitre) de certains systèmes composés de trois équations aux dérivées partielles d'Euler et de Poisson, mais la forme dissymétrique de l'intégrale ne me satisfait pas entièrement et il y a là un perfectionnement à apporter. Je préfère ne pas insister sur les points secondaires; les nouveaux problèmes de géométrie posés par moi ou par d'autres et qui sont signalés dans ce mémoire suffiront, j'espère, à lui donner de l'intérêt et me justifieront de l'avoir présenté à l'Académie royale de Belgique (*).

(*) La Classe a bien voulu m'autoriser à compléter ce mémoire par deux notes ajoutées pendant l'impression. Dans la première, j'analyse deux mémoires de M. Bianchi qui m'avaient échappé et qui m'ont été signalé par M. J. Deruyts. Dans la deuxième, j'achève en me servant d'un beau théorème de M. Darboux, la solution du problème resté inachevé dans le cinquième chapitre du mémoire.

Digitized by Google

SUR LES SYSTÈMES

DE

SURFACES TRIPLEMENT ORTHOGONAUX.

CHAPITRE PREMIER.

Pendant longtemps les géomètres ont eu des données incertaines sur la nature exacte des difficultés que présente la recherche de tous les systèmes orthogonaux (c'est-à-dire composés de trois familles de surfaces se coupant mutuellement sous des angles droits). Lamé (*) ramenait le problème à l'intégration de six équations aux dérivées partielles du second ordre, que je ferai connaître dans la seconde partie, et pendant vingt ans il ne s'est servi pour tous ses beaux travaux que de ces équations. Serret (**) faisait dépendre la solution du problème de la résolution de deux équations aux dérivées partielles du sixième ordre auxquelles devait satisfaire le paramètre d'une des familles.

En 1862, dans un mémoire analysé aux *Comptes rendus* et dont

(*) *Mémoire sur les coordonnées curvilignes* (JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, t. V, p. 322, 1840).

(**) *Sur des surfaces orthogonales* (JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, DE LIOUVILLE, RÉSAL, JORDAN, t. XII).

Digitized by Google

l'Académie a ordonné l'insertion dans son *Recueil des savants étrangers*, O. Bonnet indiqua incidemment que l'équation dont dépendaient les cosinus directeurs des normales aux surfaces orthogonales était seulement du troisième ordre; mais il ne forma pas l'équation. Puis M. Darboux démontra (*) que le paramètre d'une famille orthogonale (c'est-à-dire faisant partie d'un système orthogonal) dépend aussi d'une équation du troisième ordre. En 1872, M. Cayley (**), par des calculs laborieux et compliqués, réussit à écrire cette équation. Je vais résumer brièvement la méthode employée l'année suivante par M. Darboux (***) :

Soient

$$(1). \quad \begin{cases} u = f(x, y, z) \\ v = f_1(x, y, z) \\ w = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

les équations des trois familles (u), (v), (w) de surfaces orthogonales. Écrivons les conditions d'orthogonalité

$$(2). \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \sum \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

et résolvons les deux premières par rapport à

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z};$$

nous obtenons des équations de la forme

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\mathrm{L}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\mathrm{M}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\mathrm{N}}$$

d'où

$$\mathrm{L}dx + \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dz = 0.$$

En écrivant que cette dernière équation est intégrable, nous aurons

(*) *Annales de l'École Normale*, t. III.
(**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXV, pp. 177 et 246.
(***) *Id.*, t. LXXVI, pp. 41 et 83.

Digitized by Google

éliminé u : cette équation de condition, jointe à la troisième équation (2), qu'il faudra différentier pour éliminer les dérivées secondes de v, donnera

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{L'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{M'} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{N'}$$

d'où on éliminera v comme on a éliminé u précédemment. M. Darboux trouve ainsi une équation que je vais transcrire, après avoir expliqué les notations; les dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x} \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \cdots$$

sont désignées par $u_1, u_2, u_3, v_1 \ldots u_{11}, u_{12}, \ldots u_{111}, u_{112} \ldots$; enfin l'on pose

$$A_{ik} = u_1 u_{ik1} + u_2 u_{ik2} + u_3 u_{ik3} - 2(u_{i1}u_{1k} + u_{i2}u_{2k} + u_{i3}u_{3k}).$$

L'équation s'écrit alors sous la forme très symétrique :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23} & A_{13} & A_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on pose

$$H = \frac{1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

et si l'on désigne par H_{11}, H_{12}, etc., les dérivées secondes de H, l'équation précédente peut encore s'écrire, comme M. Cayley l'a démontré :

$$(3). \quad \begin{vmatrix} H_{11} & H_{22} & H_{33} & H_{23} & H_{13} & H_{12} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{23} & u_{13} & u_{12} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 2u_3 & u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Cette équation est de la plus haute importance dans la théorie qui nous occupe : on peut d'abord en déduire les familles de la forme (*)

$$u = X + Y + Z$$

données d'abord par Bouquet (**), puis par Serret (***).

Mais on peut faire sur cette équation elle-même, ainsi que M. Darboux l'a montré (IV), d'intéressantes remarques. D'abord ses trois premières lignes renferment les six dérivées secondes des fonctions H, u, $\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$ et une combinaison évidente de lignes permet de faire figurer aussi dans les trois dernières les dérivées secondes de trois fonctions, savoir xu, yu, zu. Le déterminant sera donc un invariant.

Voici une autre conséquence importante : la forme de l'équation (en tenant compte de ce qu'on peut écrire $\varphi(u)$ au lieu de u, $x\psi(u)$ au lieu de xu, etc.), montre qu'on aura certainement des solutions en prenant celles de l'équation du premier ordre

$$(4) \qquad H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2bx + 2cy + 2hz + a_1$$

où a, b, c, h, a_1 sont des fonctions de u. M. Darboux a réussi à mettre cette équation sous une forme telle qu'elle puisse toujours s'intégrer : il en a ramené l'intégration à celle du système

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{y_1 - b_1} = \frac{dy_2}{y_2 - b_2} = \cdots \frac{dy_n}{y_n - b_n} \\ (y_1 - b_1)^2 + \cdots + (y_n - b_n)^2 = 1 \end{cases}$$

(*) Le résultat trouvé par Bouquet a une grande importance historique en ce que par là a été pour la première fois démontré qu'une famille quelconque de surfaces ne peut faire partie d'un système orthogonal.

(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jordan*, t. XI, 1re sér.

(***) *Id.*, t. XII.

(IV) Je résume ici les mémoires de M. J. Darboux (*Annales de l'École Normale*, 1878, t. VII, 2e sér.), où se trouvent exposés les travaux de cet illustre savant; les géomètres qui liront ce mémoire pourront se dispenser de recourir aux notes des *Comptes rendus* que j'ai dû indiquer dans mon exposé pour donner, autant que possible, les dates des découvertes.

Digitized by Google

déjà intégré par O. Bonnet (*), à condition de mettre les b_i sous une forme convenable.

M. Darboux en déduit des systèmes orthogonaux très généraux contenant quatre fonctions arbitraires d'une même variable et *dont peut faire partie une surface quelconque* (**). Ces systèmes, qui comprennent comme cas particuliers les familles de surfaces parallèles avec leurs trajectoires orthogonales ainsi que les transformées de ces familles par rayons vecteurs réciproques, sont définis seulement par des équations différentielles, et il n'y aurait pas lieu d'y insister pour le moment, si je ne devais saisir l'occasion d'éclaircir un petit point d'histoire.

Le regretté membre associé de l'Académie, Catalan, dans une lettre à M. Hermite (Liége, 24 décembre 1892), se plaint de n'être pas cité par M. Darboux, à l'endroit que je viens de souligner, comme étant le premier auteur qui ait démontré qu'une surface quelconque pouvait faire partie d'un système orthogonal (***). C'est là un malentendu qu'il convient de dissiper à cause de la haute valeur du savant de qui émanait la réclamation. Les surfaces parallèles avaient été nommées longtemps avant le mémoire de Catalan. On peut lire, par exemple, une note de Liouville ([IV]) où il nomme expressément les surfaces parallèles et fait observer que les développables normales à ces surfaces, le long de leurs lignes de courbure, complètent avec les premières un système orthogonal. Il semble donner d'ailleurs ces résultats comme connus, et j'ignore quel en est le premier auteur. Ce qui a pu tromper l'illustre professeur de l'Université de Liége, c'est le passage suivant de M. Darboux ([V]) : « On voit bien d'après cela pourquoi une surface quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogonal... Les considérations précédentes justifient donc la remarque qu'a faite M. Serret, que le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système orthogonal

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LIII, p. 971.

(**) Problème posé par CAYLEY, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1872.

(***) CATALAN, *Mémoires couronnés de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXII, p. 16, 1863. — ID., *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, t. XXVI, p. 180, 1868.

([IV]) *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jordan*, t. XVI, pp. 6 et 7, 1851.

([V]) *Annales de l'École Normale*, t. II, p. 59, 2e série.

Digitized by Google

pourrait bien être limité. » Mais il suffit de lire le passage dont je viens de donner un extrait pour comprendre que surface veut dire famille de surfaces renfermées dans une même équation : « Ainsi, dit M. Darboux, il n'y aura pas de système triple orthogonal formé de surfaces des ondes; car on ne peut placer aucune droite sur ces surfaces (*). » Le système composé de surfaces parallèles et des normalies développables n'est pas renfermé dans une même équation.

Cette digression est peut-être bien longue; cependant le problème qu'elle m'a donné occasion de soulever étant très intéressant, on me pardonnera d'y insister encore un peu. Voici d'abord comme généralisation d'un théorème de Kummer sur les courbes orthogonales un théorème (de M. Darboux, je crois) sur les surfaces renfermées dans une même équation et qui peuvent constituer un système triple orthogonal (**) : « Ces surfaces enveloppent une même développable circonscrite au cercle imaginaire à l'infini; elles sont donc toujours homofocales. » M. Darboux (***) en a déduit le système triple des cyclides homofocales; dans la même séance (1er août 1864), rappelant une communication faite par lui à la Société Philomatique, le 30 juillet 1864, M. Moutard avait fait connaître précisément le même théorème relativement aux surfaces appelées par lui anallagmatiques et qui, dans le cas du quatrième ordre, sont les cyclides de M. Darboux.

Je signalerai ensuite un mémoire de M. Cayley (IV), où ce géomètre a

(*) Autre part, M. Darboux dit : « Les cyclides forment, avec les quadriques, le seul système orthogonal triple et un. » M. Tisserand (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXII, p. 735) est revenu sur ce problème et a montré en effet qu'il n'y a pas d'autres systèmes orthogonaux pouvant être compris dans une équation telle que

$$\frac{f(x)}{\rho - a} + \frac{f_1(y)}{\rho - b} + \frac{f_2(z)}{\rho - c} = F(x, y, z),$$

les trois fonctions f_i devant avoir le même signe.

(**) Voir le même théorème pour deux systèmes orthogonaux renfermés dans une même équation (Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes, etc.*, p. 21); dans ce cas, les surfaces de la troisième famille coupent la développable isotrope suivant les droites.

(***) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LIX, p. 240.

(IV) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXV, 1872.

Digitized by Google

calculé les premiers termes du développement des coordonnées d'une surface quelconque d'un système orthogonal à équation unique renfermant une surface donnée, le développement étant ordonné suivant les puissances ascendantes du paramètre de la famille qui comprend cette surface.

Je reprends maintenant l'analyse du mémoire de M. Darboux : l'intégration de notre équation (4) se fait facilement dans le cas où les coefficients a, b, c, h, a_1 sont des constantes ; on est ainsi conduit aux systèmes cycliques découverts par Ribaucour (*) et dont M. Darboux donne la génération suivante : « *Soit* (Σ') *une surface donnée à l'avance. On mènera des sphères* (S') *tangentes à* (Σ'), *et coupant la sphère fixe* (S) *sous un angle constant et d'ailleurs quelconque ; puis, par l'intersection de ces sphères* (S') *et de* (S), *on mènera des sphères* (S'') *coupant* (S) *sous un angle constant quelconque* β. *L'enveloppe des sphères* (S'') *donnera l'une quelconque des surfaces que l'on doit associer à* (Σ') *pour former une famille du système orthogonal* (**). »

M. Darboux est revenu ultérieurement sur ce mode de génération et l'a même généralisé. On sait que Ribaucour a obtenu ces systèmes cycliques en cherchant un mode de correspondance de deux surfaces avec conservation des lignes de courbure : telles sont les relations entre deux surfaces parallèles (transformation par dilatation), ou entre deux surfaces inverses par rapport à une sphère (transformation par rayons vecteurs). D'une manière générale, dès qu'on a trouvé un système triple orthogonal, deux surfaces d'une même famille se correspondent (par leurs trajectoires orthogonales) avec conservation des lignes de courbure. Or, M. Darboux a prouvé (***) que la correspondance Ribaucour par systèmes cycliques peut être remplacée par des dilatations et des inversions. Il en est de même des modes de correspondance qu'on pourrait déduire des systèmes orthogonaux à quatre fonctions arbitraires contenant une surface quelconque dont j'ai parlé à la page 9 du présent paragraphe. Ces résultats sont conformes à un théorème général donné par M. S. Lie dans les *Mathematischen Annalen*, t. V, p. 186.

A l'équation du troisième ordre se rattache encore un intéressant problème

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXX, p. 330, 1870.
(**) DARBOUX, *Sur une classe de surfaces remarquables*, p. 254.
(***) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. XCII, p. 287, 1881.

Digitized by Google

posé, dès 1866, par M. Darboux (*) et qui est bien loin d'être encore résolu. Voici quel est ce problème : « Trouver la surface la plus générale qui, en se déplaçant, sans changer de forme, engendre une famille orthogonale. » M. Maurice Lévy (**) a montré que dans le cas d'un déplacement parallèle à Oz, le problème se ramène à l'intégration de l'équation

$$A\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0,$$

où A, — B, C sont les coefficients de l'équation des lignes de courbure et

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

M. Darboux transforme d'abord l'équation de M. Maurice Lévy en prenant comme axes de coordonnées des axes rectangulaires entraînés avec la surface mobile; puis il fait observer que les sphères et les plans engendrent une famille orthogonale (***) dans toutes les lois de déplacement, ce qui était connu, et il trouve des hélicoïdes comme surfaces n'engendrant de famille orthogonale que dans un seul déplacement. S'inspirant des méthodes précédentes, M. Lucien Lévy a démontré ([IV]) que les sphères et les plans sont les seules surfaces réelles de forme invariable qui puissent engendrer une famille orthogonale dans toutes les lois de déplacement; ce sont même les seules surfaces réelles ou imaginaires si le système triple doit être composé de trois familles distinctes. Dans un second mémoire ([V]), M. Lucien Lévy a recherché les surfaces qui peuvent, par translation, engendrer une famille orthogonale; mais il n'a pas intégré entièrement l'équation du troisième ordre dont dépend ce problème particulier et il n'a rencontré que des

(*) *Annales de l'École Normale*, t. III, 1re série.

(**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1875.

(***) Voir à la fin du mémoire la note III.

([IV]) *Bulletin des sciences mathématiques*, mars 1891.

([V]) *Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville, Résal, Jordan*, 4e série, t. VIII, fasc. IV, 1892.

Digitized by Google

surfaces-moulures de Monge, ce qui était un résultat connu (*), et des enveloppes de sphères assez particulières dont voici la description : « Si les cylindres de révolution qui ont pour bases les diverses lignes de courbure circulaires d'une enveloppe de sphères à plan de symétrie interceptent une longueur constante sur une droite Δ du plan de symétrie, cette enveloppe de sphères engendrera une famille orthogonale par une translation parallèle à Δ. » Dans le même mémoire, M. Lucien Lévy a fait connaître une nouvelle classe de surfaces capables d'engendrer une famille orthogonale par un mouvement hélicoïdal : ce sont les surfaces-moulures dont le noyau est un cylindre de révolution et dont, par conséquent les lignes de courbure d'un système sont des développantes de cercles, les autres étant arbitraires. D'ailleurs, ce théorème avait déjà été rencontré par Catalan (**). Avant de quitter ce sujet, il n'est que juste de mentionner, ne serait-ce qu'à cause de l'emploi d'une méthode absolument différente, une note de M. Petot (***), où ce géomètre, partant de la représentation sphérique, retrouve le même théorème comme application du théorème suivant, relatif aux surfaces susceptibles d'engendrer par translation une famille orthogonale : « *La recherche des surfaces* Σ *susceptibles d'engendrer par translation une famille orthogonale, revient à celle des systèmes sphériques orthogonaux pour lesquels les paramètres différentiels* q^2 *et* p^2 *de l'élément linéaire de la sphère vérifient l'équation* (IV)

$$\frac{\partial q^2}{\partial v} = \frac{\partial p^2}{\partial u}.$$

Le plan P *mené par chaque point* M *de* Σ *perpendiculairement à la droite*

(*) Le théorème général est le suivant : Si l'on trace dans un plan un réseau orthogonal de courbes et si l'on fait rouler ce plan sur une surface développable quelconque, le réseau orthogonal engendre un système double orthogonal complété par la famille des plans. Si la surface développable est un cylindre, on retrouve les surfaces-moulures.

(**) Voir les *Mémoires couronnés et des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXII, p. 14.

(***) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 22 juin 1891.

(IV) Ribaucour, dans son mémoire récompensé du prix Dalmont en 1876, et publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* en 1891, a rencontré la première partie de ce théorème (p. 45).

Digitized by Google

qui joint les deux centres de courbure géodésique des lignes de courbure (u) *et* (v) *en* M *reste parallèle à la direction de la translation.* »

Dans la même note, M. Petot dit un mot de la famille des surfaces homothétiques d'une même surface par rapport à un point O. Si elles forment une famille orthogonale, le plan P défini comme ci-dessus passe par le point O. Dans une note plus récente (*), M. Petot a étendu son théorème aux surfaces (S) susceptibles d'engendrer par un déplacement hélicoïdal une famille orthogonale. Voici ce nouveau théorème : « *La congruence, engendrée par la droite* $\omega\omega_1$ *qui en chaque point de la surface* (S) *joint les deux centres de courbure géodésique des lignes de courbure, appartient à un complexe linéaire* Σ. *Le mouvement hélicoïdal que doit prendre* (S) *s'effectue autour de l'axe de* Σ. *Si* $\omega\omega_1$ *rencontre une droite fixe ou est perpendiculaire à une direction fixe, le mouvement de* (S) *se réduit à une rotation autour de cette droite ou à une translation suivant cette direction.* »

Une autre application de la méthode qui a servi pour trouver l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre est faite par M. Darboux au problème suivant : « Rechercher les surfaces qui coupent à angle droit deux familles de surfaces parallèles. » Une remarque simple montre que les surfaces inconnues ne peuvent être que des plans (problème facile) ou des quadriques. Dans ce cas où les deux familles de surfaces parallèles sont orthogonales, on a un système triple orthogonal comprenant une famille de quadriques : c'est un cas particulier du problème de M. Maurice Lévy, dont je parlerai plus loin (chapitre II).

Ici, dans le cas des surfaces à centre,

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

où A, B, C sont des fonctions d'un même paramètre, M. Darboux est conduit aux conditions

$$C(dA+dB)=B(dA+dC)=A(dB+dC)$$

qui entraînent, comme on le verra facilement, l'équation (2) du chapitre II.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. CXVIII, p. 1409, 18 juin 1894.

Digitized by Google

Dans son mémoire de 1878, M. Darboux s'était arrêté aux deux équations précédentes; depuis cette époque, ces équations ont été intégrées par Halphen (*), puis par Brioschi (**), et enfin par M. Darboux lui-même qui a fait connaître une troisième méthode, que je vais indiquer rapidement. Remarquant que l'équation différentielle à laquelle satisfont les axes (voir chapitre II) d'une famille orthogonale de quadrique peut être vérifiée en posant $C - A = u$, $B - A = ut$, d'où

$$A = t(1-t)\frac{\partial u}{\partial t} - tu,$$

$$B = t(1-t)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$C = t(1-t)\frac{\partial u}{\partial t} + (1-t)u,$$

où u est une fonction arbitraire de t, on porte ces valeurs de A, B, C dans les équations à intégrer qui se réduisent à une seule équation différentielle du second ordre : l'intégrale est

$$u = (aK + bK')^2,$$

avec

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d\varphi}{\sqrt{1 - t\sin^2\varphi}}$$

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{i}} \frac{2d\varphi}{\sqrt{1 - t\sin^2\varphi}}.$$

Le cas des quadriques dénuées de centre est plus simple. On trouve (***)

$$\frac{y^2}{\alpha + u} + \frac{z^2}{\alpha - u} = 2x + \alpha \log u,$$

où α est une constante arbitraire. Si $\alpha = 0$, on retrouve les paraboloïdes orthogonaux de Serret, si souvent cités.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1881, 1er semestre, p. 1101.
(**) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, même tome, p. 1389.
(***) *Annales de l'École Normale*, 1878, p. 150.

Digitized by Google

CHAPITRE DEUXIÈME.

L'importance des découvertes de M. Maurice Lévy sur le sujet qui nous occupe mérite qu'on leur consacre un chapitre spécial.

Dans un premier mémoire, inséré au *Journal de l'École polytechnique* (*), et qui reproduit en partie la thèse soutenue par lui en février 1867, ce géomètre tire d'importantes conséquences de la remarque suivante, presque évidente : « Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système orthogonal, il est nécessaire et suffisant que les deux tangentes aux lignes de courbure infiniment voisines considérées sur deux surfaces de la même famille et en deux points infiniment voisins situés sur une normale à la première surface soient à une distance l'une de l'autre infiniment petite d'ordre supérieur au premier. »

On en déduit qu'à part les cônes et cylindres, les seules familles de surfaces de révolution susceptibles de faire partie d'un système orthogonal sont celles formées par des surfaces de révolution autour d'un même axe. Il faudrait aussi excepter les familles de sphères.

Les cônes de révolution ne peuvent faire partie d'un système orthogonal que si leurs axes forment une développable dont le lieu de leurs sommets soit l'arête de rebroussement; les cônes quelconques, que s'ils ont même sommet; et les cylindres, s'ils ont leurs génératrices parallèles.

La traduction analytique de la remarque précédemment rappelée conduit M. Maurice Lévy à l'équation qui doit être vérifiée en chaque point M de l'espace

$$(1). \quad \frac{d^2}{dxdy}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}=0$$

et qui a été obtenue en prenant pour axes la normale à la surface $u = c^{te}$ et les tangentes aux lignes de courbure.

(*) Tome XL, IIIe cahier, 1870.

Digitized by Google

On peut déduire de cette équation (1) les équations fondamentales de Lamé que nous donnerons plus loin. Mais la conséquence la plus importante, obtenue en exprimant simplement que M est un ombilic, est la suivante : « *Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système orthogonal, il faut que la ligne des ombilics de cette famille soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui la composent.* » Dans le cas des surfaces du second ordre, cette condition est aussi suffisante, et M. G. Humbert a fait observer que si une des lignes ombilicales est droite, toutes le sont. On en déduit aussi (p. 174) que les seules quadriques susceptibles de faire partie d'un système orthogonal doivent avoir leurs plans de symétrie communs, théorème étendu par M. Darboux avec les exceptions qu'il comporte aux surfaces quelconques.

M. Maurice Lévy a donné de ce théorème une démonstration géométrique qui prête à objection. La voici : « Considérons un ombilic sur l'une des surfaces proposées. De ce point comme centre, décrivons sur la surface un cercle d'un rayon infiniment petit. *Il est clair* (*) que la circonférence de ce petit cercle peut être regardée comme une ligne de courbure. Par tous les points de cette circonférence, menons les courbes coupant normalement

(*) Cette opinion était partagée par O. Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, trentième cahier, 1845); mais cet illustre géomètre avait cependant déjà fait observer que d'après Dupin il ne passait que trois lignes de courbure en un ombilic et non une infinité. La démonstration de ce dernier point me semble aisée. Soit, en effet,

$$z = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2y}{2} + \frac{b'xy}{2} + \frac{a'y^3}{6} + \cdots$$

l'équation d'une surface rapportée à trois axes rectangulaires dont l'axe des z sera la normale au point ombilic. Une normale au point infiniment voisin x, y, z aura pour équations

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}$$

et sa distance δ à oz sera $\frac{qx - py}{\sqrt{p^2 + q^2}}$. Il suffit de remplacer p et q par leurs valeurs, et de faire $y = mx$ pour voir : 1° que δ est en général du premier ordre; 2° que δ devient d'un ordre supérieur pour trois valeurs de m.

Digitized by Google

toutes les surfaces proposées. L'ensemble de ces lignes formera une surface extrêmement déliée coupant chacune des surfaces proposées suivant une courbe fermée infiniment petite. Mais, d'après le théorème de Dupin, toutes ces courbes sont des lignes de courbure des surfaces auxquelles elles appartiennent, ce qui veut dire qu'à la limite elles deviennent des points ombilicaux, ce qu'il fallait démontrer. » L'objection capitale contre cette démonstration est qu'autour d'un ombilic les lignes de courbure ne forment jamais un cercle et que, si l'équation des lignes de courbure y devient indéterminée, ce n'est pas parce qu'il y passe une infinité de lignes de courbure, mais bien parce qu'il en passe trois (plus de deux). C'est ce qui résulte d'une remarquable étude où M. Darboux a donné les formes principales que peuvent affecter les lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic. Ainsi, dans les quadriques, les trois lignes de courbure qui passent en un ombilic sont la section principale et les deux droites isotropes situées dans le plan tangent.

La condition analytique pour qu'une famille de surfaces du second ordre à centre

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

fasse partie d'un système orthogonal s'écrit

$$(2).\ \ldots\ldots\ AA'(B-C)+BB'(C-A)+CC'(A-B)=0;$$

A, B, C sont des fonctions d'un même paramètre u, A′, B′, C′ leurs dérivées. M. Maurice Lévy en a déduit l'équation la plus générale d'une famille orthogonale de quadriques à centre (p. 180); il a résolu le même problème pour les quadriques dénuées de centre. Mais ses formules sont compliquées et ne se prêtent pas commodément aux applications; M. Lévy en donne quelques-unes dans son mémoire, savoir les familles de paraboloïdes découvertes par Serret (*) et trois autres cas particuliers nouveaux.

Au contraire, la méthode d'intégration de M. Darboux (**) est admirable-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XII.
(**) *Annales de l'École Normale*, 1878, p. 129.

Digitized by Google

ment préparée pour les applications. Il suffit de poser

$$C - A = u$$

et arbitrairement

$$B - A = \varphi(u) = \varphi$$

pour trouver

$$A = \frac{u\varphi(1-\varphi')}{u\varphi' - \varphi}, \quad B = \frac{\varphi(u-\varphi)}{u\varphi' - \varphi}, \quad C = \frac{u\varphi'(u-\varphi)}{u\varphi' - \varphi}.$$

Ainsi s'il existe entre les carrés des axes une relation linéaire et homogène

$$mA + nB + pC = \sigma,$$

on trouvera que $\varphi(u)$ est déterminée par l'équation

$$(u-\varphi)^m u^n \varphi^p = c^{te}.$$

Le mémoire de M. Maurice Lévy se termine par une espèce de transformation de coordonnées curvilignes très générale permettant de trouver tous les systèmes orthogonaux qui comprennent des surfaces de nature déterminée; mais cette partie est restée sans application.

Trois ans plus tard, M. Maurice Lévy est revenu sur une remarque déjà faite dans le mémoire précédent et a montré qu'on peut écrire rapidement l'équation du troisième ordre dont dépend le problème des surfaces orthogonales (*). Il suffit pour cela de faire une transformation de coordonnées en partant d'une équation très simple du mémoire

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x' \partial y'} = 0.$$

On trouve ainsi l'équation

$$(3). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots A\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0$$

où

$$H = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$A = s(1+q^2) - pqt,$$
$$B = t(1+p^2) - r(1+q^2),$$
$$C = pqr - s(1+p^2),$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXVII, 1873, p. 1435.

Digitized by Google

p, q, r, s, t sont les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et à y. Il est bon de remarquer que l'équation des lignes de courbure de la surface $u = c^{te}$ est

$$C dx^2 - B dx dy + A dy^2 = 0.$$

L'équation (3) est la plus condensée des équations du troisième ordre dont dépend le paramètre d'une famille orthogonale; nous avons vu dans le chapitre précédent que cette forme se prêtait très bien à l'étude d'un grand nombre de problèmes intéressants.

CHAPITRE TROISIÈME.

La méthode de Lamé, ainsi que je l'ai déjà dit, repose essentiellement sur l'intégration de six équations simultanées aux dérivées partielles du second ordre auxquelles doivent satisfaire trois fonctions. Je vais exposer succinctement cette méthode en employant, sauf une notation de M. Darboux, les notations mêmes de Lamé : cet exposé m'est indispensable pour pouvoir faire comprendre les recherches subséquentes dont une partie, qui m'est personnelle, est publiée ici pour la première fois.

Soient

$$(1). \quad \begin{cases} f(x, y, z) = \rho \\ f_1(x, y, z) = \rho_1 \\ f_2(x, y, z) = \rho_2 \end{cases}$$

les équations des trois familles de surfaces faisant partie du système orthogonal.

Posons

$$(2). \quad h_i^2 = S\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial u}\right)^2 \quad (3 \text{ formules } i = 0, 1, 2),$$

le signe S indiquant qu'on prendra la somme des trois termes obtenus en remplaçant u par x, y, z. Dans ce qui suivra, u désignera toujours l'une quelconque des lettres x, y, z. Appelons enfin X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2,

Digitized by Google

les cosinus directeurs des normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 (la surface ρ est celle sur laquelle ρ demeure constant).

La différentiation des équations (1) fera connaître dx, dy, dz par les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{X}{h}\,d\rho + \frac{X_1}{h_1}\,d\rho_1 + \frac{X_2}{h_2}\,d\rho_2,\\ dy &= \frac{Y}{h}\,d\rho + \frac{Y_1}{h_1}\,d\rho_1 + \frac{Y_2}{h_2}\,d\rho_2,\\ dz &= \frac{Z}{h}\,d\rho + \frac{Z_1}{h_1}\,d\rho_1 + \frac{Z_2}{h_2}\,d\rho_2, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduira les neuf dérivées $\frac{\partial u}{\partial \rho_i}$.

Si l'on pose alors

$$(4)\quad H_i^2 = S\left(\frac{\partial u}{\partial \rho_i}\right)^2 \quad (3 \text{ formules } i = 0, 1, 2),$$

on aura

$$(5)\quad H_i = \frac{1}{h_i}$$

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2$$

Remarquons en passant que $H_i = \frac{\partial s}{\partial \rho_i}$, c'est-à-dire la limite du rapport de l'accroissement de la normale sur la surface ρ_i à l'accroissement du paramètre ρ_i.

Le tableau des neuf cosinus directeurs des normales est le suivant :

	$0x$.	$0y$.	$0z$.
Normale à la surface ρ . .	$X = \frac{1}{H}\frac{\partial x}{\partial \rho}$	$Y = \frac{1}{H}\frac{\partial y}{\partial \rho}$	$Z = \frac{1}{H}\frac{\partial z}{\partial \rho}$
» » ρ_1 . .	$X_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}$	$Y_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial \rho_1}$	$Z_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial \rho_1}$
» » ρ_2 . .	$X_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}$	$Y_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_2}$	$Z_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_2}$

Digitized by Google

Nous avons maintenant à établir les relations fondamentales entre les diverses quantités introduites jusqu'à présent.

La formule (5) permet d'écrire les formules (3) ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= \mathrm{H}X d\rho + \mathrm{H}_1 X_1 d\rho_1 + \mathrm{H}_2 X_2 d\rho_2,\\ dy &= \mathrm{H}Y d\rho + \mathrm{H}_1 Y_1 d\rho_1 + \mathrm{H}_2 Y_2 d\rho_2,\\ dz &= \mathrm{H}Z d\rho + \mathrm{H}_1 Z_1 d\rho_1 + \mathrm{H}_2 Z_2 d\rho_2. \end{aligned}\right.$$

Et comme dx, dy, dz sont des différentielles exactes, on devra avoir

$$\frac{\partial(\mathrm{H}_i X_i)}{\partial\rho_k} = \frac{\partial(\mathrm{H}_k X_k)}{\partial\rho_i},\quad \frac{\partial(\mathrm{H}_i Y_i)}{\partial\rho_k} = \frac{\partial(\mathrm{H}_k Y_k)}{\partial\rho_i},\quad \frac{\partial(\mathrm{H}_i Z_i)}{\partial\rho_k} = \frac{\partial(\mathrm{H}_k Z_k)}{\partial\rho_i}.$$

Posons (*)

$$(7)\quad \beta_{ik} = \frac{1}{\mathrm{H}_i}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial\rho_i}.$$

Les conditions d'intégration deviennent

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial\rho_2} - X_2\beta_{12}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial X_2}{\partial\rho_1} - X_1\beta_{21}\right)\\ \mathrm{A}_1 &= \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial X_2}{\partial\rho} - X\beta_{20}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial X}{\partial\rho_2} - X_2\beta_{02}\right)\\ \mathrm{A}_2 &= \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial X}{\partial\rho_1} - X_1\beta_{01}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial X_1}{\partial\rho} - X\beta_{10}\right)\\ \mathrm{B} &= \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial\rho_2} - Y_2\beta_{12}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial Y_2}{\partial\rho_1} - Y_1\beta_{21}\right)\\ \mathrm{B}_1 &= \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial Y_2}{\partial\rho} - Y\beta_{20}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial\rho_2} - Y_2\beta_{02}\right)\\ \mathrm{B}_2 &= \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial Y}{\partial\rho_1} - Y_1\beta_{01}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial\rho} - Y\beta_{10}\right)\\ \mathrm{C} &= \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\rho_2} - Z_2\beta_{12}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\rho_1} - Z_1\beta_{21}\right)\\ \mathrm{C}_1 &= \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial\rho} - Z\beta_{20}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}_2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\rho_2} - Z_2\beta_{02}\right)\\ \mathrm{C}_2 &= \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\frac{\partial Z}{\partial\rho_2} - Z_1\beta_{01}\right) = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial\rho} - Z\beta_{10}\right). \end{aligned}\right.$$

(*) Lamé n'introduit pas les quantités β_{ik} et conserve les H_i. C'est croyons-nous, M. Darboux qui les a introduites le premier dans son mémoire de 1878.

Digitized by Google

Les quantités A, B, C se trouvent définies par ces mêmes formules. Or on a évidemment, puisque $SX^2 = 1$, et en considérant soit les premiers membres, soit les seconds,

$$A_2X + B_2Y + C_2Z = 0,$$
$$A_2X_1 + B_2Y_1 + C_2Z_1 = 0;$$

comme d'autre part

$$X_2X + Y_2Y + Z_2Z = 0,$$
$$X_2X_1 + Y_2Y_1 + Z_2Z_1 = 0,$$

il en résulte

$$A_2 = \lambda_2 X_2, \qquad B_2 = \lambda_2 Y_2, \qquad C_2 = \lambda_2 Z_2$$

et de même

$$A = \lambda X, \qquad B = \lambda Y, \qquad C = \lambda Z,$$
$$A_1 = \lambda_1 X_1, \qquad B_1 = \lambda_1 Y_1, \qquad C_1 = \lambda_1 Z_1.$$

Mais on tire aussi des formules (8) la relation

$$AX + A_2X_2 + BY + B_2Y_2 + CZ + C_2Z_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda + \lambda_2 = 0,$$

on aurait de même

$$\lambda + \lambda_1 = 0,$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

ce qui exige

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et par suite

$$A = A_1 = A_2 = B = B_1 = B_2 = C = C_1 = C_2 = 0.$$

Donc les formules (8) se simplifient notablement et deviennent

$$\beta_{12} = \frac{1}{X_2}\frac{\partial X_1}{\partial \rho_2}, \qquad \beta_{21} = \frac{1}{X_1}\frac{\partial X_2}{\partial \rho_1} \text{ etc.},$$

ou en les condensant en une seule,

$$(9). \quad \beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \rho_i} = \frac{1}{X_k}\frac{\partial X_i}{\partial \rho_k} = \frac{1}{Y_k}\frac{\partial Y_i}{\partial \rho_k} = \frac{1}{Z_k}\frac{\partial Z_i}{\partial \rho_k}.$$

Digitized by Google

Ces formules feront connaître les cosinus directeurs lorsque les β_{ik} seront déterminés; groupons-les de manière à bien mettre ce fait en évidence. Il suffit évidemment, à cause de la symétrie des formules (9), de chercher les valeurs de X, X_1, X_2.

Ces formules donnent immédiatement les relations

$$\frac{\partial X}{\partial \rho_1} = X_1\beta_{01}, \quad \frac{\partial X}{\partial \rho_2} = X_2\beta_{02},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial \rho} = X\,\beta_{10}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial \rho} = X\,\beta_{20}.$$

Pour avoir $\frac{\partial X}{\partial \rho}$, différentions la relation

$$X^2 + X_1^2 + X_2^2 = 1,$$

nous obtenons la formule

$$X\frac{\partial X}{\partial \rho} + X_1\frac{\partial X_1}{\partial \rho} + X_2\frac{\partial X_2}{\partial \rho} = 0$$

où

$$X\frac{\partial X}{\partial \rho} + X_1X\beta_{10} + X_2X\beta_{20} = 0.$$

Finalement nous obtenons le tableau suivant :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial U}{\partial \rho} = -U_1\beta_{10} - U_2\beta_{20}, & \dfrac{\partial U_1}{\partial \rho} = U\,\beta_{10}, & \dfrac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = U\,\beta_{20}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \rho_1} = U_1\beta_{01}, & \dfrac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = -U_1\beta_{01} - U_2\beta_{21}, & \dfrac{\partial U_2}{\partial \rho_1} = U_1\beta_{21}, \\ \dfrac{\partial U}{\partial \rho_2} = U_2\beta_{02}, & \dfrac{\partial U_1}{\partial \rho_2} = U_2\beta_{12}, & \dfrac{\partial U_2}{\partial \rho_2} = -U\,\beta_{02} - U_1\beta_{12}, \end{array}\right.$$

qui renferme vingt-sept équations, puisque U désigne à volonté X, Y, Z.

Ces équations (10) entraînent à leur tour des conditions d'intégralité

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho_j \partial \rho_k} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial \rho_k \partial \rho_j}$$

Digitized by Google

et l'on obtient finalement les neuf équations suivantes, équivalentes aux six équations de Lamé (*),

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_2}=\beta_{02}\beta_{21}, & \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho}=\beta_{10}\beta_{02}, & \dfrac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1}=\beta_{21}\beta_{10}, \\ \dfrac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_2}=\beta_{20}\beta_{12}, & \dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho}=\beta_{01}\beta_{20}, & \dfrac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_1}=\beta_{12}\beta_{01}, \end{array}\right.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1}+\dfrac{\partial\beta_{01}}{\partial\beta}+\beta_{20}\beta_{21}=0, \\ \dfrac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_2}+\dfrac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho}+\beta_{10}\beta_{12}=0, \\ \dfrac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1}+\dfrac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_2}+\beta_{01}\beta_{02}=0. \end{array}\right.$$

Pour avoir les équations de Lamé, il suffit de remplacer β_{ij} par leur valeur; il vient ainsi :

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 H}{\partial\rho_1\partial\rho_2}=\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho_2}+\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho_1} \\ \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial\rho_2\partial\rho}=\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho}+\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_2} \\ \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial\rho\partial\rho_1}=\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_1}+\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial H}{\partial\rho} \\ \dfrac{d\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_1}}{d\rho_1}+\dfrac{d\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho}}{d\rho}+\dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho_2}=0, \\ \dfrac{d\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_2}}{d\rho}+\dfrac{d\dfrac{1}{H}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho}}{d\rho_2}+\dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial H}{\partial\rho_1}=0, \\ \dfrac{d\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho_1}}{d\rho_2}+\dfrac{d\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho_2}}{d\rho_1}+\dfrac{1}{H^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial\rho}\dfrac{\partial H_2}{\partial\rho}=0. \end{array}\right.$$

(*) Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, 1859, p. 76, équations 8, et p. 78, équations 9.

Digitized by Google

Ribaucour fait observer (*) que les quatre premières équations sont suffisantes. M. Darboux a donné des trois premières équations une élégante interprétation géométrique. Si on a trois fonctions H, H_1, H_2 qui y satisfont, on en déduit non un système triple orthogonal, mais un système triple dans lequel chaque surface d'une famille est coupée par les deux autres familles suivant un réseau conjugué (**).

En résumé, il faudra d'abord trouver trois fonctions H, H_1, H_2 de ρ, ρ_1, ρ_2 satisfaisant aux six équations (13). Supposons-les trouvées. On se donnera arbitrairement neuf constantes représentant les valeurs initiales des cosinus directeurs X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2 Z_2. Les vingt-sept formules (10), différentiées autant de fois que l'on voudra, feront alors connaître ces cosinus directeurs eux-mêmes par leurs développements en série. Dans les formules (3), les seconds membres sont alors des différentielles exactes et l'on en déduit

$$\begin{cases} x = \mathrm{F}(\rho, \rho_1, \rho_2) \\ y = \mathrm{F}_1(\rho, \rho_1, \rho_2) \\ z = \mathrm{F}_2(\rho, \rho_1, \rho_2), \end{cases}$$

ce qui achève la solution du problème.

M. Darboux a étudié les systèmes où $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$, ce qui donne des formules analogues à celles qu'on rencontre dans la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Signalons encore les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les trois coordonnées (***).

$$(13^{bis}). \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \rho_i \partial \rho_j} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_i}{\partial \rho_j}\frac{\partial u}{\partial \rho_i} + \frac{1}{h_j}\frac{\partial h_j}{\partial \rho_i}\frac{\partial u}{\partial \rho_j} = 0$$

et rappelons que

$$(13^{ter}). \quad \sum \left(h_i \frac{\partial u}{\partial \rho_i}\right)^2 = 1.$$

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jordan,* 4e série, tome VII, 1891, p. 34.

(**) *Annales de l'École Normale,* 1878, p. 291.

(***) Lamé, 5e leçon, § L.

Digitized by Google

Il importe de remarquer que, si la connaissance des β_{ij} entraîne celle des cosinus directeurs, elle n'entraîne la détermination des H_i qu'à l'aide de l'introduction de trois fonctions arbitraires d'une variable chacune. Il en résulte une méthode de recherche des systèmes orthogonaux; car de toute solution des équations (12) et (13), on pourra déduire des familles de surfaces plus générales que celles qui auront donné naissance à cette solution. D'ailleurs les cosinus directeurs n'étant pas modifiés, les nouvelles surfaces auront même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces primitives.

Considérons, par exemple, le système triple orthogonal des quadriques homofocales défini par les formules

$$x_i = \sqrt{\frac{(a_i - \rho)(a_i - \rho_1)(a_i - \rho_2)}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)}} \qquad i = 0, 1, 2,$$

j, k ont les mêmes valeurs mais $i \gtrless j \gtrless k$.

Le ds^2 fera connaître les fonctions H, H_1, H_2, d'où l'on déduira les β_{ij}; par exemple

$$\beta_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f(\rho_1)}{f(\rho)}}\sqrt{\frac{\rho - \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}}\frac{1}{\rho - \rho_1},$$

en posant

$$f(\rho) = (\rho - a)(\rho - a_1)(\rho - a_2).$$

De même pour les autres β_{ij}.

Inversement donnons-nous les β_{ij} et cherchons les systèmes orthogonaux correspondants. Nous aurons à intégrer des équations de la forme

$$\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \rho} = \beta_{01}$$

ou mieux, en continuant à appeler H, H_1, H_2 les quantités connues qui viennent d'être calculées et appelant Hp, $H_1 p_1$, $H_2 p_2$ les inconnues

$$\frac{1}{H_1 p}\frac{\partial (H_1 p_1)}{\partial \rho} = \beta_{01} = \frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \rho}.$$

Digitized by Google

On en déduit facilement que p, p_1, p_2 sont les trois dérivées premières d'une même fonction U qui doit vérifier les équations suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} (\rho-\rho_1)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_1}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial\rho}-\dfrac{\partial U}{\partial\rho_1}\right)=0,\\ (\rho_1-\rho_2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial\rho_1}-\dfrac{\partial U}{\partial\rho_2}\right)=0,\\ (\rho_2-\rho)\dfrac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U}{\partial\rho_2}-\dfrac{\partial U}{\partial\rho}\right)=0. \end{array}\right.$$

A chaque solution U, correspondra un système orthogonal. Par exemple, si U est le produit de trois fonctions de ρ, de ρ_1 et de ρ_2 respectivement, on calculera facilement ces fonctions et en faisant la somme de pareilles solutions, on trouvera

$$\left\{\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2}\sum\dfrac{Ax}{(a+h)\sqrt{(\rho+h)(\rho_1+h)(\rho_2+h)}}\\ y_0=-\dfrac{1}{2}\sum\dfrac{Ay}{(a_1+h)\sqrt{(\rho+h)(\rho_1+h)(\rho_2+h)}}\\ z_0=-\dfrac{1}{2}\sum\dfrac{Az}{(a_2+h)\sqrt{(\rho+h)(\rho_1+h)(\rho_2+h)}}, \end{array}\right.$$

x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de la nouvelle surface, x, y, z les valeurs d'où nous sommes partis, les quantités A et h des constantes. Ces surfaces sont algébriques.

De même, si l'on part des formules qui correspondent à la transformation par rayons vecteurs réciproques d'un système de plans parallèles aux plans coordonnés

$$x=\frac{\rho}{r},\quad y=\frac{\rho_1}{r},\quad z=\frac{\rho_2}{r}$$

avec

$$r=\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2,$$

on aura à intégrer un système d'équations du second ordre, comme le

Digitized by Google

système (14), mais qui cette fois s'intègrera complètement et conduira aux surfaces (*)

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} x &= -\rho F + \int \frac{\theta'}{2\rho}\, d\rho \\ y &= -\rho_1 F + \int \frac{\theta_1'}{2\rho_1}\, d\rho_1 \\ z &= -\rho_2 F + \int \frac{\theta_2'}{2\rho_2}\, d\rho_2 \end{aligned}\right.$$

où

θ est une fonction arbitraire de ρ,
θ_1 » » ρ_1,
θ_2 » » ρ_2

et

$$F = \frac{\theta + \theta_1 + \theta_2}{\rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2}.$$

Ces surfaces ont, comme on l'a déjà remarqué, la même représentation sphérique que celles d'où on est parti et qui correspondent à $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{3}$. Or sur ces dernières les courbes (ρ), sur lesquelles ρ varie seul, sont des cercles, donc planes; il en est donc de même de toutes les surfaces comprises dans les équations (15). Chacune de ces surfaces est susceptible d'engendrer par translation une famille orthogonale.

Le système d'équations (14) rentre dans un type qui se rencontre fréquemment, savoir.

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_1\partial\rho_2} - h_2\frac{\partial U}{\partial\rho_1} + h_1\frac{\partial U}{\partial\rho_2} &= 0, \\ (\rho_2 - \rho)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_2\partial\rho} - h\frac{\partial U}{\partial\rho_2} + h_2\frac{\partial U}{\partial\rho} &= 0, \\ (\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_1} - h_1\frac{\partial U}{\partial\rho} + h\frac{\partial U}{\partial\rho_1} &= 0. \end{aligned}\right.$$

M. Darboux (**) en a donné dans son mémoire de 1878 quelques propriétés auxquelles peuvent s'ajouter celles qu'il a indiquées dans ses *Leçons*

(*) Darboux, *Annales de l'École Normale*, t. III, 1866.

(**) On lira aussi avec intérêt, les pages que ce géomètre à consacré au même sujet, au quatrième tome de ces leçons, livre VIII, chapitre XII, pages 278 et suivantes. (*Note ajoutée pendant l'impression.*)

Digitized by Google

sur la théorie générale des surfaces (tome II, chapitre III, *Sur l'équation d'Euler et de Poisson*),

$$U = A(\rho + a)^{-h}(\rho_1 + a)^{-h_1}(\rho_2 + a)^{-h_2},$$

$$U = \int_{\alpha}^{\beta} (\rho + a)^{-h}(\rho_1 + a)^{-h_1}(\rho_2 + a)^{-h_2}\varphi(a)da,$$

$$U = \int_{\rho_1}^{\rho_2} (\rho + a)^{-h}(\rho_1 + a)^{-h_1}(\rho_2 + a)^{-h_2}\varphi(a)da$$

sont des solutions du système (16), les deux dernières avec une fonction arbitraire.

De toute solution $U = \varphi(\rho, \rho_1, \rho_2)$, on peut détruire une solution plus générale (*),

$$U = (c\rho + d)^{-h}(c\rho_1 + d)^{-h_1}(c\rho_2 + d)^{-h_2}\varphi\left(\frac{a\rho + b}{c\rho + d}, \frac{a\rho_1 + b}{c\rho_1 + d}, \frac{a\rho_2 + b}{c\rho_2 + d}\right),$$

et c'est une propriété qui appartient exclusivement aux équations d'Euler et de Poisson (**).

Si maintenant on appelle $U(h, h_1, h_2)$ une solution quelconque du système (16), on a

$$(17). \quad \ldots\ldots\ldots \frac{d}{d\rho}U(h, h_1, h_2) = U(h + 1, h_1, h_2)$$

et, par suite, en désignant par m, n, p des nombres entiers et positifs,

$$U(m, n, p) = \frac{d^{m-1}}{d\rho^{m-1}}\frac{d^{n-1}}{d\rho_1^{n-1}}\frac{d^{p-1}}{d\rho_2^{p-1}}U(1, 1, 1),$$

ce qui donne l'intégrale générale de toutes les équations (16) à coefficients entiers et positifs, puisque

$$U(1, 1, 1) = \frac{f(\rho)}{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)} + \frac{f_1(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho)} + \frac{f_2(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho)(\rho_2 - \rho_1)}.$$

Mais on ne peut passer aux équations à coefficients négatifs; la rela-

(*) Appell, *Bulletin des sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 314.

(**) Lucien Lévy, *Nouv. ann. de mathématiques*, 3e série, t. VIII, p. 545, 1889.

Digitized by Google

tion (17) ne donnant plus l'intégrale générale dans le cas où $h = 0$. En effet, dans ce cas, le système (16) s'écrit

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho_1-\rho_2)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-h_2\frac{\partial U}{\partial\rho_1}+h_1\frac{\partial U}{\partial\rho_2}=0,\\ &(\rho_2-\rho)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_2\partial\rho}+h_2\frac{\partial U}{\partial\rho}=0,\\ &(\rho-\rho_1)\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_1}-h_1\frac{\partial U}{\partial\rho}=0. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale générale de ce système sera

$$U(0, h_1, h_2)=\int\frac{R d\rho}{(\rho-\rho_1)^{h_1}(\rho-\rho_2)^{h_2}}+V,$$

R étant une fonction arbitraire de ρ et V l'intégrale générale de

$$(\rho_1-\rho_2)\frac{\partial^2 V}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-h_2\frac{\partial V}{\partial\rho_1}+h_1\frac{\partial V}{\partial\rho_2}=0.$$

La dérivée de $U(0, h_1, h_2)$ par rapport à ρ ne contenant plus que la fonction arbitraire R ne sera pas l'intégrale générale du système h, h_1, h_2 où $h = 1$.

On ne possède donc pas de relation de récurrence permettant de passer aux équations à coefficients négatifs et entiers. La transformation indiquée par M. Darboux (*) et qui donne si heureusement la solution pour le cas d'une seule équation ne réussit pas dans le cas actuel.

Je vais intégrer directement les équations qui correspondent à $h = h_1 = h_2 = -1$.

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &(\rho_1-\rho_2)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\partial\rho_2}+\frac{\partial u}{\partial\rho_1}-\frac{\partial u}{\partial\rho_2}=0,\\ &(\rho_1-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_2\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{\partial u}{\partial\rho}=0,\\ &(\rho-\rho_1)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1}+\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{\partial u}{\partial\rho_1}=0. \end{aligned}\right.$$

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces par Darboux*, t. II, p. 65.

Digitized by Google

La première admet comme intégrale générale

$$(20). \quad \ldots\ldots\ldots \quad U = (\rho_1 - \rho_2)^3 \frac{d^2}{d\rho_1 d\rho_2} \frac{f_1(\rho_1, \rho) - f_2(\rho_2, \rho)}{\rho_1 - \rho_2},$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions arbitraires. Supposons d'abord $f_2(\rho_2, \rho)$ nulle et exprimons qu'on a ainsi une solution U_1 des deux dernières équations (19),

$$U_1 = (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} - 2f_1$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho} = (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1} - 2\frac{\partial f_1}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} + (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho \partial \rho_1} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1} + (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial^3 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1^2}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \rho_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1}$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \rho \partial \rho_2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1}.$$

La dernière équation (19) devient

$$(21) \quad (\rho_1 - \rho_2)\left[(\rho - \rho_1)\frac{d^2}{d\rho d\rho_1}\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} - \frac{d}{d\rho_1}\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} + \frac{d}{d\rho}\frac{\partial f_1}{\partial \rho_1}\right] - \left[(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1} - \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} + 2\frac{\partial f_1}{\partial \rho}\right] = 0$$

et la précédente

$$(\rho - \rho_1)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \rho \partial \rho_1} + 2\frac{\partial f_1}{\partial \rho} - \frac{\partial f_1}{\partial \rho_1} = 0.$$

Cette dernière équation est une équation d'Euler et de Poisson qui admet comme intégrale générale

$$f_1(\rho_1, \rho) = (\rho - \rho_1)^2 R'' - 2(2R' + R_1')(\rho - \rho_1) + 6(R - R_1),$$

R, R_1, R', R'', R_1' étant des fonctions arbitraires respectivement de ρ et ρ_1, et leurs dérivées.

Digitized by Google

Cette intégrale vérifie aussi l'équation (21).

Si de même on appelle u_2 la solution particulière obtenue en supposant $f_1(\rho_1, \rho)$ nulle dans l'expression (20) et si l'on exprime que u_2 vérifie les deux dernières équations (19), on trouve

$$f_2(\rho_2, \rho) = (\rho - \rho_2)^2 \mathfrak{R}'' - 2(2\mathfrak{R}' + R_2')(\rho - \rho_2) + 6(\mathfrak{R} - R_2),$$

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, R_2, R'_2 étant des fonctions arbitraires respectivement de ρ et ρ_2, et leurs dérivées.

[*] On aura alors

$$\begin{aligned}
U_1 &= (\rho_1 - \rho_2)\left[-2(\rho - \rho_1)R'' - 2R_1''(\rho - \rho_1) + 4(R' - R_1')\right] \\
&\quad - 2(\rho - \rho_1)^2 R'' + 4(2R' + R_1')(\rho - \rho_1) - 12(R - R_1), \\
U_2 &= (\rho_1 - \rho_2)\left[-2(\rho - \rho_2)(\mathfrak{R}'' + R_2'') + 4(\mathfrak{R}' - R_2')\right] \\
&\quad + 2(\rho - \rho_2)^2 \mathfrak{R}'' - 4(2\mathfrak{R}' + R_2') + 12(\mathfrak{R} - R_2).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} U &= \tfrac{1}{2} U_1 + \tfrac{1}{2} U_2 \\
\tfrac{1}{2} U &= \rho^2 r'' + \rho_1^2 r_1'' + \rho_2^2 r_2'' \\
&\quad + \rho_1\rho_2(r'' - r_1'' - r_2'') + \rho\rho_2(r_1'' - r'' - r_2'') + \rho\rho_1(r_2'' - r'' - r_1'') \\
&\quad + 2\rho(r_1' + r_2' - 2r') + 2\rho_1(r' + r_2' - 2r_1') + 2\rho_2(r' + r_1' - 2r_2') \\
&\quad + 6(r + r' + r'')
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
r &= \mathfrak{R} - R = \text{fonction arbitraire de } \rho, \\
r_1 &= R_1 \quad\;\; = \text{fonction arbitraire de } \rho_1, \\
r_2 &= -R_2 \quad = \text{fonction arbitraire de } \rho_2.
\end{aligned} \qquad [*]$$

(*) *La partie entre astérisques a été rectifiée pendant l'impression.* Dans le manuscrit, j'avais écrit

$$\begin{aligned}
U_1 &= (\rho_1 - \rho_2)[\quad] - (\rho - \rho_1)^2 R'' \ldots, \\
U_2 &= (\rho_1 - \rho_2)[\quad] + (\rho - \rho_2)^2 \mathfrak{R}'' \ldots,
\end{aligned}$$

ce qui avait donné à la valeur de U la forme dissymétrique signalée comme défectueuse dans ma préface. La Classe des sciences a bien voulu m'autoriser à réparer cette légère incorrection.

Digitized by Google

Cette solution étant connue, on en déduira $u(-m, -n, -p)$ en s'appuyant sur ce que

$$\frac{d^{m+n+p-3}}{d\rho_2^{m-1}d\rho_1^{n-1}d\rho_2^{p-1}}u(-m,-n,-p)=u(-1,-1,-1).$$

Comme dans le passage d'une intégrale à l'autre on ne rencontrera pas d'équation où l'un des h soit nul, on est sûr d'obtenir ainsi l'intégrale générale; mais il restera à dégager cette intégrale des signes d'intégration.

La méthode de recherche de systèmes orthogonaux que j'ai exposée à la page 27 du présent chapitre et qui nous a conduit à d'intéressantes conséquences est susceptible d'une interprétation géométrique que je vais faire connaître.

Soit toujours un système triplement orthogonal donné; x, y, z les coordonnées d'un point m du système connues en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. Posons-nous le problème de chercher s'il existe des systèmes orthogonaux qui puissent correspondre au système donné de manière que, si M est le point correspondant à m, les plans tangents aux trois surfaces qui se coupent en M soient respectivement parallèles aux plans tangents aux trois surfaces qui se coupent en m.

Les plans tangents en M doivent avoir pour équation, en appelant ξ, η, ζ des coordonnées courantes,

$$\begin{cases} \xi\dfrac{\partial x}{\partial\rho}+\eta\dfrac{\partial y}{\partial\rho}+\zeta\dfrac{\partial z}{\partial\rho}=p, \\ \xi\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}+\eta\dfrac{\partial y}{\partial\rho_1}+\zeta\dfrac{\partial z}{\partial\rho_1}=p_1, \\ \xi\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}+\eta\dfrac{\partial y}{\partial\rho_2}+\zeta\dfrac{\partial z}{\partial\rho_2}=p_2, \end{cases}$$

p, p_1, p_2 sont des fonctions à déterminer de ρ, ρ_1, ρ_2.

Chacun de ces plans doit envelopper une des surfaces du système et le point de contact du plan avec son enveloppe doit être précisément $M(\xi, \eta, \zeta)$ d'intersection des trois plans précédents.

Si ρ_1 et ρ_2 varient seuls, le premier plan tangent enveloppera une surface

Digitized by Google

dont le point générateur s'obtiendra en adjoignant à l'équation du plan tangent ses deux dérivées par rapport à ρ_1 et ρ_2. La première de ces dérivées sera

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\partial\rho_1}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\rho_1}=\frac{\partial p}{\partial\rho_1}.$$

Mais la considération du second plan tangent introduirait en différentiant par rapport à ρ l'équation

$$\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1\partial\rho}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_1\partial\rho}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1\partial\rho}=\frac{\partial p_1}{\partial\rho}.$$

Donc

$$\frac{\partial p}{\partial\rho_1}=\frac{\partial p_1}{\partial\rho},$$

de même

$$\frac{\partial p}{\partial\rho_2}=\frac{\partial p_2}{\partial\rho}$$

et

$$\frac{\partial p_1}{\partial\rho_2}=\frac{\partial p_2}{\partial\rho_1}.$$

Les trois fonctions p, p_1, p_2 sont donc les dérivées d'une même fonction U, et l'on est amené à écrire les équations des plans tangents et leurs dérivées de la manière suivante :

(22). . . . . $\left\{\begin{aligned}&\xi\frac{\partial x}{\partial\rho}+\eta\frac{\partial y}{\partial\rho}+\zeta\frac{\partial z}{\partial\rho}=\frac{\partial U}{\partial\rho}\\&\xi\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\eta\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+\zeta\frac{\partial z}{\partial\rho_1}=\frac{\partial U}{\partial\rho_1}\\&\xi\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+\eta\frac{\partial y}{\partial\rho_2}+\zeta\frac{\partial z}{\partial\rho_2}=\frac{\partial U}{\partial\rho_2}.\end{aligned}\right.$

(23). . . . . $\left\{\begin{aligned}&\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\partial\rho_1}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\rho_1}=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_1}\\&\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_1\partial\rho_2}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1\partial\rho_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_1\partial\rho_2}\\&\xi\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_2\partial\rho}+\eta\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_2\partial\rho}+\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_2\partial\rho}=\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_2\partial\rho}.\end{aligned}\right.$

Digitized by Google

Toutes ces équations devant être vérifiées par les coordonnées du même point M, chaque équation du système (23) est conséquence du système (22). Par exemple, on doit pouvoir obtenir la première équation (23) en multipliant la première équation (22) par une certaine fonction λ_1, la seconde équation par une fonction λ_2, la troisième par λ_3, d'où

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial\rho\partial\rho_1} &= \lambda\frac{\partial x}{\partial\rho} + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \lambda_2\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\\
\frac{\partial^2 y}{\partial\rho\partial\rho_1} &= \lambda\frac{\partial y}{\partial\rho} + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + \lambda_2\frac{\partial y}{\partial\rho_1}\\
\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\rho_1} &= \lambda\frac{\partial z}{\partial\rho} + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial\rho_1} + \lambda_2\frac{\partial z}{\partial\rho_2}\\
\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\partial\rho_1} &= \lambda\frac{\partial U}{\partial\rho} + \lambda_1\frac{\partial U}{\partial\rho_1} + \lambda_2\frac{\partial U}{\partial\rho_2}.
\end{aligned}\right.$$

Ainsi x, y, z et U sont quatre solutions d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre.

Mais on sait que

$$S\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho_2} = 0, \quad S\frac{\partial u}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho} = 0, \quad S\frac{\partial u}{\partial\rho_2}\frac{\partial u}{\partial\rho_1} = 0,$$

où S indique toujours que l'on doit faire la somme de trois expressions pareilles, où u est remplacé successivement par x, par y, et par z.

Différentions chacune de ces égalités par rapport à la variable qui n'y figure pas dans les dénominateurs des quotients différentiels, et ajoutons ou retranchons convenablement les égalités nouvelles ainsi obtenues, nous voyons que

$$S\frac{\partial u}{\partial\rho_2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} = S\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\partial\rho_2} = S\frac{\partial u}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_2\partial\rho} = 0.$$

Donc, en multipliant la première équation (24) par $\frac{\partial x}{\partial\rho_2}$, la seconde par $\frac{\partial y}{\partial\rho_2}$, la troisième par $\frac{\partial z}{\partial\rho_2}$ et ajoutant membre à membre, on trouve

$$\lambda_2 = 0.$$

Digitized by Google

Au contraire, si on multiplie respectivement par $\frac{\partial x}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \rho}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, et qu'on ajoute, on obtient l'égalité

$$S \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho_1} = \lambda S \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\rho_1} S \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 = \lambda S \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2,$$

ou

$$H \frac{\partial H}{\partial \rho_1} = \lambda H^2,$$

$$\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_1}.$$

De même

$$\lambda_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}.$$

Donc enfin x, y, z et U doivent être quatre solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1},$$

et l'on aura deux équations analogues par deux permutations circulaires.

Dans le cas particulier déjà examiné, x, y, z sont des coordonnées elliptiques vérifiant trois équations telles que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{1}{2(\rho - \rho_1)} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1}\right).$$

La recherche de la fonction U est donc ramenée à l'intégration du système (14)

Une fois la fonction U trouvée, les équations (22) définissent bien un système triplement orthogonal, puisqu'au point ξ, n, ζ les trois plans tangents sont parallèles à ceux du système orthogonal donné.

Le système orthogonal que nous avons défini à la page 29 (*) et ceux qu'on

(*) Ce système se compose de trois familles de sphères respectivement tangentes aux trois plans coordonnés.

Digitized by Google

en déduit par la méthode Darboux-Combescure (*) jouissent d'une propriété curieuse. En chaque point M de l'espace les trois normales Mx, My, Mz aux surfaces qui s'y croisent, forment avec les axes de coordonnées OX, OY, OZ des angles deux à deux égaux

$$\text{angle } \widehat{(Mx, OY)} = \text{angle } \widehat{(My, OX)},$$

$$\widehat{(Mx, OZ)} = \widehat{(Mz, OX)},$$

$$\widehat{(My, OZ)} = \widehat{(Mz, OY)}.$$

Vérifions d'abord ce théorème : il suffit pour cela, toutes les surfaces de ce groupe ayant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, de prendre le système le plus simple, c'est-à-dire celui défini par les formules de la page 28

$$(25). \quad \ldots \ldots \quad x = \frac{\rho}{r}, \quad y = \frac{\rho_1}{r}, \quad z = \frac{\rho_2}{r}, \quad r = \rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2.$$

Si l'on appelle X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 les cosinus directeurs des normales aux surfaces ρ, ρ_1, et ρ_2, on trouve facilement les formules suivantes

$$X = \frac{2\rho^2}{r} - 1 \qquad Y = \frac{2\rho\rho_1}{r} \qquad Z = \frac{2\rho\rho_2}{r},$$

$$X_1 = \frac{2\rho\rho_1}{r} \qquad Y_1 = \frac{2\rho_1^2}{r} - 1 \qquad Z_1 = \frac{2\rho_1\rho_2}{r},$$

$$X_2 = \frac{2\rho\rho_2}{r} \qquad Y_2 = \frac{2\rho_1\rho_2}{r} \qquad Z_2 = \frac{2\rho_2^2}{r} - 1.$$

et la symétrie de ce tableau par rapport à la diagonale qui descend de gauche à droite démontre le théorème.

(*) COMBESCURE, *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. IV.

Digitized by Google

Je me suis demandé s'il existe d'autres systèmes triplement orthogonaux où le tableau des cosinus soit symétrique. On devra avoir

$$(26). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots X_1 = Y, \quad X_2 = Z, \quad Y_2 = Z_1.$$

Différentions ces trois équations successivement par rapport à ρ, ρ_1, et ρ_2 et tenons compte des équations (10); nous obtenons les neuf équations équivalentes à (26)

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{llll} -Y_1\beta_{10} - Y_2\beta_{20} = X\beta_0 & X\beta_{20} = -Z_1\beta_{10} - Z_2\beta_{20} & Y\beta_{20} = Z\beta_{10} & \\ Y_1\beta_{01} = -X\beta_{01} - X_2\beta_{21} & X_1\beta_{21} = Z_1\beta_{01} & Y_1\beta_{21} = -Z\beta_{01} - Z_2\beta_{21} & \\ Y_2\beta_{02} = X_2\beta_{12} & -X\beta_{02} - X_1\beta_{12} = Z_1\beta_{02} & -Y\beta_{02} - Y_1\beta_{12} = Z_2\beta_{12}, & \end{array} \right.$$

qui sont compatibles, et se réduisent à cinq, comme il est facile de s'en assurer, sous la seule condition

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_{01}\beta_{12}\beta_{20} = \beta_{10}\beta_{21}\beta_{02}.$$

A l'aide de cette condition, on peut remplacer trois des équations (11) par les suivantes

$$(29). \quad \ldots\ldots \frac{1}{\beta_{10}}\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_2} = \frac{1}{\beta_{01}}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_2}, \quad \frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1} = \frac{1}{\beta_{02}}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_1}, \quad \frac{1}{\beta_{21}}\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho} = \frac{1}{\beta_{12}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho},$$

qui peuvent être intégrées, et qui me seront utiles plus loin. Je vais d'abord établir d'autres formules analogues.

Exprimons tous les cosinus en fonction d'un seul, Z par exemple, à l'aide des équations (27). On a immédiatement

$$(30) \quad \ldots\ldots X_1 = Y = \frac{\beta_{10}}{\beta_{20}}Z, \quad Z_1 = Y_2 = \frac{\beta_{12}}{\beta_{02}}Z, \quad X_2 = Z.$$

Puis, en prenant dans chaque colonne une équation à trois termes,

$$(31) \quad \ldots\ldots X + Y_1 = -2\gamma Z, \quad X + Z_2 = -2\beta Z, \quad Y_1 + Z_2 = -2\alpha Z.$$

Digitized by Google

Nous avons posé, pour abréger,

$$(32)\quad \ldots\ldots\ldots\quad 2\gamma = \frac{\beta_{21}}{\beta_{01}},\quad 2\beta = \frac{\beta_{12}\beta_{10}}{\beta_{02}\beta_{20}},\quad 2\alpha = \frac{\beta_{01}}{\beta_{24}}.$$

On a alors

$$X + Y_1 + Z_2 = -(\alpha + \beta + \gamma)Z,$$

$$(33)\quad \ldots\quad X = (\alpha - \beta - \gamma)Z,\quad Y_1 = (\beta - \alpha - \gamma)Z,\quad Z_2 = (\gamma - \alpha - \beta)Z.$$

Les formules (10) et (30) donnent deux valeurs de $\frac{\partial y}{\partial \rho_2}$; en les comparant et exprimant tout en fonction de Z, nous aurons de nouvelles relations, qui se simplifieront à l'aide des formules (11).

Servons-nous d'abord des formules (30)

$$\frac{\partial Y}{\partial \rho_2} = \frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial \beta_{10}}{\partial \rho_2}Z - \frac{1}{\beta_{20}^2}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2}\beta_{10}Z + \frac{\beta_{10}}{\beta_{20}}\frac{\partial z}{\partial \rho_2}$$

$$= \left[\beta_{12} - \frac{\beta_{10}}{\beta_{20}^2}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} + \frac{\beta_{10}}{\beta_{20}}\beta_{02}(\gamma - \alpha - \beta)\right]Z,$$

puis des équations (11)

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_2} = \beta_{02}\frac{\beta_{12}}{\beta_{02}}Z = \beta_{12}Z.$$

Il en résulte

$$(34)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} = \beta_{02}(\gamma - \alpha - \beta)$$

Différentions la dernière formule (31) par rapport à ρ_2

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial Z_2}{\partial \rho_2} = \left[-\frac{\beta_{01}}{\beta_{21}}\frac{\partial Z}{\partial \rho_2} - \frac{1}{\beta_{21}}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2}Z + \frac{\beta_{01}}{(\beta_{21})^2}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2}Z\right].$$

La troisième équation de la première colonne des équations (10) donne

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho_2} = Z_2\beta_{02}$$

Digitized by Google

ou, à cause de (33),

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho_2} = \beta_{02}(\gamma - \alpha - \beta)Z.$$

Donc, en remplaçant ci-dessus,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial Z_2}{\partial \rho_2} = \left[-\frac{\beta_{01}}{\beta_{21}}\beta_{02}(\gamma - \alpha - \beta) - \frac{1}{\beta_{21}}\frac{\partial \beta_{01}}{\partial \rho_2} + \frac{\beta_{01}}{\beta_{21}^2}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2}\right] Z.$$

Or les formules (10) donnent directement, en tenant compte toutefois des équations (30),

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \rho_2} = Y_2\beta_{12} = \frac{\beta_{12}}{\beta_{12}}\beta_{12}Z,$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \rho_2} = -Z\beta_{02} - Z_1\beta_{12} = -\left(\beta_{02} + \frac{\beta_{12}^2}{\beta_{02}}\right) Z.$$

Donc

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial Z_2}{\partial \rho_2} = -\beta_{12}Z$$

et la comparaison avec la valeur obtenue plus haut pour la même somme montre, à cause de (11), que

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} = \beta_{02}\beta_{21}(\gamma - \alpha - \beta).$$

Comparons avec l'équation (34)

$$\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2} = \beta_{02}\beta_{20}(\gamma - \alpha - \beta)$$

et nous obtenons l'équation

(35). . . . . $\frac{1}{\beta_{21}}\frac{\partial \beta_{21}}{\partial \rho_2} = \frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial \beta_{20}}{\partial \rho_2}$,

et l'on aurait d'une manière analogue les deux équations qui se déduisent de celle-là par permutations circulaires.

Digitized by Google

Il nous reste un dernier groupe de formules à obtenir. Prenons dans la formule (28) les dérivées des deux membres par rapport à ρ_1

$$(36)\quad \beta_{10}\beta_{12}\frac{\partial\beta_{20}}{\partial\rho_1}+\beta_{01}\beta_{20}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1}+\beta_{12}\beta_{20}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_1}=\beta_{10}\beta_{21}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_1}+\beta_{10}\beta_{02}\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_1}+\beta_{21}\beta_{02}\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1}.$$

Or la formule (35) par permutation circulaire donne

$$\frac{1}{\beta_{10}}\frac{\partial\beta_{10}}{\partial\rho_1}=\frac{1}{\beta_{12}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_1}$$

et la formule (29)

$$\frac{1}{\beta_{20}}\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_1}=\frac{1}{\beta_{02}}\frac{\partial\beta_{02}}{\partial\rho_1}.$$

En tenant compte de ces équations, l'équation (36) se réduit à

$$(37).\quad \frac{1}{\beta_{01}}\frac{\partial\beta_{01}}{\partial\rho_1}=\frac{1}{\beta_{21}}\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_1},$$

et l'on obtiendra de même les deux équations qui se déduisent de (37) par permutations circulaires.

Nous avons ainsi trois groupes de trois formules, dont l'un se déduit des autres à l'aide de (28), savoir :

1° Les formules du type (37)

$$\frac{\partial\log\beta_{ik}}{\partial\rho_k}=\frac{\partial\log\beta_{jk}}{\partial\rho_k}$$

ou

$$(37^{bis}).\quad \beta_{ik}=\beta_{jk}f_{ij}(\rho_i,\rho_j);$$

2° Les formules du type (35)

$$\frac{\partial\log\beta_{ik}}{\partial\rho_i}=\frac{\partial\log\beta_{ij}}{\partial\rho_i},$$

$$(35^{bis}).\quad \beta_{ik}=\beta_{ij}F_{jk}(\rho_j,\rho_k);$$

Digitized by Google

3° Les formules (29)

$$\frac{\partial \log \beta_{ij}}{\partial \rho_k} = \frac{\partial \log \beta_{ji}}{\partial \rho_k},$$

$$(29^{bis}) \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} \varphi_{ij}(\rho_i, \rho_j).$$

Réunissons les formules

$$(37^{bis}) \quad \frac{\beta_{ik}}{\beta_{jk}} = f_{ij}(\rho_i, \rho_j),$$

$$(35^{bis}) \quad \begin{cases} \dfrac{\beta_{ik}}{\beta_{ij}} = \mathrm{F}_{jk}(\rho_j, \rho_k), \\ \dfrac{\beta_{ji}}{\beta_{jk}} = \mathrm{F}_{ik}(\rho_i, \rho_k), \end{cases}$$

$$(29^{bis}) \quad \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} = \varphi_{ij}(\rho_i, \rho_j).$$

Le produit des trois dernières formules, comparé à celle qui précède, donne l'équation fonctionnelle

$$\varphi_{ij}(\rho_i, \rho_j)\, \mathrm{F}_{jk}(\rho_j, \rho_k)\, \mathrm{F}_{ik}(\rho_i, \rho_k) = f_{ij}(\rho_i, \rho_j).$$

Donc le produit $\mathrm{F}_{ik}(\rho_i, \rho_k) \times \mathrm{F}_{jk}(\rho_j, \rho_k)$ doit être indépendant de ρ_k, ce qui exige que ρ_k figure isolément dans F_{ik} et dans F_{jk} et de la manière suivante

$$\mathrm{F}_{ik} = \frac{f_i(\rho_i)}{f_k(\rho_k)}, \quad \mathrm{F}_{jk} = \frac{f_k(\rho_k)}{f_j(\rho_j)}.$$

Donc

$$\frac{\beta_{ik}}{f_k(\rho_k)} = \frac{\beta_{ij}}{f_j(\rho_j)} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_{ji}}{f_i(\rho_i)} = \frac{\beta_{jk}}{f_k(\rho_k)}.$$

On doit, pour satisfaire à ces équations, poser

$$(38) \quad \begin{cases} \beta_{ik} = \lambda f_k(\rho_k), & \beta_{ji} = \mu f_i(\rho_i), \\ \beta_{ij} = \lambda f_j(\rho_j), & \beta_{jk} = \mu f_k(\rho_k). \end{cases}$$

Digitized by Google

Or, si l'on suppose connu un système orthogonal, rien n'empêche de prendre comme paramètres, au lieu de ρ, ρ_1, ρ_2 des fonctions $\varphi(\rho)$, $\varphi_1(\rho_1)$, $\varphi_2(\rho_2)$ de ces paramètres; cette substitution a pour effet de remplacer β_{ik} par $\frac{\varphi'_i(\rho_i)}{\varphi'_k(\rho_k)}\beta_{ik}$. Si donc on prend $\varphi'_k(\rho_k) f_k(\rho_k) = 1$ et $\varphi'_j(\rho_j) f_j(\rho_j) = 1$, il en résultera

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta_{ik} = \beta_{ij}, \\ \text{et de même} \\ \beta_{jk} = \beta_{ji}, \qquad \beta_{kj} = \beta_{ki}. \end{array}\right.$$

J'ai le droit maintenant d'écrire simplement β_i au lieu de β_{ij} ou de β_{ik}, et les équations (12) deviennent

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\beta_1}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\beta}{\partial\rho} + \beta_2^2 = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_2}{\partial\rho_2} + \dfrac{\partial\beta}{\partial\rho} + \beta_1^2 = 0, \\ \dfrac{\partial\beta_1}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\beta_2}{\partial\rho_2} + \beta^2 = 0. \end{array}\right.$$

De même les équations (11) s'écrivent

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\beta}{\partial\rho_2} = \beta\,\beta_2, \quad \dfrac{\partial\beta_1}{\partial\rho} = \beta_1\beta, \quad \dfrac{\partial\beta_2}{\partial\rho_1} = \beta_2\beta_1, \\ \dfrac{\partial\beta_1}{\partial\rho_2} = \beta_2\beta_1, \quad \dfrac{\partial\beta_2}{\partial\rho} = \beta\,\beta_2, \quad \dfrac{\partial\beta}{\partial\rho_1} = \beta_1\beta. \end{array}\right.$$

D'où résulte

$$\frac{\partial\beta}{\partial\rho_2} = \frac{\partial\beta_2}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\rho_1} = \frac{\partial\beta_1}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial\beta_1}{\partial\rho_2} = \frac{\partial\beta_2}{\partial\rho_1}.$$

Ces égalités expriment que β, β_1, β_2 sont les trois dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction de ρ, ρ_1, ρ_2 que j'appellerai $\log H'$; en

Digitized by Google

introduisant cette fonction H′, les équations (41) se réduisent à trois

$$\frac{1}{H'}\frac{\partial^2 H'}{\partial\rho\partial\rho_2}-\frac{2}{H'^2}\frac{\partial H'}{\partial\rho}\frac{\partial H'}{\partial\rho_2}=0,$$

$$\frac{1}{H'}\frac{\partial^2 H'}{\partial\rho\partial\rho_1}-\frac{2}{H'^2}\frac{\partial H'}{\partial\rho}\frac{\partial H'}{\partial\rho_1}=0,$$

$$\frac{1}{H'}\frac{\partial^2 H'}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-\frac{2}{H'^2}\frac{\partial H'}{\partial\rho_1}\frac{\partial H'}{\partial\rho_2}=0,$$

ou

$$\frac{\partial^2\frac{1}{H'}}{\partial\rho\partial\rho_2}=0,\quad \frac{\partial^2\frac{1}{H'}}{\partial\rho\partial\rho_1}=0,\quad \frac{\partial^2\frac{1}{H'}}{\partial\rho_1\partial\rho_2}=0,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{H'}=R+R_1+R_2,$$

R étant une fonction arbitraire de ρ, R_1 de ρ_1, R_2 de ρ_2,

$$\beta=\frac{1}{H'}\frac{\partial H'}{\partial\rho}=-\frac{R'}{R+R_1+R_2},$$

$$\beta_1=-\frac{R'_1}{R+R_1+R_2},$$

$$\beta_2=-\frac{R'_2}{R+R_1+R_2}.$$

R', R'_1, R'_2 sont les dérivées de R, R_1, R_2. J'appellerai de même R'', R''_1, R''_2 les dérivées secondes.

Portons ces valeurs dans les équations (40). La première devient

$$\frac{R'^2+R_1'^2+R_2'^2}{R+R_1+R_2}=R''+R''_1, \tag{42}$$

et de même les autres : on aura donc

$$R''+R''_1=R''_1+R''_2=R''_2+R'',$$

Digitized by Google

d'où l'on tire, en désignant par a une constante,

$$R'' = R_1'' = R_2'' = a,$$

$$(43). \quad \begin{cases} R = \frac{1}{2} a\rho^2 + b\rho + c, \\ R_1 = \frac{1}{2} a\rho_1^2 + b_1\rho_1 + c_1, \\ R_2 = \frac{1}{2} a\rho_2^2 + b_2\rho_2 + c_2. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans l'équation (42), on obtient la condition

$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2a(c + c_1 + c_2) = 0.$$

A partir d'ici, nous aurions à reproduire textuellement une analyse qui se trouve dans le Mémoire de M. Darboux (1878), à condition cependant de faire la remarque suivante. Nous avons déterminé les β_{ij}; mais nous ne connaissons pas les H_i. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que nous connaissons une solution particulière, celle que l'on obtient en posant

$$H = H_1 = H_2 = H'.$$

Seulement, la méthode exposée pages 27 et 34 permet d'obtenir toutes les autres solutions; les surfaces ainsi introduites ont, comme on le sait, même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que celles déduites de la solution particulière. Or cette solution particulière, étudiée par M. Darboux (*), est précisément celle que je viens de rencontrer : donc, en renvoyant au mémoire précité pour la fin de l'analyse, je peux énoncer le théorème suivant : *Si, en tous les points de l'espace, le déterminant des neuf cosinus directeurs des trois normales d'un système orthogonal est symétrique par rapport à la diagonale principale, le système orthogonal est formé ou de plans parallèles aux plans coordonnés ou de sphères tangentes aux trois plans coordonnées (transformé du précédent par rayons vecteurs réciproques) ou enfin des surfaces qui ont la même représentation sphérique que les précédentes.*

(*) *Loc. cit.*, pp. 282-284.

Digitized by Google

Remarques. — On peut remarquer que nous nous sommes servi, non des équations (26), mais des équations dérivées; on pourrait donc craindre que les systèmes indiqués ci-dessus ne fussent plus généraux que ceux que je me proposais de chercher. Une vérification élémentaire montre qu'on a bien, comme je me l'étais proposé,

$$X_1 = Y, \qquad X_2 = Z, \qquad Y_2 = Z_1.$$

CHAPITRE QUATRIÈME.

SYSTÈMES CYCLIQUES DE RIBAUCOUR ET SYSTÈMES A TRAJECTOIRES PLANES.

Dans une note célèbre (*), Ribaucour a signalé l'importance des systèmes orthogonaux comprenant des cercles comme trajectoires d'une des familles du système, systèmes qu'il a proposé d'appeler *systèmes cycliques*. Ce n'est qu'en 1891 (**) qu'a paru le mémoire récompensé du prix Dalmont, en 1876, et où l'auteur fait connaître ses démonstrations. La méthode est celle déjà suivie dans le Mémoire sur les élassoïdes, récompensé par l'Académie royale de Belgique, et que Ribaucour appelait la périmorphie. C'est donc le mémoire de 1891 que nous résumerons, sauf à indiquer à mesure les notes où l'auteur avait antérieurement fait connaître les principaux résultats.

La périmorphie est, au fond, la méthode de Gauss étendue en ce sens qu'à la géométrie sur la surface vient s'ajouter la géométrie autour de la surface. Naturellement, ce sont les formules de Codazzi qui dominent le problème. Au trièdre formé par la normale et les tangentes aux courbes (u), (v) de la surface, on rattache un point qui peut d'ailleurs se déplacer par rapport à ce trièdre suivant une loi quelconque. C'est en calculant les tangentes aux lieux de points, les plans tangents le long de droites ou courbes décrivant des surfaces élémentaires que Ribaucour a découvert les théorèmes dont nous allons parler et d'autres qui ne se rapportent pas à notre sujet.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXX, p. 330, 1870.
(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VII.

Digitized by Google

Considérons les deux nappes (O) et (R) d'une enveloppe de sphères à deux paramètres dont (S) sera le lieu des centres. Supposons que les lignes de courbure se correspondent sur (O) et sur (R), et soient M, N les points où le plan tangent à (S) en S rencontre les tangentes OX, OY aux lignes de courbure de (O) en O, prises pour axes de coordonnées mobiles. Le plan tangent à (R) contient aussi MN, d'où il résulte que le lieu des points de contact R de ces plans tangents est le cercle normal en O à (O) dont le centre est sur MN. Toutes les surfaces (R) normales à ce cercle font partie d'un système triple orthogonal qui est un système cyclique (*).

Ribaucour montre ensuite qu'étant donnée une famille arbitraire de cercles normaux à une surface (O), il existe toujours une seconde surface (R) normale aux faisceaux de cercles, mais seulement dans une étendue infiniment petite. Le lieu des points des cercles par lesquels on peut mener cet élément normal n'est pas, en général, une trajectoire orthogonale de ces cercles. Mais *si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à toute une famille de surfaces qui font partie d'un système orthogonal.* Nous ajouterons avec M. Darboux (**), que *si des cercles sont normaux à deux surfaces et si chacun d'eux est rencontré en deux points par un des cercles infiniment voisins, tous ces cercles sont normaux à une famille de surfaces.* Il y a identité entre la recherche des systèmes cycliques et celle des enveloppes de sphères sur les deux nappes desquelles les lignes de courbure se correspondent.

L'importance des systèmes cycliques ressortira de ce qui suivra; on peut cependant dès à présent observer que si tous les cercles passent par un même point, en transformant ce système par rayons vecteurs réciproques, par rapport à ce point pris comme pôle, on obtient le système composé d'une famille de surfaces parallèles et de deux familles de normalies développables. Les systèmes cycliques constituent donc une belle généralisation du système précédent et comprenant d'ailleurs comme lui, mais d'une infinité de manières, une surface (O) quelconque; par exemple, on pourra en tous les points de (O) construire un cercle normal à (O) et normal soit à une

(*) *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jordan*, 1891, pp. 228 et suivantes. Voir aussi la note des *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1870.

(**) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, p. 333.

Digitized by Google

sphère donnée, soit à un plan donné. Les cercles ainsi construits étant normaux en deux points à la sphère ou au plan, seront normaux à trois surfaces et constitueront, d'après un théorème précédent, un système cyclique.

Ribaucour a donné (*) (p. 261) l'équation aux dérivées partielles du second ordre d'où l'on peut déduire tous les systèmes cycliques : cette équation s'intègre facilement dans le cas où les plans des cercles enveloppent une surface développable. On obtient alors la génération suivante (p. 264) : *Pour obtenir le système cyclique le plus général, admettant comme enveloppe une surface développable, il faut tracer dans un plan une enveloppe de cercles arbitraires, mener toutes les cordes de contact, puis enrouler le plan comme on veut et faire correspondre à chaque point d'une corde de contact le cercle qui lui a donné naissance.*

M. Darboux (**) faisant un ingénieux rapprochement entre la théorie des systèmes cycliques et des formules données par lui pour la déformation des surfaces, a ramené l'un des problèmes à l'autre et donné (***) pour les systèmes cycliques quelconques le beau théorème suivant : *Pour trouver le système cyclique le plus général formé de cercles situés dans les plans tangents d'une surface* (Σ), *on prendra une quelconque* (Σ') *des surfaces applicables sur* (Σ) *et l'on construira tous les cercles* (C') *qui sont à l'intersection des plans tangents de* (Σ') *et d'une sphère fixe de rayon nul. Si la surface* (Σ') *se déforme en entraînant les cercles* (C'), *de manière à venir coïncider avec la surface* (Σ), *la congruence des cercles* (C') *se transforme dans le système cyclique cherché.*

(*) Ribaucour, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 25 juin 1872, donne l'équation

$$\left(\frac{s_1}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\lambda^2}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\lambda^2}\right)-\left[\left(\frac{p}{\lambda^2}\right)^2+\left(\frac{q}{\lambda^2}\right)^2-\frac{2z}{\lambda^2}\right]\frac{\partial^2\log\lambda}{dx\,dy}=0.$$

Dans cette équation, on suppose connu un réseau isométrique sur la surface (A) des centres dont l'élément linéaire prendra la forme $ds^2=\lambda^2 dx\,dy$, z est le carré du rayon d'une sphère dont le centre est au point x, y, z ; p, q, r, s, t sont les dérivées de z. Si (A) est développable, on peut prendre $\lambda=1$, et l'équation se ramène facilement à $s^2-rt=0$.

(**) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, troisième partie, p. 354.

(***) Voir aussi le mode de génération que nous avons donné p. 11, chapitre premier.

Digitized by Google

Le fait que les cercles d'un système cyclique peuvent être considérés comme situés à chaque instant sur deux sphères qui ont respectivement leurs centres sur les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface normale au cercle, permet d'obtenir très facilement ces cercles. Le résultat est intéressant, et je vais donner à ce sujet de brèves indications, qui d'ailleurs me seront utiles plus loin.

Soit ds l'élément linéaire de la surface $\rho_2 = c^{te}$

$$(1) \qquad ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2.$$

On sait (*) que les trois coordonnées x, y, z d'un point de la surface vérifient l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho_1}$$

et, puisque les courbes $\rho = c^{te}$, $\rho_1 = c^{te}$ sont lignes de courbure, il en est de même de la quantité $x^2 + y^2 + z^2$. Cela posé, soient les deux sphères définies plus haut

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 + \frac{2}{\lambda}\left[(X - x\frac{\partial x}{\partial\rho} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial\rho} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial\rho}\right] = 0,$$

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 + \frac{2}{\lambda_1}\left[(X - x\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + (Y - y)\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + (Z - z)\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\right] = 0.$$

qui se coupent suivant un cercle; si ce cercle répond à la question, en se déplaçant le long d'une ligne de courbure, il devra avoir une enveloppe qui sera nécessairement une enveloppe de sphères et il suffira d'écrire : 1° que la première sphère dont j'ai écrit l'équation ci-dessus touche son enveloppe, lorsque ρ_1 varie seul, suivant un cercle situé sur la seconde sphère; 2° la même chose en échangeant ρ et ρ_1. Le calcul est facile, et si l'on pose

$$\lambda = \frac{d\log\theta}{d\rho}, \qquad \lambda_1 = \frac{d\log\theta}{d\rho_1},$$

on trouve comme condition unique que θ *doit être solution de l'équation* (2).

(*) LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, cinquième leçon, p. 28.

Digitized by Google

Donc étant donné l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes de courbure sous la forme (1), le système cyclique le plus général comprenant cette surface s'obtiendra en prenant l'intersection des deux sphères

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho}\,S(X-x)^2 + 2\theta\,S(X-x)\dfrac{\partial x}{\partial\rho} = 0, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\,S(X-x)^2 + 2\theta\,S(X-x)\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1} = 0, \end{cases}$$

θ étant l'intégrale générale de l'équation (2). Par exemple le système cyclique, dont nous avons déjà parlé, comprenant la surface et une sphère, s'obtiendra à l'aide de la solution évidente

$$(4)\quad \theta = a(x^2+y^2+z^2) + 2bx + 2cy + 2dz + h,$$

a, b, c, d, h étant des constantes.

Cherchons encore les systèmes cycliques pour lesquels les plans des cercles passent par un point fixe, l'origine. Les équations (3) donnent

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}(x^2+y^2+z^2) - 2\theta\left(x\frac{\partial x}{\partial\rho} + y\frac{\partial y}{\partial\rho} + z\frac{\partial z}{\partial\rho}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}(x^2+y^2+z^2) - 2\theta\left(x\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + y\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + z\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\right) = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$d\log\theta - d\log(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

ou

$$\theta = k(x^2+y^2+z^2).$$

C'est un cas particulier de l'intégrale (4). Donc : *Lorsqu'un système cyclique est tel que les plans de tous ses cercles passent par un point fixe, chacun des cercles est orthogonal à une sphère fixe ayant ce point fixe pour centre.* Ce théorème est dû à Ribaucour (*).

(*) *Loc. cit.*, p. 268.

Digitized by Google

L'importance des systèmes cycliques ressort du théorème suivant (*). *Étant donné un système triplement orthogonal de surfaces, si l'on considère les cercles osculateurs des trajectoires d'une famille, tout le long d'une surface normale à ces courbes, tous ces cercles donnent naissance à un système cyclique, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes normaux à une infinité de surfaces.*

Soit en effet l'élément linéaire du système orthogonal

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2;$$

les H_i vérifient les équations de Lamé (chapitre III, p. 25, équat. 13), et la troisième de ces équations exprime que H_2 est solution de l'équation (2) du présent chapitre. Or, si l'on écrit les équations des cercles correspondant à cette solution, on trouve précisément que ce sont les cercles osculateurs aux trajectoires (ρ_2), orthogonales aux surfaces $\rho_2 = c^{te}$.

[*] La réciproque de ce théorème est vraie (**); en voici la démonstration.

Soit une famille de surfaces

$$\varphi(x, y, z) = \rho_2.$$

Leurs trajectoires orthogonales auront pour équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = dt.$$

Considérons dt comme l'infiniment petit principal, nous aurons

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt, \quad d^2x = \frac{1}{2} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} dt^2,$$

et deux couples de formules analogues en y et z, en posant

$$h_2^2 = S\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2.$$

N. B. — *La partie entre astérisques a été ajoutée pendant l'impression*, pp. 52 à 54.

(*) Ribaucour, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1870, et juin 1872.

(**) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 166; voir aussi en note, p. 165, une démonstration géométrique du théorème direct.

Digitized by Google

Adjoignons maintenant à la famille de surfaces considérée les deux familles de surfaces formées par leurs lignes de courbure

$$\rho = f(x, y, z), \qquad \rho_1 = f_1(x, y, z).$$

Sur la surface $\rho_2 = c^{te}$, on aura pour l'élément linéaire

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2,$$

et l'équation (2) que je transcris ici

$$(2). \quad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\rho_1} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho_1},$$

admettra les solutions x, y, z, et $x^2 + y^2 + z^2$, les trois premières parce que les courbes (ρ) et (ρ_1) tracent sur la surface (ρ_2) un réseau conjugué, la quatrième, parce que ce réseau conjugué est orthogonal. Or, on a vu plus haut que les équations (3) représenteront un système cyclique si θ est une solution quelconque de l'équation (2) et la seule chose à exprimer ici est que le cercle dont les équations sont précisément les équations (3) est osculateur à nos trajectoires orthogonales. Il suffira pour cela d'écrire que ce cercle contient trois points infiniment voisins : il passe déjà par le point x, y, z, et, comme il est tangent à la trajectoire par le point $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Nous n'aurons donc qu'à écrire deux conditions dont voici l'une

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho} S dx^2 + 2\theta S \frac{1}{2} d^2x \frac{\partial x}{\partial\rho} = 0,$$

ou

$$h_2 \frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \theta \frac{\partial h_2}{\partial\rho} = 0.$$

Donc $h_2\theta$ est indépendant de ρ; de même pour ρ_1. On pourra poser $h_2\theta = 1$; et le système cyclique sera déterminé en remplaçant dans les équations (3) θ par $\frac{1}{h_2}$ que l'on peut aussi, d'après une notation déjà employée, désigner par H_2. Seulement il faudra que H_2 soit solution de l'équation (2) et c'est précisément, comme je vais le montrer, cette condition qui exprime que la

Digitized by Google

famille de surfaces donnée $\rho_2 = \varphi(x, y, z)$ fait partie d'un système orthogonal.

Reportons-nous, en effet, à l'équation (3) du premier chapitre (page 7); chacune des lignes de son premier membre contient les dérivées secondes d'une des six fonctions suivantes H, u, $x^2 + y^2 + z^2$, ux, uy, uz ou une combinaison linéaire de ces quantités : c'est donc un invariant, et l'on obtient le même résultat en l'égalant à zéro ou en exprimant que les dix fonctions (des trois variables quelconques α, β et γ) H, u, $x^2 + y^2 + z^2$, ux, uy, uz, 1, x, y, z satisfont à une même équation aux dérivées partielles du second ordre

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + A'\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} + A''\frac{\partial^2 V}{\partial\gamma^2} + 2B\frac{\partial^2 V}{\partial\beta\partial\gamma} + 2B'\frac{\partial^2 V}{\partial\gamma\partial\alpha} + 2B''\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta} + 2C\frac{\partial V}{\partial\alpha} + 2C'\frac{\partial V}{\partial\beta} + 2C''\frac{\partial V}{\partial\gamma} + FV = 0.$$

Or, ici nous avons à exprimer que l'équation (2) de ce chapitre dont nous connaissons les solutions 1, x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2$, ρ_2, $\rho_2 x$, $\rho_2 y$, $\rho_2 z$ admet encore la solution H_2; nous pouvons donc affirmer que ρ_2 est le paramètre d'une famille appartenant à un système orthogonal. La réciproque que nous avions en vue est ainsi établie et nous pouvons énoncer le théorème suivant : *Etant donnée une famille de surfaces, si les cercles osculateurs aux courbes trajectoires orthogonales de ces surfaces, aux points où elles rencontrent une surface quelconque de la famille, forment toujours un système cyclique, la famille considérée est une des familles d'un système orthogonal.* [*]

Nous verrons bientôt le parti que M. Darboux a su tirer de cet intéressant théorème; mais je ne veux pas quitter les systèmes cycliques sans faire connaître le système dans lequel tous les cercles sont égaux entre eux. Dans ce système les plans des cercles enveloppent une surface à courbure totale constante négative qui est aussi le lieu des centres de ces cercles, et toutes les surfaces orthogonales aux cercles ont aussi leur courbure constante et sont applicables sur la première. Le rayon des cercles est la racine carrée de la courbure changée de signe.

Toutes ces belles propriétés ont été trouvées par Ribaucour, comme conséquences de ses recherches sur les congruences de courbes planes qui sont normales à une famille de surfaces. C'est par le résumé de ces recherches que je terminerai ce chapitre.

Digitized by Google

Le théorème fondamental est le suivant : *Si des courbes* (C) *tracées dans les plans tangents d'une surface* (O) *sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces, on peut déformer* (O) *comme on veut, chaque plan tangent entraînant la courbe qu'il contient, et le faisceau des courbes* (C) *jouit toujours de la même propriété.*

Pour le démontrer, il suffit de se donner l'équation de la courbe rapportée aux deux tangentes du réseau (u, v) situées dans son plan :

$$y = f(x, u, v),$$

et d'exprimer qu'on peut toujours déterminer x en fonction de u et de v, de manière que la condition d'orthogonalité soit identiquement vérifiée, quels que soient u et v. Cette condition d'orthogonalité signifie que, pour tous les déplacements infiniment petits du plan tangent, le point x, y se déplace normalement à la courbe et que tous ces déplacements normaux constituent un élément de surface : elle s'écrit

$$A dx + B du + C dv = 0,$$

et le théorème résulte de ce que A, B et C ne dépendent que de l'élément linéaire de la surface (O).

Parmi les congruences de courbes planes qui admettent une infinité de surfaces normales, il importe de remarquer celles composées de courbes toutes identiques entre elles. Ribaucour a démontré que, dans ce cas, la surface enveloppe des plans des courbes a sa courbure constante : les courbes ont pour équation

$$pR = kx,$$

R est le rayon de courbure, p la distance de l'origine à la tangente, x l'abscisse du point de contact, k une constante. Cette équation est bien connue de tous les correspondants de Ribaucour qui avait essayé en vain de l'intégrer et qui la proposait à tout le monde; c'est même cette recherche qui a retardé de 1876 à 1891 la publication de son mémoire. Nous proposons à notre tour cette équation, avec l'espoir qu'un lecteur de notre

Digitized by Google

mémoire en réussira l'intégration. Une solution évidente s'obtient en prenant

$$R = k, \quad p = x;$$

on obtient alors le dernier système cyclique que nous avons défini (p. 54).

Revenons aux systèmes orthogonaux à trajectoires planes quelconques. Leur détermination géométrique résulte du théorème suivant, dû à M. Darboux (*). *Pour avoir tous les systèmes orthogonaux à trajectoires planes, on coupe une développable isotrope quelconque par les plans tangents d'une surface* (Σ) *arbitraire; puis on déforme* (Σ) *d'une manière quelconque, les plans tangents entraînant les courbes* (C) *qui y sont contenues. Ces courbes sont normales à la famille orthogonale la plus générale admettant des trajectoires planes.* Ce théorème établit un nouveau lien entre la théorie des systèmes orthogonaux et le problème de la déformation des surfaces. En voici la démonstration : Dans leur position initiale, les courbes (C) qui passent en un point M de la développable isotrope y sont orthogonales à la génératrice rectiligne Φ qui pour ces développables est aussi la normale à la surface. Cette propriété, d'après le théorème fondamental rappelé ci-dessus (p. 55), subsiste dans la déformation. Or le point M est entraîné dans une infinité de plans tangents de (Σ) et il lui correspond, pour toute autre forme (Σ') de Σ, une courbe Γ, à la génératrice rectiligne de la développable isotrope correspond donc une surface Φ, lieu de Γ et les courbes (C) dans leurs nouvelles positions sont normales à cette surface Φ. Comme il y a une infinité de génératrices rectilignes sur la développable, les courbes (C) sont normales à une famille de surfaces. Or, considérons en tous les points de cette surface les cercles osculateurs des courbes (C); avant la déformation, ils étaient encore osculateurs aux courbes (C) tout le long de la génératrice Φ, ils étaient donc sur le cône isotrope tangent à la développable isotrope le long de Φ et dont le sommet est sur l'arête de rebroussement de cette développable. Ils formaient donc un système cyclique et cette propriété subsiste après la déformation; donc d'après le théorème rappelé plus haut (p. 52), la famille de surfaces à laquelle sont normales les

(*) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, troisième partie, pp. 354 et 355.

Digitized by Google

courbes (C) fait partie d'un système triple orthogonal complété par des familles de courbes (C) convenablement groupées (C. Q. F. D.). Réciproquement, si des courbes (C) sont les trajectoires d'une famille orthogonale de surfaces (Φ), elles pourront être obtenues par le procédé qui vient d'être décrit. En effet, le long d'une surface Φ menons tous les cercles osculateurs aux trajectoires (C); ces cercles feront partie d'un système cyclique, ils viendront donc (*), à un certain moment de la déformation de la surface (S), enveloppe de leurs plans, sur un cône isotrope (sphère de rayon nul) (**). Le lieu des sommets de ces cônes sera l'arête de rebroussement de la développable isotrope dont la section par tous les plans tangents d'une surface (S') applicable sur (S) constituera l'ensemble des courbes (C) susceptibles de reproduire les courbes données par déformation de (S').

COROLLAIRE : (théorème de l'abbé Aoust). *Si une des lignes de courbure planes est un cercle, toutes le sont,* car la développable isotrope du théorème précédent est alors une sphère de rayon nul.

AUTRE COROLLAIRE : Si une des lignes de courbure planes est algébrique, toutes le sont.

(*) Voir plus haut, page 49.

(**) La démonstration donnée dans le texte est un peu écourtée. Voici comment il faut la compléter : répétons d'abord la remarque qu'une développable isotrope circonscrite à une des courbes planes (C) est osculatrice à tous les cônes isotropes passant par les cercles (Γ) osculateurs aux courbes (C) et que son arête de rebroussement contient par conséquent les sommets de tous ces cônes. D'autre part, tous les cercles normaux à une même surface (Φ) constituent un système cyclique et peuvent être groupés en deux enveloppes de sphères tangentes en chaque point aux surfaces (Φ_1) et (Φ_2) qui complètent avec (Φ) le système triple. L'angle sous lequel ces périsphères coupent le plan d'une courbe (C) est le même que celui sous lequel ce plan est coupé par les surfaces (Φ_1) et (Φ_2) ; il est donc le même, d'après un théorème connu, tout le long de la courbe (C). Cela posé, considérons le moment de la déformation de (S) où les cercles du système cyclique situés dans ses plans tangents sont venus sur une sphère de rayon nul : tous les périsphères du système cyclique sont à ce moment confondus avec la sphère de rayon nul qui coupe la position actuelle P' du plan de (C) suivant l'angle dont la tangente est i. Mais, *pour tous les systèmes cycliques*, les périsphères coupent le plan P' sous le même angle; donc tous ces périsphères se confondent, *au même moment*, avec des sphères de rayon nul ou cônes isotropes (un par système cyclique). A ce moment, toutes les développables isotropes circonscrites aux courbes (C) ont la même arête de rebroussement et sont donc confondues. Donc, etc. (*Cette note a été ajoutée pendant l'impression.*)

Digitized by Google

CHAPITRE CINQUIÈME.

Je réunis dans ce paragraphe quelques recherches que j'avais entreprises dans le but de déterminer tous les systèmes orthogonaux dont une famille de trajectoires est sphérique et que des raisons de santé, des occupations impérieuses ont malheureusement interrompues.

La détermination de toutes les surfaces (*) à lignes de courbure sphériques dans un système a été effectuée complètement par M. Dobriner, dans un important mémoire inséré dans le *Journal de Crelle* pour l'année 1883. D'autre part, M. Darboux (**) a énoncé le théorème suivant : « Les six coordonnées de la sphère qui enveloppe une surface à lignes de courbure sphériques dans un seul système satisfont à une équation linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre dont un des invariants est égal à zéro. » Comme on sait intégrer une pareille équation, on sait trouver toutes les surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système. Les formules que je vais faire connaître sont celles de M. Dobriner.

Les sphères qui contiennent les lignes de courbure de la surface (S), sphères osculatrices, coupent cette surface, comme on sait, chacune sous un angle constant σ. Soit R le rayon d'une sphère, X_1^0, X_2^0, X_3^0 les coordonnées de son centre. M. Dobriner a prouvé qu'on peut se donner arbitrairement le lieu du centre, la fonction R de l'arc v de ce lieu ainsi que l'angle σ fonction aussi de la seule variable v : on en déduira toujours des surfaces répondant à la question. Si l'on groupe ensemble toutes les surfaces qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, on saura d'une des surfaces du groupe déduire toutes les autres de la manière suivante. Soit

x_1, x_2, x_3 les cosinus directeurs de la tangente à la courbe sphérique (u) sur laquelle v demeure constante.

y_1,, y_2, y_3 les cosinus directeurs de la tangente à la seconde ligne de courbure (v).

z_1, z_2, z_3 les cosinus de la normale.

X_1, X_2, X_3 les coordonnées d'un point de la surface (S).

(*) Je les désignerai plus brièvement dans ce paragraphe par le nom de surfaces (S).

(**) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, p. 344.

Digitized by Google

Les cosinus seront les mêmes pour toutes les surfaces d'un même groupe; quant aux autres quantités relatives à une seconde surface (S′) de ce groupe; nous les désignerons par les mêmes lettres que pour (S), mais en les affectant d'un accent.

Cela posé, on voit facilement que

$$X_i = X_i^0 + R(z_i \cos\sigma - y_i \sin\sigma) \quad (i = 1, 2, 3)$$

où y_i, z_i, sont des fonctions de u et de v déterminées par des équations aux dérivées partielles du second ordre. De même

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad X_i' = X_i'^0 + R'(Z_i \cos\sigma' - y_i \sin\sigma'),$$

et l'on passe de la surface (S) à la surface (S′) à l'aide des formules relatives seulement aux sphères osculatrices

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} X_i'^0 = \int \lambda dX_i^0, \\ R' \cos\sigma' = \int \lambda d(R\cos\sigma), \\ R' \sin\sigma' = \lambda R \sin\sigma, \end{cases}$$

λ étant une fonction de v, arbitraire.

Maintenant dans chaque groupe il y a une surface pour laquelle les sphères osculatrices passent par un même point (*). D'où une génération tout indiquée pour les surfaces (S). On transformera par rayons vecteurs réciproques toutes les surfaces à lignes de courbure planes dans un système qui sont connues, comme on sait (**), ce qui donnera les surfaces (S) pour lesquelles les sphères osculatrices passent par un point. Les formules (1) et (2) permettront d'en déduire toutes les surfaces (S′) les plus générales.

(*) Dans le tome IV de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*, 1895, M. G. Darboux donne une nouvelle démonstration du même théorème.

(**) Voici par exemple le mode de génération que M. Darboux a déduit d'une analyse de M. Rouquet : Coupons une développable isotrophe (I) quelconque par les plans tangents d'une développable également quelconque (Δ); puis déformons (Δ) en entraînant les sections planes de (I) avec les plans tangents qui les contiennent. Nous aurons la surface la plus générale à lignes de courbure planes dans un système.

Digitized by Google

Je m'étais demandé s'il n'était pas possible de faire correspondre à deux surfaces (S′) orthogonales deux surfaces (S) également orthogonales, ce qui aurait donné la solution du problème posé en tête de ce paragraphe. Il est facile de voir que la réponse doit être négative. Soient en effet deux surfaces (S′) et (S_1') se coupant suivant une ligne de courbure sphérique et faisant par suite avec la sphère osculatrice des angles σ' et $\sigma_1' = \frac{\pi}{2} - \sigma'$. Les surfaces (S), à sphères osculatrices passant en un point seront données par les formules (2)

$$R' \sin\sigma' = \lambda R \sin\sigma$$

$$R' \sin\sigma_1' = \lambda_1 R_1 \sin\sigma_1.$$

Si les deux surfaces (S) doivent aussi se couper suivant une ligne sphérique, il faudra que $R = R_1$, d'où l'on déduit

$$\frac{\sin\sigma'}{\sin\sigma_1'} = \operatorname{tang}\sigma' = \frac{\lambda}{\lambda_1}\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma_1}.$$

Pour avoir

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{2} - \sigma$$

il faudrait avoir

$$\lambda \operatorname{tang}\sigma = \lambda_1 \operatorname{tang}\sigma',$$

ce qui n'a évidemment pas lieu en général, les fonctions λ et λ_1 étant des fonctions de paramètres différents déterminées indépendamment l'une de l'autre.

Il est à remarquer qu'à une surface (S′) correspondent une infinité de surfaces (S) ayant même image sphérique et pour lesquelles les sphères osculatrices passent par un même point O. Car dès que l'une des surfaces (S) a été trouvée, on peut en trouver une famille en prenant toutes les homothétiques de la première par rapport au point O.

Enfin M. Dobriner a encore remarqué qu'étant données deux surfaces (S) d'une même famille, déduites l'une de l'autre par l'intermédiaire d'une fonction λ comme il a été expliqué plus haut, il y a entre les rayons de

Digitized by Google

courbure et de torsion ρ, ρ', r et r' de deux lignes de courbure sphériques correspondantes les relations

$$\rho = \rho'\lambda,$$

$$r = r'\lambda.$$

Ce théorème a été complété de la manière la plus heureuse par M. Blutel (*). Voici l'énoncé de M. Blutel, toujours relatif aux surfaces (S) qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure et qui ont leurs lignes de courbure sphériques dans un système ; la démonstration géométrique est aisée : « *Si nous supposons connue l'une de ces surfaces* (S_1), *toutes les surfaces correspondantes* (S) *peuvent s'en déduire au moyen de la propriété suivante : Les développables normales à* (S) *et* (S_1) *le long de leurs lignes de courbure sphériques correspondantes* (C) *et* (C_1) *sont homothétiques* (**). *Si l'on appelle* O *et* O_1 *les centres des sphères qui renferment* (C) *et* (C_1), *le centre d'homothétie* I *est placé sur* OO_1 *et le rapport d'homothétie est* $\frac{IO}{IO_1}$. *Les deux courbes décrites par les centres de sphères ont leurs tangentes parallèles aux points* O *et* O_1 *et la droite* OO_1 *engendre une développable dont l'arête de rebroussement est le lieu du point* I. »

M. Darboux, qui a présenté cette note à l'Académie des Sciences, a fait observer qu'elle entrainait une conséquence importante : « *Les développées de longueur nulle des lignes de courbure sphériques d'une même surface à lignes de courbure sphériques dans un système se déduisent les unes des autres par des inversions.* »

[*] En d'autres termes « *en soumettant les lignes de courbure sphériques d'une même surface à des inversions convenables et variant de l'une à l'autre ligne, on peut les placer toutes sur une même développable isotrope.* » [*]

N. B. — *La phrase entre astérisques a été ajoutée pendant l'impression.*

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1893, t. CXVI.

(**) Ce théorème a déjà été cité par M. Rouquet, dans sa thèse (1882), pour les surfaces à lignes de courbures planes. C'est même le mode de génération que ce géomètre a donné pour de pareilles surfaces qu'il déduit toutes des surfaces enveloppes de sphères.

Digitized by Google

Voici peut-être comment on pourrait établir ce beau théorème. Remplaçons, comme la méthode de M. Dobriner le permet, la surface (S) par une surface analogue dont les sphères osculatrices passent par un même point O. Les normalies développables le long des lignes de courbure, et par suite les développables quelconques contenant ces lignes et faisant avec les premières développables un même angle, se déduiront de celles de la surface (S) par homothétie. Il en sera de même des développables isotropes passant par ces lignes (*). Effectuons maintenant une transformation par rayons vecteurs réciproques en prenant le point O comme pôle d'inversion. Les lignes de courbure sphériques deviennent planes dans un système. Les développées de longueur nulle de ces courbes se transforment en courbes de même nature, et, comme on l'a vu plus haut (note au bas de la page 59 du présent chapitre), toutes les développables isotropes qui contiennent les lignes de courbure planes d'une surface sont égales les unes aux autres. En faisant les mêmes transformations en sens inverse, on aura toutes les développables isotropes susceptibles de contenir les lignes sphériques. Il est évident que maintenant on est près du but.

[*] Le mémoire que j'avais présenté au jugement de l'Académie royale se terminait ici. Depuis cette époque, dans son ouvrage que j'ai déjà plusieurs fois cité dans mes notes (**), M. Darboux a déduit du théorème précédent un mode de génération des surfaces à lignes de courbure sphériques dans un système.

Définissons d'abord ce que ce géomètre appelle une *rotation d'angle* α *autour d'un cercle*. C'est la succession de deux *inversions* par rapport à deux sphères principales contenant ce cercle et faisant entre elles l'angle α. Si l'angle α est infiniment petit, à un point correspond après la rotation autour du cercle un point infiniment voisin. Cela posé, voici le théorème de

N. B. — *La partie entre astérisques a été ajoutée pendant l'impression*, pp. 62 à 63.

(*) Il en sera aussi de même de deux arêtes de rebroussement quelconques correspondantes; car ces arêtes de rebroussement sont sur les cônes enveloppes des plans normaux aux lignes sphériques, cônes qui sont homothétiques. En particulier, les développées isotropes de deux lignes sphériques correspondantes sont homothétiques. (*Note ajoutée pendant l'impression.*)

(**) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. IV, p. 253.

Digitized by Google

M. Darboux : « *Pour obtenir la surface à lignes de courbure sphériques la plus générale, on coupe une développable isotrope* (Δ) *par une famille de sphères* (S); *on soumet ensuite ces sphères et le périsphère enveloppe* (Σ) *à une succession de rotations infiniment petites autour des lignes de courbure circulaires du périsphère. Les sections de la développable* (Δ) *par les sphères* (S) *se transforment ainsi dans une famille de courbes engendrant la surface cherchée.* » [*]

NOTE I.

La méthode de Catalan (*) consiste simplement à chercher les surfaces trajectoires orthogonales à une famille de surfaces

$$f(x, y, z) = u,$$

ce qui revient au même que d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$Pp + Qq - R = 0,$$

et à exprimer qu'on peut associer deux des solutions avec fonction arbitraire de manière à établir entre elles identiquement la condition d'orthogonalité. L'auteur n'a fait connaître aucun résultat nouveau et s'est borné à montrer qu'en partant de familles particulières, paraboloïdes, plans tangents à un cylindre de révolution on pouvait achever le problème; il démontre ainsi les théorèmes dus à Serret, et rencontre la propriété relative aux surfaces moulures dont j'ai parlé ailleurs (chapitre I, p. 13).

C'est aussi dans ce mémoire que Catalan a réuni les propriétés des surfaces parallèles auxquelles j'ai déjà fait allusion.

Une note insérée dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences (ann. 1874) revient sur cette méthode sans en déduire de résultat nouveau. J'ai cru devoir la signaler, dans la pensée qu'un autre géomètre pourrait en tirer profit.

(*) *Mémoires couronnés de l'Académie royale de Belgique*, t. XXXII, 1865.

Digitized by Google

NOTE II.

Les recherches sur les systèmes orthogonaux isothermes n'ont pas trouvé place dans le présent mémoire, pour la raison que les plus importants résultats en ont été connus à une époque antérieure à celle que le programme du concours semble viser. On savait depuis 1843 (*) que les systèmes triples orthogonaux et isothermes étaient exclusivement composés de quadriques. A la même époque, M. Bertrand (**) montrait que ces systèmes sont en même temps isométriques, c'est-à-dire que chacune des surfaces qui le composent peut être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure. Lire aussi sur le même sujet un mémoire de O. Bonnet (***), où les théorèmes de Bertrand sont étudiés analytiquement de manière à préciser les conditions nécessaires et suffisantes.

Cependant on peut rattacher à ces recherches d'intéressants travaux que je vais rapidement faire connaître. Dans son mémoire de 1886, M. Darboux a cherché tous les systèmes isométriques; je vais dans un instant résumer son travail. Je veux dire d'abord deux mots d'un problème traité par M. Wangerin (iv). On vient de voir que le système des cyclides homofocales n'est pas isotherme; mais elles déterminent un système de coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 et si l'on écrit avec ces coordonnées l'équation de la chaleur

$$\Delta_2 V = 0,$$

on y satisfera en posant

(1). . . . . $V = N f(\rho), f(\rho_1), f(\rho_2),$

N étant une fonction parfaitement déterminée et $f(\rho)$, $f(\rho_1)$, $f(\rho_2)$ respec-

(*) LAMÉ, *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jourdan*, t. VIII, p. 397.

(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées, de Liouville, Résal, Jordan*, t. IX, p. 317.

(***) *Journal de l'École Polytechnique*, trentième cahier, 1845, p. 141.

(iv) *Journal de Crelle*, 1877, p. 145, et note p. 348.

Digitized by Google

tivement des solutions quelconques d'une équation linéaire dont les coefficients renferment encore deux constantes arbitraires. M. Darboux (*) a généralisé le problème en supposant les coordonnées curvilignes quelconques; il est ainsi ramené aux mêmes équations que dans la recherche des systèmes isométriques (**). Ces équations sont faciles à obtenir : soit en effet l'élément linéaire de l'espace en coordonnées curvilignes orthogonales

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Si la surface $\rho_2 = c^{te}$ doit être découpée en carrés infiniment petits par les deux autres familles, il faut et il suffit que l'on ait sur cette surface

$$\frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f(\rho_1)} = \frac{f(\rho, \rho_2)}{f(\rho_1, \rho_2)}.$$

On en déduit facilement que, R_i désignant une fonction qui ne contient pas ρ_i et M une fonction quelconque inconnue de ρ, ρ_1, ρ_2, on devra avoir

$$H = \frac{R_1 R_2}{M}, \quad H_1 = \frac{R R_2}{M}, \quad H_2 = \frac{R R_1}{M},$$

que nous écrirons pour plus de commodité

$$H = \frac{e^{R_1 + R_2}}{M}, \quad H_1 = \frac{e^{R + R_2}}{M}, \quad H_2 = \frac{e^{R + R_1}}{M}.$$

M. Darboux donne dans son mémoire de 1878 (***) la discussion complète du problème, qu'il résout en formant les quantités β_{ij} que nous avons définies (p. 22) et en exprimant que ces quantités vérifient les équations aux dérivées partielles qui sont au fond celles de Lamé. On trouve ainsi :

I. — *Les systèmes formés d'une famille de plans parallèles, de deux*

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, t. LXXXIII, pp. 1037 et 1099.

(**) Il n'y a pas identité entre les deux problèmes et les systèmes orthogonaux isométriques doivent encore satisfaire à d'autres conditions pour fournir des solutions de la forme (1).

(***) *Annales de l'École Normale*, t. VII.

Digitized by Google

familles de cylindres isothermes et les systèmes qui en sont les transformés par inversion.

II. — *Les systèmes formés d'une famille de sphères concentriques, de deux familles de cônes isothermes et leurs transformés par inversion.*

III. — *Les systèmes formés d'une famille de plans passant par une droite et de deux familles de surfaces de révolution ayant cette droite pour axe et dont les méridiens forment un système orthogonal isotherme, ainsi que leurs transformés par inversion.*

IV. — *Le système des cyclides homofocales.*

V, VI, VII. — Des systèmes pour lesquels on aura

$$\begin{aligned} R &= -\tfrac{1}{2}\log a_1 - \tfrac{1}{2}\log a_2 - h\log(\rho_1 - \rho_2),\\ R_1 &= -\tfrac{1}{2}\log a_2 - \tfrac{1}{2}\log a - h\log(\rho_2 - \rho),\\ R_2 &= -\tfrac{1}{2}\log a - \tfrac{1}{2}\log a_1 - h\log(\rho - \rho_1). \end{aligned}$$

Savoir : V. $h = 2$ et les constantes a, a_1, a_2 sont telles que

$$a + a_1 + a_2 = 0.$$

VI. $h = 1$.

Alors

$$\begin{aligned} a &= m\rho^2 + 2n\rho + p,\\ a_1 &= m_1\rho_1^2 + 2n_1\rho_1 + p_1,\\ a_2 &= m_2\rho_2^2 + 2n_2\rho_2 + p_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} m + m_1 + m_2 = 0,\\ n + n_1 + n_2 = 0,\\ p + p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

VII. $h = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} a = m\rho^3 + n\rho^2 + p\rho + q,\\ a_1 = m\rho_1^3 + n\rho_1^2 + p\rho_1 + q,\\ a_2 = m\rho_2^3 + n\rho_2^2 + p\rho_2 + q, \end{cases}$$

et il n'est pas possible de donner d'autres valeurs à h sans retomber dans des systèmes connus.

Digitized by Google

Dans le cas VI ($h = 1$), il y aura un système orthogonal pour lequel on aura

$$ds^2 = \frac{1}{N^2}\left[\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 d\rho^2}{a} + \frac{(\rho_2 - \rho)^2 d\rho_1^2}{a_1} + \frac{(\rho - \rho_1)^2 d\rho_2^2}{a_2}\right],$$

N étant défini par la formule

$$N = R(\rho_1 - \rho_2) + R_1(\rho_2 - \rho) + R_2(\rho - \rho_1),$$

où

$$\begin{aligned} R &= \beta\rho - \alpha + \gamma\sqrt{a}, \\ R_1 &= \beta_1\rho_1 - \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{a_1}, \\ R_2 &= \beta_2\rho_2 - \alpha_2 + \gamma_2\sqrt{a_2}; \end{aligned}$$

α, β, γ, α_1, ... sont neuf constantes liées par trois relations homogènes. M. Darboux a simplifié un peu ces résultats, mais il n'a pas étudié géométriquement les systèmes trouvés.

Cas V : $h = 2$. Le ds^2 prend la forme

$$ds^2 = \frac{\zeta^2}{\varpi^2}\left[\frac{1}{a}(\rho_1 - \rho_2)^4 d\rho^2 + \frac{1}{a_1}(\rho_2 - \rho)^4 d\rho_1^2 + \frac{1}{a_2}(\rho - \rho_1)^4 d\rho_2^2\right],$$

avec la condition

$$a + a_1 + a_2 = 0,$$

$$\zeta = (\rho - \rho_1)(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho),$$

$$\varpi = a(\rho - \rho_1)^2(\rho - \rho_2)^2 + a_1(\rho_1 - \rho_2)^2(\rho_1 - \rho)^2 + a_2(\rho_2 - \rho)^2(\rho_2 - \rho_1)^2.$$

Cas VII : $h = \frac{1}{2}$.

Ce cas n'a conduit M. Darboux qu'à des systèmes où dans les cas les plus simples interviennent les fonctions elliptiques et que pour cette raison il n'a pas examinés à fond, les systèmes n'étant pas algébriques.

Digitized by Google

NOTE III.

Il y aurait peut-être eu lieu d'insister un peu plus longuement que je ne l'ai fait dans le texte (page 12) sur les systèmes orthogonaux qui comportent une famille de plans ou de sphères. En réalité je possède peu de renseignements bibliographiques sur ce sujet. Je résumerai donc très rapidement ce que j'en sais.

On sait depuis longtemps qu'un plan dans lequel est tracé un réseau de courbes orthogonales et qui roule sur une développable quelconque décrit, avec l'aide de ce réseau, un système triple orthogonal. Mais on ne peut pas, étant donnée une famille de plans, en trouver, à l'aide de quadratures, les trajectoires orthogonales ; on peut simplement préparer les coefficients de l'équation du plan de manière que l'intégration soit possible.

Des considérations analogues s'appliquent au cas où l'on a des sphères au lieu de plans. Il est encore évident que les trajectoires orthogonales de la famille de sphères, issues de tous les points d'un réseau orthogonal tracé arbitrairement sur l'une quelconque des sphères, pourront être groupées en deux familles de surfaces qui, avec les sphères, constitueront un système triple. Ici encore les trajectoires orthogonales ne peuvent être obtenues que si l'équation des sphères a été convenablement préparée.

Ce problème, comme le précédent, ne s'achève par des quadratures que si on connait une solution *a priori*. Cela résulte de ce que quatre trajectoires orthogonales déterminent sur une quelconque des sphères de la famille quatre points dont le rapport anharmonique est constant (c'est-à-dire, par exemple, le rapport anharmonique des paramètres des génératrices qui fixent la position de ces points). On sait alors que ces trajectoires s'obtiennent par

Digitized by Google

une équation de Riccati ; voici d'ailleurs comment on formera cette équation. Les trajectoires de la famille de sphères

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0,$$

sont données par les équations

$$\frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}=\frac{dz}{z-c},$$

où a, b, c sont fonctions données de t.

Introduisons les paramètres λ et μ des génératrices de la sphère qui se croisent au point x, y, z et exprimons x, y, z en fonction de λ et de μ : ces deux variables se sépareront et seront données chacune par une équation de Riccati.

Digitized by Google

NOTE IV.

Sur quelques systèmes orthogonaux dont il n'a pas pu être parlé dans le mémoire.

M. William Roberts (*) a eu l'idée de chercher des systèmes orthogonaux en prenant comme coordonnées d'un point ses coordonnées elliptiques, ρ, ρ_1, ρ_2 au lieu de ses coordonnées cartésiennes. C'est ainsi qu'il a obtenu le système suivant

$$\rho + \rho_1 + \rho_2 = \alpha,$$

$$\frac{(\rho - b)(\rho_1 - b)(b - \rho_2)}{(\rho + b)(\rho_1 + b)(\rho_2 + b)} = \beta,$$

$$\frac{(\rho - c)(c - \rho_1)(c - \rho_2)}{(\rho + c)(c + \rho_1)(c + \rho_2)} = \gamma,$$

dans lequel la famille (α) a ses lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes.

On peut peut-être rattacher au même ordre d'idées de beaux systèmes découverts par M. Darboux et exposés dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 312.

Soit

$$\theta = \sum_i \int \sqrt{\frac{(\rho_i - \alpha)(\rho_i - \beta)(\rho_i - \gamma)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad f(\rho) \text{ polynôme},$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1861.

Digitized by Google

et soit u une solution du système

$$\begin{cases} (\alpha - \beta)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} = 0, \\ (\beta - \gamma)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta\partial\gamma} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\gamma} = 0, \\ (\gamma - \alpha)\dfrac{\partial^2 u}{\partial\gamma\partial\alpha} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\gamma} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha} = 0. \end{cases}$$

Si ρ, ρ_1, ρ_2 sont les coordonnées curvilignes d'un point d'un espace orthogonal dont l'élément linéaire a pour carré

$$ds^2 = \frac{1}{M}\sum_i \frac{\varphi(\rho_i)}{f(\rho_i)}\,d\rho_i^2, \qquad \varphi(t) = (t-\rho)(t-\rho_1)(t-\rho_2),$$

on pose

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial u}{\partial\beta} = \frac{\partial\theta}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial\gamma} = \frac{\partial\theta}{\partial\gamma},$$

et ces trois équations déterminent α, β, γ en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2. Le théorème de M. Darboux consiste en ce que α, β, γ sont les paramètres de trois familles orthogonales.

Digitized by Google

NOTE V (*).

Sur deux mémoires de M. Bianchi relatifs aux systèmes orthogonaux renfermant une famille de trajectoires planes et sur les systèmes orthogonaux renfermant une famille de trajectoires sphériques.

M. Bianchi (**) a consacré, en 1890 et en 1891, deux mémoires aux systèmes triples orthogonaux renfermant une famille de trajectoires planes; à la même époque, M. Darboux traitait les mêmes sujets dans son cours de la Sorbonne (pages 56-57 de ce mémoire). Les méthodes étant différentes, les théorèmes auxquels arrive M. Bianchi étant nouveaux, je vais ici résumer ces deux intéressants mémoires.

Je ne reviendrai pas sur les systèmes cycliques de Ribaucour auxquels M. Bianchi consacre une partie du premier mémoire et dont j'ai déjà longuement parlé. Mais je dirai quelques mots de la congruence formée par les axes des cercles du système cyclique, et dont l'étude est intimement liée à celle du système cyclique; pour abréger, nous appellerons *congruence cyclique* cette congruence rectiligne. En voici la définition indépendante de la notion des systèmes cycliques. Nous prendrons pour coordonnées u, v sur la sphère les images des développables de la congruence cyclique; soit le carré de l'élément linéaire sphérique

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad F = \cos\Omega\sqrt{EG}.$$

Les coordonnées X, Y, Z d'un point de la sphère sont les cosinus directeurs

(*) *Cette note, ainsi que les deux suivantes, ont été ajoutées pendant l'impression.*

(**) *Annali di matematica*, série II, t. XVIII. *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* et *Annali di matematica*, série II, t. XIX. *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane.*

Digitized by Google

d'un rayon de la congruence et il suffit pour déterminer complètement ce rayon d'en connaître un point. Nous choisirons les coordonnées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, du milieu du segment compris entre les deux foyers : la demi-distance focale ρ est donnée par l'équation de Laplace (*)

$$(1). \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + F \right] \rho = 0,$$

où les symboles

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

de M. Christoffel ont les valeurs

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{E \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)};$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ s'en déduisent par les formules

$$(2). \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho \right] X - \rho \frac{\partial X}{\partial u}, \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = - \left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho \right] X + \rho \frac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

et deux analogues en $\bar{y}$ et $\bar{z}$.

La congruence cyclique étant donnée, on peut en déduire une infinité de systèmes cycliques. Soit R le rayon d'un des cercles correspondant à l'axe qui vient d'être défini ; $\frac{1}{2}\sigma$ l'angle sous lequel on voit ce rayon de l'un des foyers ; menons dans le plan du cercle les deux diamètres parallèles aux bissectrices de l'angle des tangentes aux lignes coordonnées sur la sphère u, v,

(*) GUICHARD, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, t. VI, 3e série, pp. 333-348.

Digitized by Google

et soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de ces deux diamètres. Soit enfin θ l'angle fait avec le premier de ces diamètres par un rayon arbitraire. Les coordonnées ξ, η, ζ de l'extrémité de ce rayon seront données par les formules

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \bar{x} + \rho\cos\sigma X + \rho\sin\sigma(\alpha_1\cos\theta + \alpha_2\sin\theta),\\ \eta &= \bar{y} + \rho\cos\sigma Y + \rho\sin\sigma(\beta_1\cos\theta + \beta_2\sin\theta),\\ \zeta &= \bar{z} + \rho\cos\sigma Z + \rho\sin\sigma(\gamma_1\cos\theta + \gamma_2\sin\theta), \end{aligned}\right.$$

et cette extrémité décrira une surface orthogonale aux cercles si θ est une solution de l'équation aux différentielles totales

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} d\theta = &\left[\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]du\\ &-\left[\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]dv, \end{aligned}\right.$$

dont les conditions d'intégrabilité se réduisent aux deux équations suivantes

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2},\\ \frac{\partial\sigma}{\partial v} &= -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, pour que ces deux équations soient compatibles, et aussi pour que les lignes u, v soient les images sphériques des développables de la congruence rectiligne, on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}.$$

Il faut remarquer que θ contiendra une constante arbitraire w; ξ, η, ζ dépendent ainsi de trois constantes arbitraires u, v, w qui sont les trois coordonnées orthogonales d'un point quelconque de l'espace. Les équations

Digitized by Google

précédentes permettent de trouver aisément les congruences cycliques formées de normales à une surface, les systèmes cycliques où tous les cercles sont normaux à une même sphère, et ceux plus particuliers où les cercles passent tous par un même point. Mais ces systèmes sont connus.

C'est dans le second mémoire que M. Bianchi aborde réellement de nouveaux problèmes, au moins en ce qui concerne la théorie des systèmes orthogonaux. Nous appellerons systèmes Φ les systèmes orthogonaux dans lesquels une des familles de lignes de courbure trajectoires sont des courbes planes.

Il faut d'abord démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une surface* S *à lignes de courbure planes dans un système est déterminée lorsqu'on en connaît une ligne de courbure de chaque système et les plans des lignes de courbure planes.*

En effet, au point M_0 où se coupent les deux lignes de courbure C_0 et Γ_0 données, on connaît la normale à la surface : or les normales à une surface le long d'une ligne de courbure sont développables et sont des développées de la ligne de courbure, développées qu'une seule normale suffit à déterminer comme l'on sait. Les normales ou les plans tangents à la surface sont donc connus le long des deux lignes données. Cela posé, soient C_0 la ligne de courbure plane, Γ_0 l'autre ligne donnée ; la développable circonscrite à S le long de C_0 est connue comme on vient de le voir. Par M'_0 pris sur Γ_0 infiniment voisin de M_0, menons le plan connu de la ligne de courbure qui y passe ; ce plan coupe la développable précédente suivant une ligne qu'on peut considérer comme une seconde ligne de courbure plane C'_0 et comme le plan tangent en M'_0 est déterminé, la développable circonscrite à S le long de C'_0 est connue à son tour : c'est la surface d'égale pente dont les plans tangents font avec le plan de C'_0 un angle égal à l'angle connu en M'_0. On pourra ainsi de proche en proche construire la surface S.

Il y a une condition de possibilité évidente : le plan donné de chaque ligne de courbure plane doit contenir, au point où il rencontre la ligne Γ_0, la génératrice G de la développable circonscrite à S le long de Γ_0. Le problème ne dépend que de quadratures ; il contient quatre fonctions

Digitized by Google

arbitraires, savoir celles contenues dans les deux équations de la ligne Γ_0, la fonction qui détermine pour chaque position de la génératrice G ci-dessus désignée la position du plan correspondant et enfin, dans un de ces plans, celle qui définit la courbe C_0.

Cela posé, il est possible de déterminer tous les systèmes triplement orthogonaux Φ. Voici le théorème que nous démontrerons : soit Σ_0 une surface orthogonale aux lignes de courbure planes C ; nous considérerons tous les cercles osculateurs aux courbes C aux points où elles rencontrent Σ_0, ces cercles forment, comme nous l'avons expliqué au chapitre IV, un système cyclique que nous appellerons un système cyclique Φ_0 osculateur au système Φ.

THÉORÈME. — *Un système Φ est déterminé si on en connait les éléments suivants : 1° une surface Σ_0 orthogonale aux courbes planes* C ; *2° une des courbes planes* C_0 ; *3° le système cyclique Φ_0 osculateur au système Φ le long de Σ_0.*

En effet les deux surfaces Σ' et Σ'' à lignes de courbure planes faisant partie du système Φ et qui se coupent suivant C_0 sont connues (théorème précédent) puisqu'on en connait C_0 et les traces sur Σ_0 ainsi que les plans des courbes C. Σ' étant connue, une surface quelconque du même système que Σ'' sera déterminée par ses traces sur Σ' et sur Σ_0 auxquelles il faudra joindre les plans des courbes planes C correspondantes.

On peut remarquer que dans cette démonstration n'interviennent pas les cercles du système cyclique Φ_0, mais seulement leurs plans qui suffisent, avec un cercle, le cercle osculateur à C_0, pour déterminer le système cyclique (*).

Dans ce qui suit, nous montrerons que les données précédentes sont réellement arbitraires, et non surabondantes. Pour cela considérons les

(*) Pour déterminer un système cyclique, il suffit évidemment de se donner une surface Σ normale aux cercles, la surface Σ' enveloppe des plans des cercles et dans un de ces plans le rayon du cercle correspondant. Car en un point P de Σ, le plan du cercle contiendra la normale à Σ et sera tangent à Σ'; il sera donc déterminé et la démonstration du texte s'appliquera pour achever.

Digitized by Google

formules (3) de la page (72) qui donnent les coordonnées d'un point considéré comme intersection de trois surfaces deux à deux orthogonales d'un système cyclique. Elles ne dépendent de w que par l'intermédiaire de θ; car toutes les autres fonctions qui y figurent ne contiennent que u et v.

Supposons maintenant que, non seulement θ, mais encore $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, soient des fonctions de w et essayons de représenter encore les coordonnées orthogonales d'un point quelconque de l'espace par les formules (3), les surfaces $u = c^{te}$, $v = c^{te}$, $w = c^{te}$ se coupant encore deux à deux à angle droit. Il suffira évidemment que ξ, η, ζ conservent la même forme ainsi que leurs premières dérivées partielles, ce qui entraîne la condition

$$(6) \quad \frac{\partial x}{\partial w} = -\frac{\partial \varrho}{\partial w}\left[\cos\sigma X + \sin\sigma(\alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \sin\theta)\right],$$

à joindre aux équations (2), et les équations analogues en $\overline{y}$ et $\overline{z}$.

Les équations (2) et (6) doivent pouvoir déterminer $\overline{x}$, ce qui amène à écrire trois nouvelles équations, dont la première n'est autre que l'équation (1).

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + A \dfrac{\partial \rho}{\partial u} + B \dfrac{\partial \rho}{\partial v} + C\rho = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial w} + A' \dfrac{\partial \rho}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v \partial w} + A'' \dfrac{\partial \rho}{\partial w} = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont compatibles et l'on en déduit facilement que ρ doit avoir la valeur

$$\rho = \frac{1}{\sin\sigma} \int^{w} \frac{W dw}{\dfrac{\partial \theta}{\partial w}} + R(u, v),$$

W étant une fonction de la seule variable w, et R (u, v) une solution quelconque de la première des équations (7) ou de l'équation (1). On portera cette valeur de ρ dans les équations (2) et (6) qui feront connaître $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, d'où l'on déduit ξ, η, ζ par les formules (3).

Digitized by Google

Il est facile de vérifier qu'on obtient ainsi un système triplement orthogonal : il suffit de constater que l'élément linéaire prend la forme

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2.$$

Le calcul de la torsion $\frac{1}{T_3}$ des courbes (w) n'offre aucune difficulté spéciale ; on trouve que cette torsion est nulle. Donc les courbes (w) sont planes ; le calcul montre de plus que leurs plans coupent les surfaces $u = c^{te}$ sous l'angle $\frac{\sigma}{2}$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition énoncée. En effet, soit Φ_0 le système cyclique donné comprenant comme surface orthogonale aux cercles la surface Σ_0. Les formules (3), dans lesquelles $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ et ρ sont considérées comme fonctions de u, v seules, pourront représenter le système Φ_0 à condition de choisir pour solution de l'équation (1) une fonction convenable $R(u, v)$. Soit $w = 0$ l'équation de la surface Σ_0 ; u_0, v_0, les coordonnées curvilignes du point P_0 où la courbe donnée C_0 coupe Σ_0. Les formules (3) pourront aussi, comme il vient d'être expliqué, représenter un système triplement orthogonal, non cyclique, en y remplaçant ρ par

$$\frac{1}{\sin\sigma}\int_0^w \frac{W dw}{\frac{\partial\theta}{\partial w}} + R(u, v).$$

La surface $w = 0$ de ce système coïncidera avec la surface Σ_0 et le système cyclique osculateur le long de Σ_0 coïncidera avec Φ_0. Il reste à montrer que la courbe C_0' de ce système Φ, qui est orthogonale à Σ_0 au point P_0, peut être amenée à coïncider avec C_0 par un choix convenable de la fonction W, ce qui paraît probable puisque l'équation d'une courbe plane ne dépend que d'une fonction arbitraire. Nous choisirons comme équation de C_0 son équation intrinsèque, c'est-à-dire celle qui relie le rayon de courbure à l'arc. Or les formules de Lamé nous permettent de calculer le rayon de courbure de la courbe C_0' : on trouve ainsi

$$r = \int_0^w \frac{W dw}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)_0} + R_0 \sin\sigma_0,$$

Digitized by Google

et pour l'arc

$$s = \int_0^w H_3 dw = \int_0^w r \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right)_0 dw.$$

L'équation intrinsèque donnée, appliquée à r et à s, fera connaître W.

C. Q. F. D.

Remarque. — La démonstration précédente montre qu'une fois les lignes de courbure Σ_0 connues, le problème s'achève par des quadratures.

Nous n'examinerons pas en détail les cas exceptionnels qui peuvent mettre le théorème en défaut; les lecteurs que cette étude aura intéressés en trouveront l'énumération complète dans le mémoire de M. Bianchi. Il en résulte que les seuls cas d'exception sont ceux, déjà connus, où les cercles du système cyclique sont normaux a une famille de sphères ou de plans. Signalons seulement cette importante conséquence du théorème démontré plus haut. *Toute surface à lignes de courbure planes dans un système fait partie d'une infinité de systèmes* Φ.

Le mémoire de M. Bianchi se termine par une remarquable étude de deux cas particuliers : dans le premier cas l'angle σ est constant pour tout l'espace, or cet angle est le double de l'angle sous lequel le plan d'une ligne de courbure plane coupe la surface $u = c^{te}$. On en déduit que *la détermination des systèmes* Φ *pour lesquels les plans des lignes de courbure* C *coupent sous le même angle les surfaces d'une famille se ramène à la recherche de la déformation infinitésimale des surfaces pseudosphériques.*

Pour pouvoir énoncer les autres résultats trouvés en examinant ce cas particulier, donnons une définition. Soit

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

le carré de l'élément linéaire de l'espace tri-orthogonal. J'appellerai *lignes de niveau*, sur la surface $w = c^{te}$, les courbes le long desquelles $H_3 = c^{te}$; le long de ces lignes la portion de normale comprise entre la surface w et la surface infiniment voisine a une longueur constante $H_3 dw$. On obtient

Digitized by Google

alors ce théorème : *Si dans un système triple orthogonal, les lignes de niveau des surfaces* Σ *d'une même famille coupent sous un angle constant les lignes de courbure, les surfaces des deux autres familles se coupent suivant des courbes planes* C *et les plans de ces courbes coupent toutes les surfaces d'une même famille sous le même angle.*

On peut remarquer que les surfaces Σ orthogonales aux courbes planes C sont divisées en parallélogrammes infinitésimaux équivalents par un double système de trajectoires isogonales aux lignes de courbure. Les plans des courbes C enveloppent une surface sur laquelle se trouve un réseau de lignes conjuguées géodésiques, les courbes (u) et (v).

Le second cas particulier est celui où les plans des courbes (C) coupent une surface (u) sous un angle fonction de u seulement, c'est-à-dire constant sur la surface (u). Dans ce cas les lignes u, v sur la sphère sont les images des asymptotiques d'une surface possédant une famille de lignes asymptotiques à torsion constante, et cette propriété est caractéristique. On peut trouver par quadratures autant de systèmes Φ de cette espèce que l'on voudra ; dans un pareil système les lignes de niveau d'une surface (w) coupent sous un angle constant toutes les lignes de courbure $u = c^{te}$.

La méthode géométrique, employée par M. Bianchi pour déterminer les systèmes à trajectoires planes, peut s'appliquer aux systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques pour une des familles.

Je démontrerai (*) d'abord un théorème relatif à toute surface qui admet une famille de lignes de courbure sphériques, surface que j'appellerai encore *surface* (S).

THÉORÈME. — *Une surface* (S) *est déterminée quand on en connaît une ligne de courbure de chaque système et les sphères contenant les lignes de courbure.*

Soit en effet M_0 le point où se coupent la ligne de courbure sphérique C_0 donnée et la ligne de courbure Γ_0 de l'autre système également donnée. La développable normale à (S) le long de C_0 est déterminée puisque c'est une

(*) Voir page 59, le théorème analogue démontré analytiquement par M. Dobriner.

Digitized by Google

développée de C_0 et qu'on connaît la normale au point M_0; la développable (Δ) circonscrite à (S) le long de C_0 est donc aussi déterminée. Cela posé, considérons la sphère donnée qui contient la ligne de courbure C_0, infiniment voisine de C_0, et soit M'_0 le point où C'_0 coupe Γ_0. Je dis qu'on peut remplacer C'_0 par la courbe C''_0 suivant laquelle cette sphère est coupée par la développable Δ. En effet, soient P un point quelconque de C_0, P' le point infiniment voisin où C'_0 est coupée par la seconde ligne de courbure qui passe en P; PP' étant de premier ordre, la distance P'Q de P' au plan tangent en P est infiniment petite et de second ordre. Or la courbe C''_0 a dans ce plan tangent un point P'' et l'angle QP''P', qui est l'angle de la surface S et de la sphère à un infiniment petit près, n'étant pas nul en général, P'P'' est aussi infiniment petite du second ordre; la courbe C''_0 peut donc remplacer C'_0 et se trouve ainsi déterminée. La développable circonscrite à (S) le long de C'_0 est aussi connue parce qu'on connaît maintenant la normale à (S) au point M'_0, et l'on pourra de proche en proche construire toute la surface. J'ai laissé de côté dans la démonstration le cas où l'angle QP''P' serait nul; mais dans ce cas la surface est une enveloppe de sphères et il est évident qu'elle est complètement déterminée quand on se donne la famille de sphères.

Cela posé, appelons maintenant *système* Φ tout système triplement orthogonal dans lequel une des familles a ses trajectoires orthogonales sphériques. Nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Un système Φ est complètement déterminé quand on en connaît une surface* (S_0) *orthogonale aux lignes sphériques, une trajectoire orthogonale sphérique* C_0 *et la famille des sphères qui contiennent les trajectoires sphériques.*

Soit en effet M_0 le point où C_0 perce la surface donnée (S_0), Γ_0 et Γ'_0 les deux lignes de courbure de (S_0) qui se croisent au point M_0. La surface (S'_0), orthogonale à S_0 le long de Γ_0, est entièrement déterminée, d'après le théorème précédent, puisqu'on en connaît une ligne de courbure de chaque système et les sphères contenant les lignes de courbure sphériques; de même la surface (S''_0) orthogonale à (S_0) le long de Γ'_0 est déterminée. En un point

Digitized by Google

quelconque M'_0 de Γ'_0 on connaîtra maintenant les deux lignes de courbure de (S_0) et la trajectoire orthogonale à (S_0) qui est tracée sur S''_0; on se trouve donc dans les conditions du point M_0 de départ, et l'on pourra construire la surface (S'_1), de la même famille que (S'_0), qui passe en M'_0. De proche en proche on aura les deux familles de surfaces orthogonales à (S_0) : en associant les lignes de courbure Γ et Γ' de deux surfaces (S') et (S'') de familles différentes qui se coupent en un point quelconque M, on déterminera complètement une surface (S) de la même famille que (S_0); car au point P de Γ la seconde ligne de courbure de (S) est connue puisqu'elle est tracée sur la surface (S'') que nous avons complètement déterminée, et de même on connaît au point P' de Γ' l'autre ligne de courbure de (S). Ces deux lignes de courbure quelconques déterminent un point quelconque de (S). C. Q. F. D.

Digitized by Google

NOTE VI.

Tous les systèmes orthogonaux à trajectoires planes pour une des familles du système ont été déterminés (page 56). Une inversion permet d'en déduire tous les systèmes orthogonaux dans lesquels une famille de trajectoires se trouve sur des sphères passant par un point fixe. A ces systèmes, on peut faire correspondre, par la méthode que j'ai expliquée dans le troisième chapitre, une infinité de systèmes ayant même représentation sphérique ; M. Darboux a démontré (*) que parmi ces derniers se trouvent tous ceux qui comprennent une famille de trajectoires orthogonales sphériques, en d'autres termes :

« *Toutes les fois qu'il existe un système orthogonal à lignes de courbure sphériques dans un système, on peut lui associer des systèmes analogues pour lesquels les sphères qui contiennent les lignes de courbure passent par un point fixe.* »

Pour le démontrer, on exprimera que les coordonnées x, y, z du système orthogonal vérifient une équation de la forme

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad S(x-\alpha)^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0,$$

où α, β, γ, r sont des fonctions des seules variables ρ et ρ_1. Si alors on appelle $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}$ les cosinus des angles que font avec la sphère les deux surfaces (ρ) et (ρ_1) qui contiennent la ligne de courbure sphérique, on aura les relations

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u^2 + v^2 = r^2,$$

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} S(x-\alpha)X_2 = 0, \\ S(x-\alpha)X_1 = u, \\ S(x-\alpha)X = v, \end{cases}$$

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4e partie, 1895, pp. 300 et suivantes.

Digitized by Google

dans lesquelles X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 désignent, comme de coutume, les cosinus directeurs des normales aux surfaces (ρ), (ρ_1), (ρ_2); u et v ne dépendent que de ρ et de ρ_1.

En différentiant plusieurs fois les équations (3) et en tenant compte des relations entre les cosinus que nous avons données (pages 23 à 35), M. Darboux arrive aisément à établir entre les huit fonctions ε, ε_1, A, B, C, A_1, B_1, C_1, de ρ et de ρ_1 définies par les formules

$$(4)\quad \varepsilon = \frac{1}{u}\frac{\partial v}{\partial \rho_1}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

$$(5)\quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho}, & B = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial \beta}{\partial \rho}, & C = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho}, \\ A_1 = \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_1}, & B_1 = \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_1}, & C_1 = \dfrac{1}{u}\dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_1}, \end{cases}$$

les équations suivantes, indépendantes de α, β, γ, u et v :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 A_1, & \dfrac{\partial B}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 B_1, & \dfrac{\partial C}{\partial \rho_1} = \varepsilon_1 C_1, \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial \rho} = \varepsilon A, & \dfrac{\partial B_1}{\partial \rho} = \varepsilon B, & \dfrac{\partial C_1}{\partial \rho} = \varepsilon C, \end{cases}$$

$$(7)\quad AA_1 + BB_1 + CC_1 = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1}.$$

Cela posé, suivons la marche inverse; donnons-nous les huit fonctions auxiliaires vérifiant les équations (6) et (7), et nous savons que cela est possible puisqu'il existe des systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques. Les équations (4) nous feront connaître u et v avec deux fonctions arbitraires et les équations (5), qui sont compatibles en vertu des équations (4) et (6) donneront α, β, λ par des quadratures

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha = \int (A v d\rho + A_1 u d\rho_1), \\ \beta = \int (B v d\rho + B_1 u d\rho_1), \\ \gamma = \int (C v d\rho + C_1 u d\rho_1). \end{cases}$$

Digitized by Google

On aura ainsi déterminé toutes les familles de sphères qui sont susceptibles de contenir les lignes de courbure d'une des familles d'un système orthogonal et qui dépendent des huit mêmes fonctions auxiliaires. Je vais montrer que, *parmi ces familles de sphères, il y en a pour lesquelles toutes les sphères passent par un point fixe,* l'origine par exemple. Il faudra pour cela que les coordonnées du centre, données par les formules (8), vérifient l'équation

$$(9). \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - u^2 - v^2 = 0.$$

Si l'on différentie l'équation précédente par rapport à ρ et à ρ_1, on obtient les deux relations

$$(10) \quad \begin{cases} u\varepsilon_1 + \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = A\alpha + B\beta + C\gamma, \\ v\varepsilon + \dfrac{\partial u}{\partial \rho_1} = A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma, \end{cases}$$

et la différentiation de ces équations (10) par rapport à ρ et à ρ_1 n'introduira que deux nouvelles équations, savoir

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(u\varepsilon_1 + \dfrac{\partial v}{\partial \rho}\right) = (A^2 + B^2 + C^2)\, v + S\alpha \dfrac{\partial A}{\partial \rho}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho_1}\left(v\varepsilon + \dfrac{\partial u}{\partial \rho_1}\right) = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)\, u + S\alpha \dfrac{\partial A_1}{\partial \rho_1}. \end{cases}$$

L'élimination de α, β, γ entre les équations (9), (10) et (11) conduira à deux équations du second ordre en u et v, qui, jointes aux équations (4), formeront un système *complet.* On pourra donc obtenir u et v, puis α, β, γ, ce qui démontre le théorème.

Maintenant, pour chaque système de valeurs de α, β, γ, u et v donné par les équations (4) et (8), les équations (3) permettront d'obtenir un système de valeurs pour x, y, z

$$(12) \quad \begin{cases} x = \alpha + uX_1 + vX, \\ y = \beta + uY_1 + vY, \\ z = \gamma + uZ_1 + vZ. \end{cases}$$

Digitized by Google

Or on vérifie aisément, en appliquant les formules (4) et (5) de cette note ainsi que celles (10) du chapitre III, que

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} : X = \frac{\partial y}{\partial \rho} : Y = \frac{\partial z}{\partial \rho} : Z,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} : X_1 = \frac{\partial y}{\partial \rho_1} : Y_1 = \frac{\partial z}{\partial \rho_1} : Z_1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_2} : X_2 = \frac{\partial y}{\partial \rho_2} : Y_2 = \frac{\partial z}{\partial \rho_2} : Z_2.$$

Les coordonnées x, y, z, données par les formules (12), sont donc bien celles d'un système orthogonal qui admet la même représentation sphérique que le système d'où l'on est parti ; comme de plus on a évidemment

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = u^2 + v^2,$$

les courbes (ρ_2) de ce système sont bien sphériques.

Ainsi, *à tout système triple à lignes de courbure sphériques pour une famille, on peut faire correspondre une infinité de systèmes analogues* ayant la même représentation sphérique *et parmi ces systèmes il s'en trouve toujours pour lesquelles les sphères osculatrices des lignes de courbure sphériques passent toutes par un même point.*

Pour que le problème soit entièrement achevé, il faut pouvoir choisir, parmi tous les systèmes qui ont même représentation sphérique que ceux à sphères osculatrices convergeant en un même point, les systèmes à trajectoires sphériques dans une famille.

Mais il importe auparavant de faire connaître une nouvelle méthode donnée par M. Darboux pour obtenir tous les systèmes à trajectoires planes dans une famille (*) que j'appellerai encore pour abréger les systèmes Φ. On sait (chap. IV, page 52) que les cercles osculateurs des trajectoires planes d'un système Φ, aux points où ces trajectoires rencontrent une même surface normale, forment un système cyclique. En associant convenablement les points d'un cercle osculateur et de la trajectoire plane correspondante, le système cyclique et le système Φ se trouvent avoir la même représentation

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4e partie, 1895, p. 296.

Digitized by Google

sphérique, ce qui permet de déduire le second du premier par la méthode que j'ai exposée dans le chapitre III. Je me bornerai à transcrire ici les formules auxquelles on parvient. Définissons d'abord les quantités qui vont y figurer :

x, y, z sont les coordonnées d'un point de la surface (A), normale aux courbes planes du système Φ; c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à la surface en ce point et l'on pose

$$dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = e d\rho^2 + g d\rho_1^2.$$

X, Y, Z sont les coordonnées d'un point du système cyclique osculateur au système Φ le long de la surface (A), coordonnées que l'on sait déterminer ainsi que je l'ai montré dans la note V (*); λ et μ sont deux fonctions de ρ et de ρ_1 vérifiant le système

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + R\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0,$$

où R et R_1 désignent les deux rayons de courbure principaux de (A). On définit ensuite une fonction θ par l'équation

$$\frac{2\lambda}{\theta} + (\mu + \rho_2)^2 + \frac{1}{e}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1}\right)^2 = 0,$$

et les coordonnées x_0, y_0, z_0, d'un point du système Φ sont données par les formules

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} S(x_0 - x)\left(X - x + \lambda\dfrac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho}}\right) = \theta\left[f_0(\rho_2) - \lambda\right], \\ S(x_0 - x)\left(X - x + \lambda\dfrac{\dfrac{\partial c}{\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial\mu}{\partial\rho_1}}\right) = \theta\left[f_0(\rho_2) - \lambda\right], \\ S(x_0 - x)\left(X - x + \dfrac{c\lambda}{\mu + \rho_2}\right) = \theta\left[f_0(\rho_2) - \lambda\right] + \dfrac{\lambda f_0'(\rho_2)}{\mu + \rho_2}. \end{array}\right.$$

(*) Voir aussi DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, livre IV, chap. XV. Les notations du texte sont celles de ce chapitre.

Digitized by Google

Cela posé, soit Φ' le système déduit du système précédent par une inversion et appelons x', y', z' les coordonnées d'un point du nouveau système. Soient enfin x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées d'un point du système Φ'_1 le plus général à lignes de courbure sphériques. J'ai montré dans le troisième chapitre que x'_1, y'_1, z'_1 se déduisent de x', y', z', par les formules

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{S}x'_i \frac{\partial x'}{\partial \rho_i} = \frac{\partial \Omega'}{\partial \rho_i}, \quad (i = 0, 1, 2),$$

dans lesquelles Ω' est une solution convenablement choisie des équations de Lamé auxquelles satisfont x', y', z'. Plus exactement les formules précédentes donneraient tous les systèmes ayant même représentation sphérique que le système Φ' et il faudra particulariser Ω' pour que ces systèmes soient de la classe que nous avons en vue, c'est-à-dire pour que l'on ait

$$(x'_1 - \alpha)^2 + (y'_1 - \beta)^2 + (z'_1 - \gamma)^2 = r^2,$$

α, β, γ, r étant des fonctions qui ne dépendent pas de ρ_2. On remarquera, en différentiant l'équation précédente par rapport à ρ_2, tenant compte d'une des équations (14) et intégrant à nouveau que

$$(15) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega' = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \zeta,$$

ζ étant une fonction de ρ et de ρ_1 seulement, et c'est en exprimant que cette équation (15) est identiquement vérifiée qu'on réussira à déterminer α, β et γ. Or, si l'on a un groupe de deux systèmes Φ' et Φ'_1, à même représentation sphérique, reliés par une fonction Ω', on pourra de même constituer avec le système inverse Φ et un système Φ_1, de même représentation sphérique que Φ, un groupe relié par des équations analogues aux équations (14) et par une fonction Ω'', le passage d'un groupe à l'autre s'établissant par la relation facile à démontrer

$$\Omega'' = \Omega'(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2),$$

qui permet de transformer la relation (15) en une autre

$$(16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega'' = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \zeta(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

Digitized by Google

Mais ce système Φ_1 n'est qu'un intermédiaire entre notre système Φ et le système cyclique dont nous sommes parti. Soient Ω la fonction qui permet de passer du système cyclique au système Φ_1, Ω_0 celle qui relie le système cyclique au système Φ; ces fonctions sont reliées entre elles, à Ω'' et aux coordonnées des points des systèmes orthogonaux qu'elles relient par des relations assez aisées à établir et à l'aide desquelles la relation (16) se transforme à son tour en

$$(17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Omega = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + 2\zeta\Omega_0 + \delta,$$

δ étant aussi indépendant de ρ_2. Il n'y a plus qu'à remplacer X, Y, Z, Ω, Ω_0 par leurs valeurs qui ne dépendent que de quadratures, une fois λ et μ déterminées; l'équation (17) devra être identiquement vérifiée et l'on aura ainsi α, β, γ en fonction de ρ et de ρ_1, ce qui achève la solution. En résumé, et pour mettre en lumière un point que cette analyse nécessairement trop succincte n'a pas fait suffisamment ressortir, la seule difficulté du problème consistera dans l'intégration des deux équations aux dérivées partielles que j'ai mentionnées avant l'équation (13).

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + R\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + R_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE 3

CHAPITRE PREMIER. — Formation de l'équation du problème; elle est du troisième ordre. Applications : Systèmes à quatre fonctions arbitraires d'une même variable et contenant une surface quelconque. Digression sur les surfaces parallèles et sur une lettre de Catalan. Premier mode de génération des systèmes cycliques. Recherches sur les systèmes orthogonaux dans lesquels les surfaces d'une des familles sont toutes égales entre elles 5

CHAPITRE DEUXIÈME. — Analyse des mémoires de M. Maurice Lévy. — *Théorème:* Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système orthogonal, il faut et il suffit que la ligne des ombilics de cette famille soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui la composent 16

CHAPITRE TROISIÈME. — Méthode de Lamé : le problème est ramené à l'intégration de six équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Systèmes reliés entre eux par une même représentation sphérique : systèmes déduits de celui des ellipsoïdes homofocaux, ou bien de celui provenant de l'inversion de plans parallèles aux plans coordonnés. Théorèmes sur trois équations particulières aux dérivées partielles du second ordre et linéaires. Solution générale du problème de la détermination des systèmes ayant une représentation sphérique donnée. Compléments sur les systèmes possédant une certaine symétrie par rapport aux plans coordonnés 20

CHAPITRE QUATRIÈME. — Systèmes cycliques de Ribaucour. Définition. Ils constituent une généralisation des systèmes où une des familles est composée de surfaces parallèles. Il existe une infinité de systèmes cycliques comprenant une surface donnée. A tout système triple orthogonal, on peut faire correspondre un système cyclique osculateur le long d'une surface du système. Le système demeure cyclique si l'on déforme la surface enveloppe des plans des cercles en entraînant dans la déformation chaque cercle avec le plan correspondant. Mode de génération de tous les systèmes cycliques dû à M. Darboux. Extension de la méthode par le même auteur à tous les systèmes orthogonaux à trajectoires planes pour une des familles du système triple 47

Digitized by Google

Pages.

CHAPITRE CINQUIÈME. — Sur les surfaces qui admettent une famille de lignes de courbure sphériques. M. Dobriner les déduit de celles où les sphères osculatrices passent par un même point. Théorème de M. Blutel sur celles de ces surfaces qui ont une même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. M. Darboux en a déduit une génération géométrique de ces surfaces 58

NOTE I. — Sur une méthode générale proposée par Catalan pour trouver tous les systèmes orthogonaux 63

NOTE II. — Sur les systèmes orthogonaux isothermes 64

NOTE III. — Quelques renseignements sur les trajectoires orthogonales de plans ou de sphères 68

NOTE IV. — Systèmes orthogonaux de M. William Roberts 70

NOTE V. — Sur deux mémoires de M. Bianchi où sont déterminés tous les systèmes orthogonaux renfermant une famille de lignes de courbure planes, et sur les systèmes orthogonaux dans lesquels une des familles de surfaces a toutes ses trajectoires orthogonales sphériques. 72

NOTE VI. — Deuxième méthode pour obtenir tous les systèmes orthogonaux à trajectoires sphériques pour une famille (M. Darboux). Troisième méthode, également due à M. Darboux, pour déterminer tous les systèmes triples comprenant une famille de lignes de courbure sphériques 83

Digitized by Google

Digitized by Google

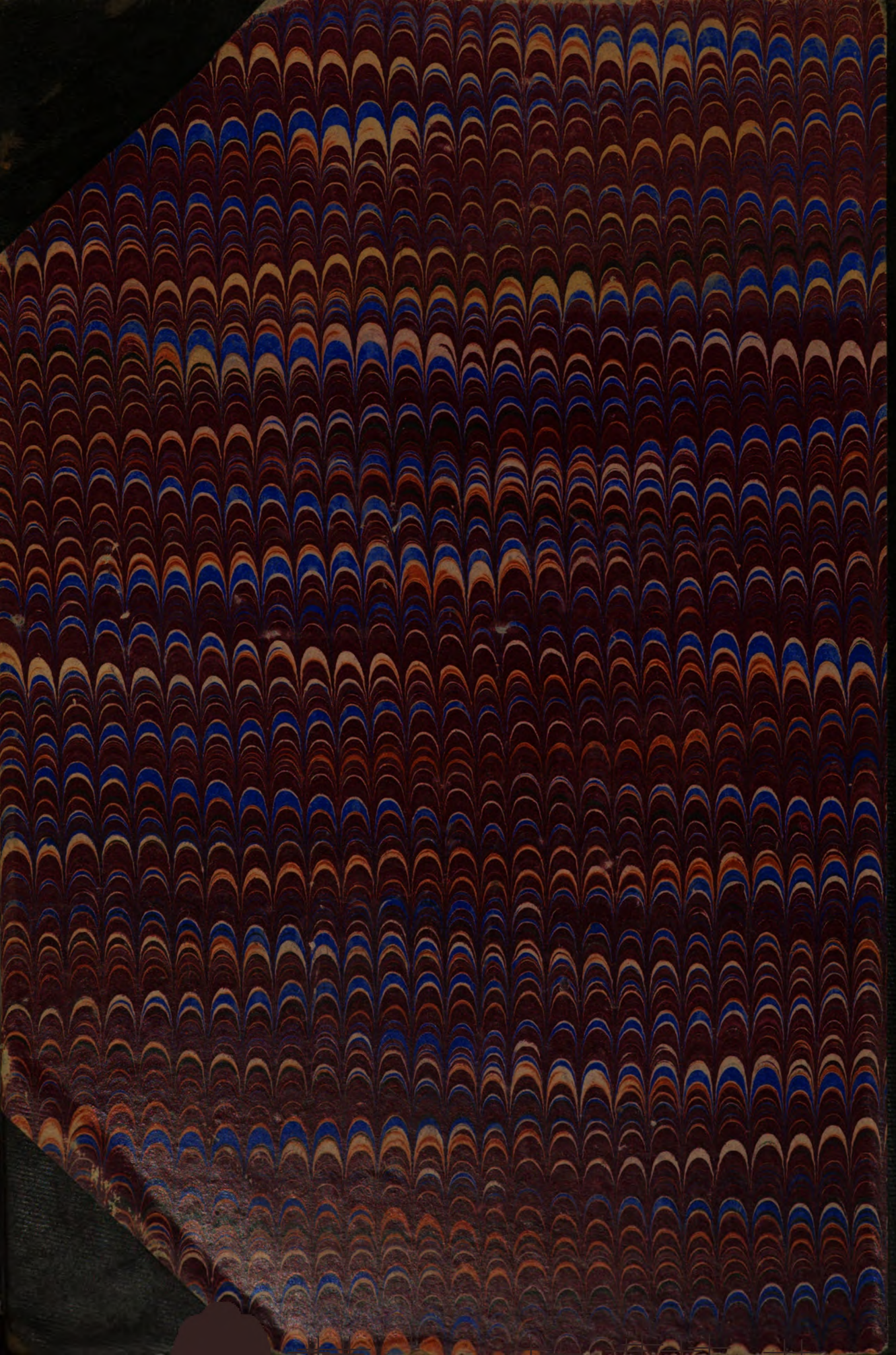
Digitized by Google

Digitized by Google

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ

This book is due on the last **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **429-2756**
Books not returned or renewed within 14 days
after due date are subject to billing.

STORED AT NRLF

Digitized by Google

Digitized by Google